

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет
будівництва і архітектури

КІЛЬЦЕВА ПЛАСТИНА

Методичні рекомендації
до виконання розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності
7.092101 "Промислове і цивільне будівництво"

Київ 2003



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Пеклов М.Д. КІЛЬЦЕВА ПЛАСТИНА

Методичні рекомендації
до виконання розрахунково-графічної
роботи для студентів спеціальності
7.092101 "Промислове
і цивільне будівництво"

КИЇВ 2003

Укладач М.О. Пеклов, старш. викладач

Рецензент Л.Т. Шкельов, канд. техн. наук, професор

Відповідальний за випуск Л.Т.Шкельов, завідувач кафедри

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів,
протокол № 8 від 25 червня 2003 р.*

Видається в авторській редакції.

Кільцева пластина: Методичні рекомендації до виконання
К39 розрахунково-графічної роботи "Кільцева
пластина"/Уклад. М.О. Пеклов. – К.: КНУБА, 2003. – 64 с.

Містять елементи теорії тонких кільцевих пластин та методику виконання завдань з розрахунку кільцевих пластин на міцність і жорсткість. Дано розгорнуте обґрунтування аналітичного розв'язку задачі поперечного згину кільцевих пластин при дії віссесиметричного навантаження. Ретельно розглянуто питання виконання граничних умов та обмежень розв'язку, що використовується.

Призначено для студентів спеціальності 7.092101
"Промислове і цивільне будівництво" (третій рік навчання).

ЗМІСТ

Загальні положення	4
1. Визначення, позначення і гіпотези.....	6
2. Переміщення і деформації.....	10
3. Напруги і зусилля.....	13
4. Диференціальне рівняння рівноваги кільцевої пластини і його інтеграл.....	20
5. Граничні умови на контурі пластини.....	23
6. Обчислення нормальних і дотичних напружень у розрахунках міцності кільцевих пластин.....	25
7. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної вправи на тему «Розрахунок кільцевої пластини на міцність і жорсткість».....	27
8. Пластина, внутрішня кромка якої жорстко закріплена, зовнішня - вільна і навантажена розподіленим навантаженням.....	28
9. Пластина, зовнішня кромка якої прикріплена шарнірно, внутрішня - жорстко закріплена в центральному абсолют-но твердому диску і переміщується разом з ним.....	36
10. Пластина, внутрішня кромка якої шарнірно оперта, зовнішня жорстко закріплена і навантажена по всій площині рівномірно розподіленим поперечним навантаженням.....	44
11. Визначення даних індивідуальних задач розрахунково-графічної вправи «Розрахунок кільцевої пластини на міцність і жорсткість».....	54
12. Табулювання функцій, заданих громіздкими формулами, на мікрокалькуляторах типу "Casio" fx-100W, fx-570W.....	59
Список літератури.....	62

Загальні положення

Теорія і методи розрахунку тонких пластин вивчаються студентами спеціальності 1202 «Промислове і цивільне будівництво» (III рік навчання) у курсі «Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності». Програмою передбачено також виконання розрахунково-графічної вправи на тему «Кільцева пластина». При його виконанні, як правило, виникають труднощі викликані тим, що, відповідно до навчального плану, вправа виконується наприкінці семестру одночасно з вивченням теоретичної частини курсу, присвяченої загальній теорії пластин. Разом з тим у сучасних навчальних посібниках при викладі теми «Кільцева пластина» в значній мірі використовуються знання із загальної теорії пластин. Зрозуміло, що таке порушення послідовності викладу не сприяє ані поглибленому вивченню теми, ані якісному виконанню вправи. Щоб уникнути цього, у методичні вказівки включено основи теорії поперечного згину кільцевих пластин. Викладаються основні визначення, позначення і гіпотези лінійної теорії пластин. Виконано вивід диференційного рівняння задачі, і його рішення. Сформульовано граничні умови для основних випадків закріплення кільцевих пластин. Виведено формули для визначення переміщення і зусиль у пластині. Потім наведено методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної вправи і приклади розрахунку кільцевої пластини на міцність і жорсткість. Приклади виконані докладно з усіма необхідними перетвореннями і проміжними обчисленнями. Розрахунок кільцевої пластини вимагає рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь і обчислень, пов'язаних з табулюванням функцій, заданих громіздкими формулами. Тому корисно використовувати сучасні інженерні мікрокалькулятори для виконання формульних обчислень. Методичні рекомендації містять короткий опис мікрокалькулятора

«Casio» fx-570W, є приклад з його використання при обчисленні громіздких виразів, а також вихідні дані для індивідуальних задач і список літератури, де крім підручників є і довідники. Це може бути корисним для більш глибокого вивчення теми. Усе це робить методичні вказівки автономним посібником, придатним для використання і при заочній формі навчання.

Тонкі кільцеві пластини як конструктивний елемент використовуються в будівництві, машинобудуванні й інших галузях техніки. Розрахунок на міцність і жорсткість кільцевої пластини вимагає знання напружень (шість невідомих функцій), деформацій (шість невідомих функцій) і переміщень (три невідомі функції) у кожній точці тіла. Щоб визначити п'ятнадцять невідомих функцій, що задовольняють заданим граничним умовам, необхідно вирішити просторову задачу теорії пружності. Тіло має форму кільцевої пластини, що істотно спрощує задачу. Для деяких випадків зовнішнього навантаження замість рішення системи з п'ятнадцяти функціональних рівнянь залишається одне диференціальне рівняння, для якого можна одержати аналітичне рішення.

1. Визначення, позначення і гіпотези

Кільцевою пластинною називають тіло, що має форму порожнього колового циліндра, висота якого значно менше розміру його основи. Внутрішню і зовнішню поверхню циліндра називають *кромками* або бічною поверхнею кільцевої пластини, а верхній і нижній торці циліндра – відповідно верхньою і нижньою поверхнями пластини. Геометричне місце точок, що знаходяться на однаковій відстані від верхньої і нижньої поверхні пластини, утворює *середину площини* пластини. Лінії перетину серединної площини з бічною поверхнею утворюють *контур* пластини. Відстань між верхньою і нижньою поверхнями називають *товщиною* пластини.

Геометрію пластини зручно задавати в циліндричній системі координат, з'єднуючи її початок з центром ваги пластини. Вісь z спрямована вниз, вісь x спрямована уздовж радіуса. Полярний кут θ відраховується проти годинникової стрілки в площині пластини. Положення будь-якої точки e визначається трьома координатами абсцисою $oc=r$, дуговою координатою $cd=\theta$, аплікатою $de=z$. Геометрія кільцевої пластини визначається розмірами внутрішнього радіуса a , зовнішнього радіуса b і товщиною h . Виміряна вздовж радіуса відстань між кромками пластини $l=b-a$ (рис. 1) називається *прольотом* пластини.

В'язі, за допомогою яких пластини спирається на інші конструкції, розміщено по всій довжині кромки. Таким чином, кільцева пластини разом із кріпленнями є конструкцією з осью симетрії. Вважається, що навантаження прикладене нормально до серединної площини пластини.

Далі розглядається випадок коли і навантаження теж має осьову симетрію. Тоді в кільцевій пластині виникають переміщення, деформації і напруження, які також мають осьову симетрію.

6

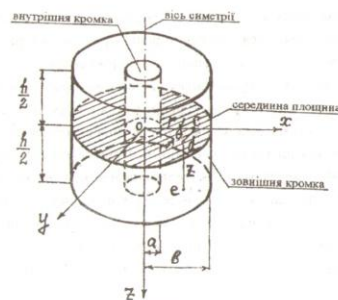


Рис. 1. Геометрія кільцевої пластини

Напружено деформований стан пластини істотно залежить від співвідношення її розмірів. За величиною співвідношення товщини пластини до характерного лінійного розміру в плані $b-a$ розрізняють пластини:

товсті	тонкі	мембрани
$\frac{h}{b-a} > \frac{1}{10}$	$\frac{1}{10} > \frac{h}{b-a} > \frac{1}{80}$	$\frac{1}{80} > \frac{h}{b-a}$

У першому випадку пластини є об'ємним тілом в якому всі напруження і деформації мають приблизно однакову величину. Для їхнього визначення необхідно вирішити просторову задачу теорії пружності.

7

У мембранах можливі тільки розтяжні нормальні напруження, що розподіляються практично рівномірно по товщині пластини. Вони можуть бути визначені з умови рівноваги.

У техніці й у будівництві широко використовують тонкі пластини невеликого прогину, напруження в яких не виходять за межі пружності матеріалу, з якого пластини виготовлені. При поперечному вигині тонкої пластини її напружений стан вкрай неоднорідний. Виявляється, що величини нормальних напружень і кутових деформацій у деяких перетинах пластини можуть відрізнятися від їхніх найбільших значень у сто і більш разів. Цю обставину можна використати і спростити рішення задачі. Відповідні спрощення вводять за допомогою гіпотез теорії тонких пластин.

У випадку поперечного вигину тонкої пластини її напружений стан виявляється досить схожим на напружений стан, що виникає у вузькій балці – смугі такого ж прольоту, навантаженою таким же навантаженням. Відомо, що якщо навантаження розподілене рівномірно по довжині прольоту балки, то величина нормального напруження σ_z складає біля одного відсотка від величини найбільшого нормального напруження

$$\sigma_z = \frac{4}{3} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \sigma_1 = 0.0133 \sigma_1$$

Такою величиною в технічній теорії згину тонких пластин нехтують. Приймають, що нормальні напруження між шарами пластини $\sigma_z = 0$ відсутні. Це спрощення відоме як гіпотеза про відсутність натиснення шарів пластини один на інший. Вона означає, що будь-який шар пластини, рівнобіжний її серединній площині, знаходиться в плоскому напруженому стані. Це істотно спрощує рішення задачі.

8

При поперечному вигині кільцевої пластини її серединна площина трансформується в серединну поверхню і всі точки поперечного перерізу одержують переміщення. Вертикальна складова повного переміщення довільної точки e , що не належить серединній площині і пластини, називається *прогином* $w(r) = pr_2 ee$ (рис. 2).

Важливим є відношення величини найбільшого прогину $w_{\max}$ до товщини пластини h , що характеризує *жорсткість* пластини. За величиною цього відношення розрізняють

Гнучкі тонкі пластини невеликого прогину (тверді пластини)	Гнучкі тонкі пластини великого вигину
$\frac{w_{\max}}{h} < \frac{1}{5}$	$2 > \frac{w_{\max}}{h} > \frac{1}{5}$

У першому випадку пластини несуть таке невелике поперечне навантаження, що прогини їх малі в порівнянні з товщиною. В другому випадку пластини прогинаються настільки, що впливом їхніх прогинів на величину зусиль, що спричиняють деформацію серединного шару не можна нехтувати.

У промисловому і цивільному будівництві застосовуються, як правило, тверді пластини. У цьому випадку наближене значення відносної лінійної деформації нейтрального волокна балки – смуги збігається з відношенням $w_{\max}/l$ і не перевищує двох відсотків.

$$\varepsilon = \frac{w_{\max}}{l} < 0.02$$

Такою величиною у технічній теорії згину тонких пластин нехтують. Приймають, що відносна лінійна деформація серединного шару дорівнює нулю $\varepsilon_0 = 0$. Це спрощення відоме як гіпотеза

9

про відсутність деформацій розтягу серединної поверхні вигнутої пластини. Воно теж спрощує рішення задачі.

Нарешті, третє спрощення, відоме як гіпотеза прямих недеформованих нормалей Кірхгофа – Лява, ґрунтується на факті малості кутових деформацій в околі довільної точки серединної поверхні пластини. Передбачається, що будь-який прямолінійний відрізок, виділений у тілі пластини нормально до її серединної площини до навантаження, залишається після деформації прямолінійним і нормальним до серединної поверхні, у яку перетворюється серединна площина пластини. Гіпотезу прямих нормалей можна трактувати як вимогу незмінюваності прямих кутів між прямолінійним відрізком і дотичною площиною. А це означає, що відсутні зсуви в околі довільної точки серединної площини.

Далі розглядається випадок, коли навантаження, яке згинає тонку кільцеву пластину, має осьову симетрію й однакові переміщення всіх точок контуру.

2. Переміщення і деформації

Задача поперечного вигину кільцевих пластин вирішується в переміщеннях. При вигині пластини положення довільної точки серединної площини визначається вектором повного переміщення $u(r, z, \theta)$. Невідомими є три складові цього вектора. Позначимо їх

$u(r, z, \theta) = u(r, z)$ – складова вздовж радіуса;

$v(r, z, \theta) = v(r, z)$ – складова, ортогональна до діаметральної площини пластини;

$w(r, z, \theta) = w(r, z)$ – складова, вздовж осі симетрії.

Осьова симетрія деформацій кільцевої пластини накладає обмеження на переміщення довільної точки, що може переміщуватися тільки в діаметральній площині. Тому складова повного

переміщення яка виходить з діаметральної площини пластини відсутня

$$v(r, z, \theta) = 0. \quad (2.1)$$

Дві інші складові повного переміщення не залежать від полярного кута

$$u(r, z, \theta) = u(r, z),$$

$$w(r, z, \theta) = w(r, z).$$

При осьовій симетрії деформації всі точки кола радіуса r мають однаковий прогин $w(r)$. Тому відсутня кутова деформація в площині yz

$$\gamma_{\theta z} = 0.$$

Відсутня також кутова деформація у площині, дотичній до серединної поверхні пластини,

$$\gamma_{\theta r} = 0.$$

Гіпотезу прямих нормалей можна розглядати як вимогу про відсутність кута зсуву в діаметральній площині в околі довільної

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

точки серединної поверхні пластини, тобто при $z=0$

Рівняння містять дві невідомі функції. Проінтегруємо ці рівняння і вирішимо його відносно невідомої функції $u(r, z)$

$$u(r, z) = - \int \frac{\partial w}{\partial r} dz + f_1(r),$$

де $f_1(r)$ – довільна функція.

У точці на осі симетрії, при $r=0$, горизонтальне переміщення відсутнє $u(0, 0) = 0$. Відповідно до гіпотези про відсутність розтягу серединної поверхні пластини дорівнює нулю також і лінійна відносна деформація $\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = 0$, а разом з нею і сама функція $u(r, 0)$. Тому і довільна функція теж дорівнює нулю: $f_1(r) = 0$. Отже

$$u(r, z) = -z \frac{dw}{dr} \quad (2.2)$$

Знак мінус вказує, що при додатному значенні кута повороту ϕ (поворот за годинниковою стрілкою) горизонтальне переміщення у довільній точці з аплікатою $z > 0$

$$\phi(r) = \frac{dw}{dr}$$

відбувається у від'ємному напрямку (рис. 2).

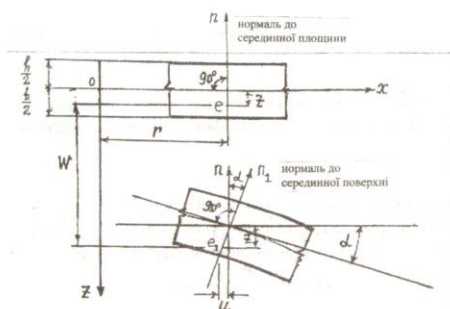


Рис. 2. Переміщення пластини при згинанні

Таким чином, із трьох невідомих функцій, що визначають повне переміщення довільної точки, залишилася лише одна невідома функція прогину пластини $w(r, z)$. Функція $v(r, z) = 0$, а функція $u(r, \theta)$, що визначає горизонтальне переміщення, виражається через невідому функцію прогинів $w(r, z)$. Далі завдання полягає в

тому щоб і всі інші невідомі функції, що визначають напружено деформований стан кільцевої пластини, виразити через цю невідому функцію. Задача поперечного вигину кільцевих пластин вирішується в переміщеннях.

Зв'язок між деформаціями і переміщеннями визначається рівняннями Коші. У полярній системі координат для довільного шару пластини, паралельного серединній площині, ці рівняння мають вигляд

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}. \quad (2.3)$$

З урахуванням осьової симетрії, невідома функція $u(r, z)$ не залежить від полярного кута θ , а невідома функція $v(r, z)$ та її похідні тотожно дорівнюють нулю. Після підстановки виразів (2.1) і (2.2) у (2.3) усі функції, що визначають деформацію шару пластини, будуть виражені через одну невідому функцію прогину

$$\epsilon_r = -z \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \epsilon_\theta = -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr}, \quad \gamma_{r\theta} = 0. \quad (2.4)$$

Таким чином, із шести компонентів тензора деформацій залишається невизначеною кутова деформація $\gamma_{r\theta}$.

3. Напруження й зусилля

Рішення просторової задачі теорії пружності вимагає визначення шести компонентів тензора напружень. На відстані z від рівня серединної площини пластини за допомогою двох перетинів, паралельних серединній площині, виділимо шар товщиною dz . Кожен шар пластини знаходиться в умовах плоского напруженого стану. Проведемо два радіальних перетини. Один радіусом r , інший радіусом $r + dr$. Проведемо два діаметральних перетини.

Один під кутом θ , інший під кутом $\theta + d\theta$. На гранях виділеної частини шару пластини будуть діяти нормальні і дотичні напруження (рис. 3).

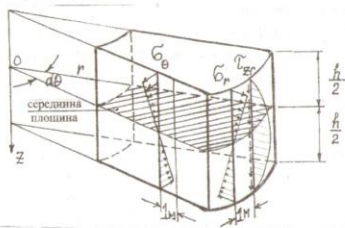


Рис. 3. Нормальні і дотичні напруження у перерізах пластини

Розглянемо пружний стан матеріалу пластини. Зв'язок між деформаціями і напруженнями визначається рівняннями закону Гука. Запишемо їх у формі, вирішеній щодо напружень. У полярній системі координат для випадку плоского напруженого стану рівняння мають вигляд

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\mu^2}(\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = -\frac{Ez}{1-\mu^2}(\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r), \quad \tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{r\theta}. \quad (3.1)$$

Функції відносних деформацій (2.4) уже визначені через невідому функцію прогинів. Після їхньої підстановки в (3.1) функції напруг також будуть виражені через функцію прогинів

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad \sigma_\theta = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (3.2)$$

Вираз для нормальних напружень показує, що по товщині пластини напруження змінюються за лінійним законом і дорівнюють нулю на рівні середньої поверхні. На рівні шару, у його площині, дотичні напруження відсутні (рис. 4).

нують нулю на рівні середньої поверхні. На рівні шару, у його площині, дотичні напруження відсутні (рис. 4).

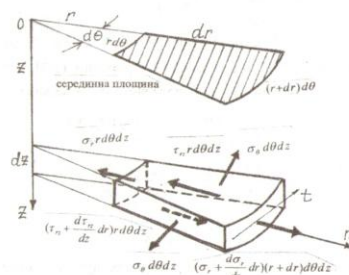


Рис. 4. Елемент довільного шару пластини з діючими напруженнями

Згадаємо, що відповідно до прийнятої гіпотези про відсутність натиснення шарів один на одній, нормальні напруження $\sigma_z = 0$. Оскільки кутова деформація дорівнює нулю $\gamma_{rz} = 0$, то відсутні і відповідні дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$.

Для визначення дотичного напруження $\tau_{r\theta}$ скористаємося умовою рівноваги виділеного із шару пластини елемента (рис. 4). Умова рівноваги всіх сил на вісь r

$$\sum F_r = 0; \quad \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta + \left(\tau_{r\theta} + \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} dr \right) r d\theta - \tau_{r\theta} r d\theta = 0.$$

Після спрощень і з урахуванням малості кута $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$ рівняння буде

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3.3)$$

Функції $\sigma_r(r, z)$ і $\sigma_\theta(r, z)$ були визначені раніше. Це дозволяє знайти вирази і, після підстановки їх у рівняння (3.3), отримати рівняння для визначення функції дотичного напруження $\tau_{r\theta}$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{\mu}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{\mu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$$

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{dr} = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{\mu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \right).$$

Диференціальний оператор в круглих дужках, може бути представлений в еквівалентному, коротшому записі

$$\left(\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{\mu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right).$$

Отже рівняння для визначення функції дотичного напруження $\tau_{r\theta}$ буде

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{dr} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right).$$

Його інтеграл, визначений методом безпосереднього інтегрування

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \frac{z^2}{2} + f(r), \quad (3.4)$$

де $f(r)$ – довільна функція, що визначається граничними умовами.

За умовою задачі на пластину діє тільки поперечне навантаження. Тому відсутнє дотичне навантаження на верхній і нижній

площині пластини. Тоді за законом парності дотичних напружень $\tau_{rz} = \tau_{rz}$ повинні бути відсутні дотичні напруження в точках $z = +h/2$ і $z = -h/2$

$$\tau_{r\theta}(h/2) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + f(r) = 0.$$

Після знаходження функції $f(r)$ і підстановки її в (3.4) буде визначено останню невідому функцію деформацій

$$\tau_{r\theta}(r) = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) S(z), \quad (3.5)$$

де $S(z) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right)$ є статичний момент площі смуги одиничної довжини, що знаходиться нижче апікати z . Розмірність статичного моменту в системі СІ – м^3 .

Інтегральні характеристики нормальних і дотичних напружень, які діють по кромках пластини називаються згинальними моментами і поперечними силами (рис. 5).

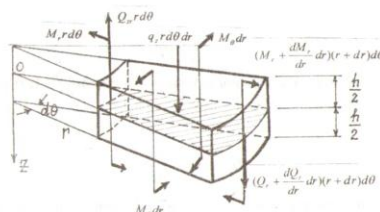


Рис. 5. Елемент пластини з діючими зусиллями

По довжині кромки виділяється смуга одиничної довжини. Тому зусилля називаються питомими зусиллями, тобто віднесені до одиничної довжини кромки. Питомий згинальний момент, що діє в циліндричному перерізі, називається *радіальним*. Він позначається M_r , його величина визначається інтегралом

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_r(z) dA = - \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) dz = - \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz.$$

Визначений інтеграл, який треба обчислити, збігається з величиною моменту інерції прямокутника, ширина якого дорівнює одиниці довжини а висота дорівнює висоті пластини

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1 \cdot h^3}{12}.$$

Розмірність моменту інерції в системі СІ м^4 . Циліндричною жорсткістю пластини називають величину виразу

$$D = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1h^3}{12}.$$

Розмірність циліндричної жорсткості в системі СІ $\text{Н} \cdot \text{м}^2$. Отже, вираз для функції радіального згинального моменту має вигляд

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (3.6)$$

Розмірність питомого згинального моменту M_r в системі СІ $(\text{Н} \cdot \text{м})/\text{м} = \text{Н}$.

Питомий згинальний момент, що діє в площині, ортогональній до діаметральної площини, тобто в коловому напрямку, називається *коловим*. Він позначається M_θ . Його величина визначається інтегралом

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_\theta(z) dA = - \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) dz = - \frac{E}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz.$$

Отже, вираз для функції колового згинального моменту має вигляд

$$M_\theta = -D \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (3.7)$$

Правило знаків для згинальних моментів: згинальний момент вважається додатним, якщо при $z > 0$ нормальне напруження спричинює в шарі розтягання. На рис.5 показані від'ємні згинальні моменти

Питома поперечна сила, що діє по циліндричному перерізу, називається *радіальною*. Вона позначається Q_r . Її величина визначається інтегралом

$$Q_r = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz}(z) dA = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \left(r \frac{dw}{dr} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2} - z^2 \right) dz.$$

Визначений інтеграл, який слід обчислити, збігається з величиною моменту інерції прямокутника, ширина якого дорівнює одиниці довжини а висота дорівнює висоті пластини

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1h^3}{12}.$$

Отже, вираз для функції радіальної поперечної сили має вигляд

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (3.8)$$

Розмірність питомої поперечної сили Q_r в системі СІ $\text{Н}/\text{м}$.

4. Диференціальне рівняння рівноваги кільцевої пластини і його інтеграл

Умова рівноваги всіх сил, що діють на елемент, виділений із шару пластини (рис. 5), навісь z

$$\Sigma F_r = -Q_r d\theta + (Q_r + \frac{dQ_r}{dr} dr)(r+dr) d\theta + q_r r dr d\theta = 0.$$

Звідси після спрощень одержуємо

$$r \frac{dQ_r}{dr} + Q_r = -r q_r.$$

Ліву частину рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dr} (r Q_r) = r \frac{dQ_r}{dr} + Q_r.$$

Отже, рівняння рівноваги кільцевої пластини буде мати вигляд

$$\frac{d}{dr} (r Q_r) = -r q_r.$$

Після підстановки функції поперечної сили отримаємо основне диференціальне рівняння задачі для невідомої функції прогинів

$$\frac{d}{dr} \left(r D \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) = r q_r.$$

Для пластин постійної товщини циліндрична жорсткість пластини теж величина постійна і рівняння спрощується.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) = \frac{r q_r}{D}. \quad (4.1)$$

Така форма запису диференційного рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами дозволить одержати його рішення в аналітичному вигляді. Перемноживши ліву і праву частини рівняння (4.1) на диференціал dr і, проінтегрувавши рівняння, одержимо

$$\left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) = \frac{1}{D} \int r q_r dr + C_1.$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння на r і після інтегрування одержимо

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} r q_r dr + C_1 \ln r + C_2.$$

Перемноживши ліву і праву частини рівняння на r і інтегруючи, одержимо

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{1}{D} \int r \left[\int \frac{1}{r} r q_r dr + C_1 \ln r + C_2 \right] dr + C_3 \frac{r^2}{2} + C_4.$$

Розділивши ліву і праву частини рівняння на r і проінтегрувавши одержимо

$$w(r) = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \left[\int r \left[\int \frac{1}{r} r q_r dr + C_1 \ln r + C_2 \right] dr + C_3 \frac{r^2}{2} + C_4 \ln r + C_5 \right] dr + C_6 \frac{r^3}{6} + C_7 \ln r + C_8.$$

Введемо нові позначення для довільних сталих

$$X_1 = \frac{C_1}{8}, \quad X_2 = -\frac{C_2}{8} + \frac{C_3}{4}, \quad X_3 = C_3, \quad X_4 = C_4.$$

Тоді функція прогинів кільцевої пластини

$$w(r) = X_1 r^3 \ln r + X_2 r^3 + X_3 \ln r + X_4 + \overline{w}(r), \quad (4.2)$$

де X_1, X_2, X_3, X_4 є довільними сталими, обумовленими граничними умовами.

$$\overline{w}(r) = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \left(\int r \left(\int \frac{1}{r} r q_r dr \right) dr \right) dr \quad (4.3)$$

є окреме рішення, що залежить від вигляду правої частини диференційного рівняння, тобто від вигляду функції навантаження.

Функція кута повороту циліндричного перетину до серединної поверхні пластини

$$\varphi(r) = \frac{dw(r)}{dr} = X_1 (2r \ln r + r) + 2X_2 r + X_3 \frac{1}{r} + \overline{\varphi}(r), \quad (4.4)$$

$$\text{де } \overline{\varphi(r)} = \frac{dw(r)}{dr} = \frac{1}{D} \int r \left(\int \frac{1}{r} (j r q_r dr) dr \right) dr \quad (4.5)$$

Обчислимо другу похідну функції прогинів

$$\frac{d^2 w(r)}{dr^2} = X_1 (2 \ln r + 3) + 2 X_2 - X_1 \frac{1}{r^2} + \frac{d^2 w(r)}{dr^2}$$

Підстановка виразів першої і другої похідних у (3.6) дозволяє одержати формулу для обчислення функції радіального згинального моменту в пластині

$$M_r(r) = -D(2(1+\mu) \ln r + 3 + \mu) X_1 - 2D(1+\mu) X_2 - D \frac{1-\mu}{r^2} X_3 + \overline{M}_r(r), \quad (4.6)$$

де

$$\overline{M}_r = -D \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (4.7)$$

є доданок, що залежить від вигляду функції навантаження.

Функція колового згинального моменту

$$M_\theta(r) = -D(2(1+\mu) \ln r + 3 + \mu + 1) X_1 - 2D(1+\mu) X_2 - D \frac{1-\mu}{r^2} X_3 + \overline{M}_\theta(r), \quad (4.8)$$

де

$$\overline{M}_\theta = -D \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (4.9)$$

Функції радіальної поперечної сили

$$Q_r(r) = -\frac{4D}{r} X_1 + \overline{Q}_r(r), \quad (4.10)$$

де

$$\overline{Q}_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \quad (4.11)$$

є доданок, що залежить від вигляду функції навантаження

5. Граничні умови на контурі пластини

5. Граничні умови на контурі пластини

Кромками кільцевої пластини спирається на інші конструктивні елементи. Умови опирання пластини задають граничні умови для функції прогинів і її похідних. Функція прогину пластини повинна задовольняти диференційному рівнянню задачі і заданих граничних умов. Диференційне рівняння задачі (4.1) четвертого порядку, тому на кожній із двох кромek пластини повинно бути задано по дві граничні умови. Граничні умови можуть бути кінематичними (геометричними), статичними і змішаними.

1. *Геометричні* граничні умови. У цьому випадку задані величини переміщення точок кромки пластини і кут повороту поперечного перерізу до серединної поверхні пластини. Тут можливі такі варіанти.

1.1. Затиснений край пластини. Відсутні переміщення і кут повороту поперечного перерізу кожної точки контуру. Наприклад, для $r=b$, $w(b)=0$, $\varphi(b)=0$.

1.2. Вертикальні переміщення всіх точок кромки пластини при одночасній відсутності повороту поперечного перерізу. Наприклад, для $r=b$, $w(b)=c$, $\varphi(b)=0$. Тут c – величина лінійного переміщення кромки в метрах.

1.3. Поворот перерізу всіх точок кромки пластини при одночасній відсутності лінійного переміщення. Наприклад, для $r=b$, $w(b)=0$, $\varphi(b)=d$. Тут d – величина кута повороту перерізу в радіанах.

2. *Статичні* граничні умови. У цьому випадку на кромці пластини задані значення зовнішнього розподіленого моментного навантаження і розподіленого поперечного навантаження. Тут можливі такі варіанти.

2.1. Вільний край пластини. В усіх точках контуру пластини відсутнє розподілене моментне і поперечне навантаження. Наприклад, для $r=a$, $M_r(a)=0$, $Q_r(a)=0$.

2.2 На кромці пластини діє тільки зовнішнє розподілене моментне навантаження. Наприклад, для $r=a$, $M_r(a)=m$, $Q_r(a)=0$. Тут m – величина зовнішнього моментного навантаження в ньютонх.

2.3 На кромці пластини діє тільки зовнішнє розподілене поперечне навантаження. Наприклад, для кромки $r=a$, $M_r(a)=0$, $Q_r(a)=g$. Тут g – величина зовнішнього поперечного навантаження в Н/м.

3. *Змішані* граничні умови. У цьому випадку на кромці пластини задано комбінацію зовнішніх розподілених навантажень і лінійних переміщень. Тут можливі такі варіанти.

3.1 Шарнірно оперта кромка. В усіх точках кромки пластини одночасно відсутні лінійне переміщення і розподілене моментне навантаження. Наприклад, $r=a$, $w(a)=0$, $M_r(a)=0$.

3.2 На кромці пластини діє тільки розподілене моментне навантаження в ньютонх. Наприклад, для $r=a$, $M_r(a)=m$, $w(a)=0$.

3.3 Вертикальні переміщення всіх точок кромки пластини при одночасній відсутності розподіленого моментного навантаження. Наприклад, $r=a$, $w(a)=c$, $M_r(a)=0$.

3.4 Якщо в кільцевій пластині є кілька ділянок з різними геометричними або механічними характеристиками або відсутня гладкість і безперервність функції навантаження, то необхідно на границі суміжних ділянок забезпечити умови спільності деформацій і задовольнити умови рівноваги. Наприклад, при $r=c_i$ повинно виконуватись:

умова плавності кривої прогинів	$\varphi^{(k)}(c_i) = \varphi^{(k+1)}(c_i)$
умова нерозривності переміщень	$w^{(k)}(c_i) = w^{(k+1)}(c_i)$
умова рівності згинальних моментів	$M^{(k)}(c_i) = M^{(k+1)}(c_i)$
умова рівності поперечних сил	$Q^{(k)}(c_i) = Q^{(k+1)}(c_i)$

3.5 Якщо на границі між ділянками прикладено моментне навантаження m_k і поперечне навантаження p_i , то при $r=c_i$ повинно виконуватись:

умова плавності кривої прогинів	$\varphi^{(k)}(c_i) = \varphi^{(k+1)}(c_i)$
умова нерозривності переміщень	$w^{(k)}(c_i) = w^{(k+1)}(c_i)$
умова рівності згинальних моментів	$M^{(k)}(c_i) = M^{(k+1)}(c_i) + m_k$
умова рівності поперечних сил	$Q^{(k)}(c_i) = Q^{(k+1)}(c_i) + p_i$

6. Обчислення нормальних і дотичних напружень у розрахунках міцності кільцевих пластин

Коли функція прогинів відома, то нормальні напруження σ_r і σ_θ можуть бути обчислені за виразом (3.2), а дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ за виразом (3.5). Однак, якщо раніш уже були визначені функції згинальних моментів M_r і M_θ , а також визначена функція поперечної сили Q_r і, більш того, побудовано епюри зусиль, то можливо більш просте рішення. Дійсно, нормальні напруження σ_r і радіальний згинальний момент M_r визначаються виразами

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_r = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{12} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Розглядаючи їх спільно і виключаючи диференціальний оператор у першому за допомогою другого, одержимо формулу для визначення нормальних напружень σ_r . Аналогічно виводиться

формула для визначення нормальних напружень σ_r . Розмірність нормальних напружень $\text{Н}\cdot\text{м}/\text{м}^2 = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}$

$$\sigma_r = \frac{M_z}{h^3} z, \quad \sigma_\theta = \frac{M_\theta}{h^3} z. \quad (6.1)$$

Отримані вирази для нормальних напружень показують, що найбільше значення нормальні напруження досягають у точках на поверхні пластини. Якщо в цьому місці поверхневе навантаження відсутнє, то в пластині виникає плоский напружений стан. У цих точках і виконується перевірка міцності пластини за головними напруженнями.

Дотичні напруження τ_z і радіальна поперечна сила Q_z визначаються виразами

$$\tau_z(r) = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) S(z), \quad Q_z = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right).$$

Розглядаючи їх спільно і виключаючи диференціальний оператор у першому за допомогою другого, одержимо формулу для визначення дотичних напружень τ_z . Розмірність дотичних напружень $\text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}$

$$\tau_z = -\frac{Q_z S(z)}{Ih^3}. \quad (6.2)$$

Отримані вирази для дотичних напружень показують, що найбільшого значення вони досягають у точках на серединній поверхні пластини. У цих точках виконується перевірка міцності пластини по дотичних напруженнях.

7. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи на тему «Розрахунок кільцевої пластини на міцність і жорсткість»

При розрахунку на міцність і жорсткість пластин можливі наступні задачі.

1. Перевірка міцності і/або жорсткості пластини.

2. Визначення припустимої за міцністю або жорсткістю величини навантаження або величини переміщення кромки пластини.

3. Визначення величини коефіцієнта запасу за умовою міцності і/або жорсткості.

Усі задачі вимагають попереднього рішення крайової задачі для невідомої функції прогинів. Відмінна риса другої задачі полягає в тому, що невідома величина навантаження, що допускається, вводиться як параметр, що визначається після рішення крайової задачі. Рішенню крайової задачі передують обов'язкова перевірка відповідності геометричних параметрів пластини і прийнятим у лінійній теорії пластин обмеженням для тонких гнучких пластин. Це можливо виконати лише в перерахованих раніше задачах, коли цілком визначена геометрія пластини.

Крайова задача для невідомої функції прогинів вирішується в такій послідовності.

1. Обчислення величини циліндричної жорсткості пластини.

2. Визначення заданих на кромках пластини граничних умов для невідомої функції.

3. Складання системи рівнянь.

4. При наявності зовнішнього навантаження виведення формул для вільних членів системи лінійних алгебраїчних рівнянь і наступне обчислення їхніх значень.

5. Рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь з наступною перевіркою коренів.

6. Виведення формул, що визначають вид шуканих функцій переміщень і зусиль.

7. Задання сітки й обчислення значень функцій у вузлах сітки. Побудова епюр.

8. Перевірка виконання обмеження за величиною найбільшого прогину, що прийнята в лінійній теорії пластин.

9. За умови виконання обмежень на величину найбільшого прогину виконується рішення першої і третьої з перерахованих раніше задач.

10. При рішенні другої задачі спочатку, використовуючи задані в умові задачі обмеження за міцністю і/або жорсткістю, визначається шуканий параметр навантаження або переміщення, а потім уже виконується перевірка міцності і/або жорсткості пластини

8. Пластина, внутрішня кромка якої жорстко закріплена, а зовнішня вільна і навантажена розподіленим поперечним навантаженням

Задано кільцеву пластину, на внутрішній кромці якої є в'язі, що обмежують поворот і лінійне переміщення. Зовнішня кромка вільна від усяких в'язей і вздовж неї діє зовнішнє розподілене поперечне навантаження (рис.6). Товщина пластини $h = 0,02\text{м}$. Внутрішній радіус $a = 0,15\text{м}$, зовнішній радіус $b = 1,05\text{м}$. Матеріал пластини сплав алюмінію марки ДТ5. Модуль пружності $E = 70\text{ ГПа}$, коефіцієнт поперечної деформації $\mu = 0,3$. Нормальне напруження, що допускається, $\sigma_{\text{доп}} = 70\text{ МПа}$. Визначити за умовою

жорсткості пластини величину допустимого розподіленого поперечного навантаження, якщо допустимий відносний прогин не перевищує $1/200$. Побудувати епюри переміщень і зусиль. Перевірити міцність пластини.

Розв'язання задачі

Розподілене вздовж зовнішньої кромки поперечне навантаження невідоме. Розглянемо її величину як невідомий параметр і позначимо p_{adm} . Щоб визначити p_{adm} необхідно знайти найбільший прогин пластини w_{max} , як функцію цього параметра, і, використовуючи умову жорсткості, обчислити величину навантаження, що допускається. Для перебування w_{max} необхідно вирішити крайову задачу для невідомої функції прогинів $w(p_{\text{adm}}, r)$. Відомо, що прольот пластини $l = b - a = 1,05 - 0,15 = 0,9\text{ м}$ і відношення

$$\frac{h}{b-a} = \frac{0,02}{0,9} = \frac{1}{45}$$

задовольняє обмеженням для тонких пластин. Для визначення її напружено деформованого стану можна застосувати формули і методи лінійної теорії пластин.

Невідома функція прогинів пластини $w(p_{\text{adm}}, r)$ визначається формулою (4.2). Чотири постійні інтегрування X_1, X_2, X_3, X_4 визначаються граничними умовами задачі. На внутрішній кромці пластини є в'язі, що обмежують поворот і лінійне переміщення, тому при $r = aw(p_{\text{adm}}, a) = 0, \varphi(p_{\text{adm}}, a) = 0$.

Зовнішня кромка пластини вільна від усяких в'язей і вздовж неї діє тільки зовнішнє розподілене поперечне навантаження, тому

$$\text{при } r = bM_r(p_{\text{adm}}, b) = 0, Q_r(p_{\text{adm}}, b) = p_{\text{adm}}.$$

За допомогою формул (4.2), (4.4), (4.6) і (4.10) одержимо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$w(p_{\text{adm}}, a) = 0, \quad a^2 \ln(a) \cdot X_1 + a^2 \cdot X_2 + \ln(a) \cdot X_3 + X_4 + w(p_{\text{adm}}, a) = 0;$$

$$\begin{aligned}\varphi(p_{adm}, a) &= 0, & [2aln(a) + a] \cdot X_1 - 2a \cdot X_2 + \frac{1}{a} X_3 + \varphi(p_{adm}, a) &= 0; \\ M_r(p_{adm}, b) &= 0, & -D[2(1+\mu)ln(b) + 3 + \mu] \cdot X_1 - 2D(1+\mu)X_2 - D \times \\ & \times \frac{\mu-1}{b^2} X_3 + M_r(p_{adm}, b) &= 0; \\ Q_r(p_{adm}, b) &= p_{adm}, & \frac{4D}{b} X_1 + \bar{Q}_r(p_{adm}, r) &= p_{adm}.\end{aligned}$$

Розподілене по поверхні пластини поперечне навантаження відсутнє, тому вільні члени перших трьох рівнянь рівні нулю. Обчислимо значення коефіцієнтів і запишемо систему рівнянь у вигляді табл. 8.1

Таблиця 8.1

Номер рівняння	X_1	X_2	X_3	X_4	$= 1$
1	$-0,42622 \cdot 10^{-1}$	$0,225 \cdot 10^{-1}$	$-1,8943$	1	0
2	$-0,4183$	0,3	6,6667	0	0
3	$-0,34323 \cdot 10^6$	$-0,26042 \cdot 10^6$	$0,63594 \cdot 10^5$	0	0
4	$-0,38156 \cdot 10^6$	0	0	0	p_{adm}

Система рівнянь параметрична. Її корені залежать від значення параметра p_{adm} . Значення першого невідомого визначається рішенням четвертого рівняння

$$X_1 = -2,62082 \cdot 10^{-6} p_{adm}.$$

Після його підстановки в друге і третє рівняння для визначення невідомих X_2, X_3 одержимо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь (табл. 8.2)

Таблиця 8.2

Номер рівняння	X_2	X_3	1
2	0,3	6,6667	$-1,09628 \cdot 10^{-6} p_{adm}$
3	$-0,26042 \cdot 10^6$	$0,63594 \cdot 10^5$	$-8,99544 \cdot 10^{-1} p_{adm}$

Корені цієї системи $X_2 = 0,3377 \cdot 10^{-5} p_{adm}$, $X_3 = -0,31641 \times 10^{-6} p_{adm}$. Невідоме X_4 визначається рішенням першого рівняння $X_4 = -0,7871 \cdot 10^{-6} p_{adm}$. Перевірка коренів системи рівнянь дає такі результати. Абсолютний відхил першого рівняння системи дорівнює $-0,56843 \cdot 10^{-13} p_{adm}$. Відхил другого і третього рівнянь системи дорівнює відповідно $0,164 \cdot 10^{-12} p_{adm}$ і $0,1213 \cdot 10^{-7} p_{adm}$. Відхил четвертого рівняння системи дорівнює нулю. Найбільший відносний відхил менше $1,3 \cdot 10^{-5} \%$. Це значить, що система лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язана вірно.

Підставляючи знайдені значення коренів у формулу (4.2), одержимо функцію прогинів

$$w(p_{adm}, r) = -0,2621 \cdot 10^{-5} p_{adm} r^2 \ln(r) + 0,3377 \cdot 10^{-5} p_{adm} r^2 - 0,3164 \times 10^{-6} p_{adm} \ln(r) - 0,7871 \cdot 10^{-6} p_{adm}$$

Для визначення найбільшого прогину розділимо прольот на шість рівних частин і обчислимо значення функції в точках розподілу. Результати представимо у вигляді табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Номер точки	r	$w(p_{adm}, r)$
1	0,15	0
2	0,3	$0,1818 \cdot 10^{-6} p_{adm}$
3	0,45	$0,5732 \cdot 10^{-6} p_{adm}$
4	0,6	$0,1072 \cdot 10^{-5} p_{adm}$
5	0,75	$0,1628 \cdot 10^{-5} p_{adm}$
6	0,9	$0,2205 \cdot 10^{-5} p_{adm}$
7	1,05	$0,278 \cdot 10^{-5} p_{adm}$

Найбільше значення функція прогинів досягається при $r = b w_{max}(p_{adm}, b) = 0,278 \cdot 10^{-5} p_{adm}$. За умовою жорсткості ця величина повинна бути обмежена величиною допустимого прогину $w_{adm} = (b-a)/200 = 4,5 \cdot 10^{-3}$ м. Підставивши в умову жорсткості

$w_{max} \leq w_{adm}$, отримані вирази і замінивши нестрогу нерівність на рівність, одержимо рівняння для визначення шуканої величини допустимого навантаження, $0,278 \cdot 10^{-5} p_{adm} = 4,5 \cdot 10^{-3}$. Його рішення $p_{adm} = 1,618$ кН/м визначить величину розподіленого по кромці навантаження, при якій найбільший відносний прогин у пластині дорівнює 1/200. Приймаємо $p = 1,6$ кН/м. Це дозволяє визначити функції переміщення і зусиль, що визначають напружено деформований стан пластини.

Функція прогинів $w(r) = -0,41933 \cdot 10^{-2} r^2 \ln(r) + 0,54032 \times 10^{-2} r^2 - 0,50625 \cdot 10^{-3} \ln(r) - 0,12593 \cdot 10^{-2}$.

Функція кута повороту $\varphi(r) = -0,41933 \cdot 10^{-2} [2r \ln(r) + r] + 1,0806 \times 10^{-2} r - 0,50625 \cdot 10^{-3} / r$.

Функція радіального згин. моменту $M_r(r) = 4,2 \cdot 10^3 [2,6 \ln(r) + 3,3] - 1,4071 \cdot 10^3 - 3,5494 \cdot 10^3 / r^2$.

Функція колового згин. моменту $M_\theta(r) = 4,2 \cdot 10^3 [2,6 \ln(r) + 1,9] - 1,4071 \cdot 10^3 + 3,5494 \cdot 10^3 / r^2$.

Функція радіальної поперечної сили $Q_r(r) = 1,68 \cdot 10^3 / r$.

Для побудови епюр прогинів і зусиль (рис. 6) розділимо прольот на шість рівних частин і обчислимо значення функцій в точках розподілу. Обчислення функцій $w(r)$, $\varphi(r)$, $M_r(r)$, $M_\theta(r)$, $Q_r(r)$ виконане на МК "Casio" fx-570W, (див. розділ 12), де як приклад складена програма обчислення функцій кута повороту й обчислене її значення в точці $r=0,7$ м. Результати обчислень, отримані на МК "Casio", округлюються. Зберігаються принаймні три знаки мантиси числа. Результати обчислення значень функцій представлені в табл. 8.4

Таблиця 8.4

Номер точки розподілу	$r, \text{ м}$	$w(r), \text{ м}$	$dw/dr, \text{ рад}$	$M_r(r), \text{ кНм}$	$M_\theta(r), \text{ кНм}$	$Q_r(r), \text{ кН}$
1	0,15	0	0	-3,667	-1,1	11,2
2	0,3	$0,2909 \cdot 10^{-3}$	$3,325 \cdot 10^{-3}$	-1,73	-1,529	5,6
3	0,45	$0,9171 \cdot 10^{-3}$	$4,864 \cdot 10^{-3}$	-1,068	-1,306	3,733
4	0,6	$1,716 \cdot 10^{-3}$	$5,695 \cdot 10^{-3}$	-0,677	-1,068	2,8
5	0,75	$2,604 \cdot 10^{-3}$	$6,094 \cdot 10^{-3}$	-0,398	-0,86	2,24
6	0,9	$3,528 \cdot 10^{-3}$	$6,185 \cdot 10^{-3}$	-0,18	-0,68	1,867
7	1,05	$4,447 \cdot 10^{-3}$	$6,032 \cdot 10^{-3}$	0	-0,5236	1,6

Побудована еюра прогинів дозволяє визначити циліндричний перетин $r=b$, де функція $w(r)$ досягає найбільшого значення $w_{max} = 4,447 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 6). Відношення найбільшого абсолютного прогину до товщини пластини, що характеризує жорсткість гнучких тонких пластин, не виконується. Похибка складає близько 10%.

$$\frac{w_{max}}{h} = \frac{4,447 \cdot 10^{-3}}{0,02} = \frac{1}{4,49} > \frac{1}{5}$$

Формально слід відмовитися від подальшого розрахунку пластини за лінійною теорією вигину пластини перейти до розрахунку за нелінійною теорією. Однак, якщо можна погодитися з такою величиною похибки при оцінці жорсткості гнучкої тонкої пластини, то розрахунок варто продовжити.

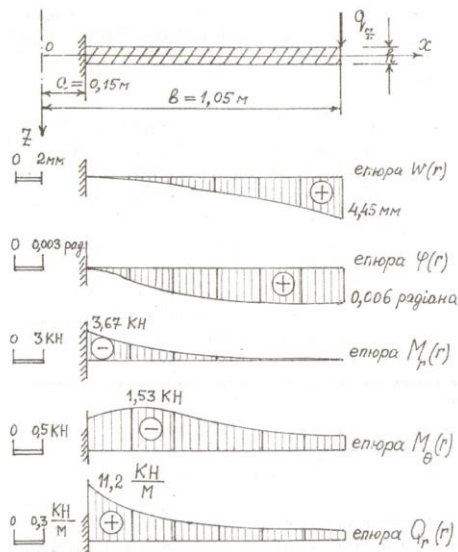


Рис. 6

Побудовані епюри зусиль дозволяють визначити небезпечний циліндричний перетин $r=a$, де функція радіального згинального моменту досягає найбільшого значення. На верхній площині пластини в точці з координатами $r=a$ і $z=-h/2$ виникають напруження

$$\sigma_1(a, -h/2) = \frac{6M_z}{h^2} = \frac{6 \cdot 3,667 \cdot 10^3}{0,025^2} = 35,2 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2(a, -h/2) = \frac{6M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 1,1 \cdot 10^3}{0,025^2} = 10,56 \text{ МПа}.$$

У цій точці дотичні напруження в площині пластини відсутні, тому радіальні й колові нормальні напруження одночасно є головними

$$\sigma_1 = \sigma_2(a, -h/2) = 35,2 \text{ МПа}, \sigma_3 = \sigma(a, -h/2) = 10,56 \text{ МПа}, \sigma_4 = 0.$$

ДТ – 5пластичний матеріал. Перевірку міцності варто робити за третьою теорією міцності

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 35,2 - 0 = 35,2 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 70 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується. У перетині $r=a$ функція поперечної сили досягає найбільшого значення $Q_r(a) = 11,2 \text{ кН/м}$. Перевірку міцності по дотичних напруженнях τ_{rz} (див. формулу (6.2)) слід робити в точці з координатами $r=a$ і $z=0$, де вони досягають максимуму

$$\tau_{max} = \tau_{rz}(a, 0) = -\frac{Q_r S(0)}{h^2} = -\frac{3}{2} \frac{Q_r}{h} = \frac{3 \cdot 11,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,025} =$$

$$= 0,672 \text{ МПа} < \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2} = 35 \text{ МПа}$$

Умова міцності по дотичних напруженнях виконується.

Перевірку жорсткості пластини слід проводити в перетині $r=b$, де $w_{max} = 4,447 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Допустимий прогин $w_{adm} = (b-a)/200 = 0,9/200 = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Умова жорсткості пластини виконується $w_{max} = 4,447 \cdot 10^{-3} \text{ м} < w_{adm} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

9. Пластина, зовнішня кромка якої прикріплена шарнірно, внутрішня жорстко закріплена в центральному абсолютно твердому диску і переміщується разом з ним

Задано кільцеву пластину, на внутрішній кромці якої є в'язі, що обмежують її поворот і не перешкоджають вертикальному лінійному переміщенню. Зовнішня кромка прикріплена шарнірно (рис.7). Товщина пластини $h=0,03 \text{ м}$. Внутрішній радіус $a=0,03 \text{ м}$, зовнішній радіус $b=0,85 \text{ м}$. Матеріал пластини чавун сірий. Модуль пружності чавуна $E=120 \text{ ГПа}$, коефіцієнт поперечної деформації $\mu=0,23$. Нормальне допустиме напруження на розтяг $\sigma_{adm,t} = 70 \text{ МПа}$, а на стиск $\sigma_{adm,c} = 120 \text{ МПа}$. Потрібно визначити за умовою міцності пластини величину допустимого лінійного переміщення диска. Побудувати епюри переміщень і зусиль. Перевірити міцність і жорсткість пластини.

Розв'язання задачі

Величина вертикального лінійного переміщення диска невідома. Розглянемо величину лінійного переміщення диска як невідомий параметр і позначимо його як Δ_{adm} . Щоб визначити Δ_{adm} , необхідно знайти найбільше нормальне напруження σ_{max} як функцію цього параметра, і, використовуючи умову міцності, обчислити допустиму величину лінійного переміщення диска. Для визначення нормального напруження потрібно знати згинальний момент, що виражається через першу і другу похідні функції прогинів. Для знаходження $w(\Delta_{adm}, r)$ необхідно вирішити крайову задачу. Відомо, що проліт пластини $l = b - a = 0,85 - 0,03 = 0,82 \text{ м}$ відношення

$$\frac{h}{b-a} = \frac{0,03}{0,82} = \frac{1}{27,333}$$

задовольняє обмеженням для тонких пластин. Для визначення її напружено деформованого стану можна застосувати формули і методи лінійної теорії пластин.

Невідома функція прогинів пластини $w(\Delta_{adm}, r)$ визначається формулою (4.2). Чотири постійні інтегрування X_1, X_2, X_3, X_4 визначаються граничними умовами задачі. На внутрішній кромці пластини є в'язі, що обмежують поворот кромки і не перешкоджають лінійному переміщенню, тому

$$\text{при } r=a: w(\Delta_{adm}, a) = \Delta_{adm}, \varphi(\Delta_{adm}, a) = 0.$$

Зовнішня кромка пластини шарнірно оперта, тому

$$\text{при } r=b: w(\Delta_{adm}, b) = 0, \varphi(\Delta_{adm}, b) = 0.$$

За допомогою формул (4.2), (4.6), (4.2) і (4.4) одержимо систему з чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} w(\Delta_{adm}, a) &= \Delta_{adm}, & a^2 \ln(a) \cdot X_1 + a^2 \cdot X_2 + \ln(a) \cdot X_3 + X_4 + \bar{w}(\Delta_{adm}, a) &= \Delta_{adm}; \\ M_r(\Delta_{adm}, a) &= 0, & -D[2(1+\mu) \ln(a) + 3 + \mu] \cdot X_1 - 2D(1+\mu) X_2 - D \frac{b-a}{a^2} X_3 + \\ & & + M_r(\Delta_{adm}, a) &= 0; \\ w(\Delta_{adm}, b) &= 0, & b^2 \ln(b) \cdot X_1 + b^2 \cdot X_2 + \ln(b) \cdot X_3 + X_4 + \bar{w}(\Delta_{adm}, b) &= 0; \\ \varphi(\Delta_{adm}, b) &= 0, & [2b \ln(b) + b] \cdot X_1 + 2b \cdot X_2 + \frac{1}{b} X_3 + \bar{\varphi}(\Delta_{adm}, b) &= 0. \end{aligned}$$

Розподілене по поверхні пластини поперечне навантаження відсутнє, тому вільні члени останніх трьох рівнянь дорівнюють нулю. Обчислимо значення коефіцієнтів рівнянь і запишемо систему у вигляді табл. 9.1

Таблиця 9.1

Номер рівняння	X_1	X_2	X_3	X_4	$=1$
1	$-0,28964 \cdot 10^{-2}$	$0,9 \cdot 10^{-3}$	$-3,2183$	1	Δ_{adm}
2	$-0,16309$	0,06	$33,3333$	0	0
3	$-0,11742$	0,7225	$-0,16252$	1	0
4	$-0,80684 \cdot 10^6$	$-0,7013 \cdot 10^6$	$0,30382 \cdot 10^6$	0	0

Система рівнянь параметрична. Її корені залежать від значення параметра Δ_{adm} . Рішення системи, виконане шляхом послідовного зиключення невідомих (метод Гаусса), дає такі корені

$$X_1 = 1,08545 \cdot \Delta_{adm}, X_2 = -1,24552 \cdot \Delta_{adm},$$

$$X_3 = 0,75529 \cdot 10^{-2} \cdot \Delta_{adm}, X_4 = 1,02857 \cdot \Delta_{adm}.$$

Перевірка коренів системи рівнянь дає наступні результати. Абсолютний відхил першого рівняння системи дорівнює нулю. Відхил другого, третього і четвертого рівнянь системи дорівнює відповідно $-0,37292 \cdot 10^{-7} \cdot \Delta_{adm}$, $-0,11921 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta_{adm}$ і $-0,78944 \cdot 10^{-1} \cdot \Delta_{adm}$. Найбільший відносний відхил менше $3 \cdot 10^{-5} \%$. Це значить, що система лінійних алгебраїчних рівнянь вирішена вірно.

Підставляючи знайдені значення коренів X_1, X_2, X_3, X_4 у (4.6), одержимо формулу радіального згинального моменту в пластині

$$M_r(\Delta_{adm}, r) = -3,0944 \cdot 10^5 \cdot \Delta_{adm} [2,46 \ln(r) + 3,23] +$$

$$+ 8,7348 \cdot 10^5 \cdot \Delta_{adm} + \frac{1,65795 \cdot 10^5}{r^2} \cdot \Delta_{adm}.$$

Підставляючи знайдені значення коренів X_1, X_2, X_3, X_4 у (4.8), одержимо формулу колового моменту в пластині

$$M_\theta(\Delta_{adm}, r) = -3,0944 \cdot 10^5 \cdot \Delta_{adm} [2,46 \ln(r) + 1,69] +$$

$$+ 8,7348 \cdot 10^5 \cdot \Delta_{adm} - \frac{1,65795 \cdot 10^5}{r^2} \cdot \Delta_{adm}.$$

38

Для обчислення значень $M_r(\Delta_{adm}, r)$ і $M_\theta(\Delta_{adm}, r)$ розділимо прольот на вісім рівних частин і обчислимо значення функцій в точках розподілу. Результати представимо у вигляді табл. 9.3.

Таблиця 9.3

Номер точки	r	$M_r(\Delta_{adm}, r)$	$M_\theta(\Delta_{adm}, r)$
1	0,03	$0,4166 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}$	$0,95817 \cdot 10^5 \cdot \Delta_{adm}$
2	0,133	$0,15031 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}$	$0,17907 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}$
3	0,235	$0,10063 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}$	$0,14228 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}$
4	0,338	$0,71538 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$	$0,11628 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}$
5	0,44	$0,50751 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$	$0,96692 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$
6	0,543	$0,34516 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$	$0,81044 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$
7	0,645	$0,21178 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$	$0,68035 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$
8	0,748	$0,98491 \cdot 10^5 \cdot \Delta_{adm}$	$0,56909 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$
9	0,85	0	$0,47195 \cdot 10^6 \cdot \Delta_{adm}$

Найбільшого значення функція радіального згинаючого моменту досягає при $r=a$, де $M_r(\Delta_{adm}, a) = 0,4166 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}$. У точці з координатами $r=a, z=h/2$ виникає найбільше радіальне нормальне розтяжне напруження (див. формулу (6.1))

$$\sigma_r(a, \frac{h}{2}) = \frac{6 \cdot M_r}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,4166 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}}{0,03^2} = 2,7773 \cdot 10^9 \cdot \Delta_{adm}.$$

У точці з координатами $r=a, z=-h/2$ виникає найбільше стискує радіальне нормальне напруження

$$\sigma_r(a, \frac{h}{2}) = \frac{6 \cdot M_r}{h^2} = -\frac{6 \cdot 0,4166 \cdot 10^7 \cdot \Delta_{adm}}{0,03^2} = -2,7773 \cdot 10^9 \cdot \Delta_{adm}.$$

Чавун – крихкий матеріал, що по-різному опирається розтягання і стиску. Величина допустимого напруження на розтяг менше, ніж на стиск $\sigma_{adm,t} < \sigma_{adm,c}$. Тому умову міцності варто перевіряти в точці з координатами $r=a, z=h/2$ для розтяжних напружен-

39

нями. Умова міцності за першою теорією міцності вимагає, щоб величина найбільшого розтяжного напруження, не перевищувала величини допустимого напруження

$$\sigma_r(a, \frac{h}{2}) = 2,7773 \cdot 10^9 \cdot \Delta_{adm} \leq \sigma_{adm,t} = 70 \text{ МПа}.$$

Замінивши нестрогу нерівність на рівність, одержимо рівняння для визначення шуканої величини допустимого переміщення

$$2,7773 \cdot 10^{10} \cdot \Delta_{adm} = 70 \cdot 10^6.$$

Величина допустимого переміщення дорівнює $\Delta_{adm} = 2,52 \cdot 10^{-3}$ м. Приймемо $\Delta_{adm} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м. Це дозволяє визначити функції переміщення і зусиль, що визначають напружено деформований стан пластини.

Функція прогинів

$$w(r) = 2,7136 \cdot 10^{-3} \cdot r^2 \ln(r) - 3,1138 \cdot 10^{-3} \cdot r^2 + 1,8882 \cdot 10^{-3} \ln(r) + 2,5714 \cdot 10^{-3}.$$

Функція кута повороту

$$\varphi(r) = 2,7136 \cdot 10^{-3} [2r \ln(r) + r] - 6,2276 \cdot 10^{-3} \cdot r + 1,8882 \cdot 10^{-3} r.$$

Функція радіального згинального моменту

$$M_r(r) = -7,7338 \cdot 10^2 [2,46 \ln(r) + 3,23] + 2,1837 \cdot 10^3 + 4,1448/r^2.$$

Функція колового згинального моменту

$$M_\theta(r) = -7,7338 \cdot 10^2 [2,46 \ln(r) + 1,69] + 2,1837 \cdot 10^3 - 4,1448/r^2.$$

Функція радіальної поперечної сили

$$Q(r) = -3,0944 \cdot 10^3 / r.$$

Для побудови епюр переміщення і зусиль (рис. 7) розділимо прольот на вісім рівних частин і обчислимо значення функцій в точках розподілу. Результати представимо у вигляді табл. 9.4.

40

Таблиця 9.4

Номер точки розподілу	r , м	$w(r)$, м	dw/dr , радіани	$M_r(r)$, кНм	$M_\theta(r)$, кНм	$Q(r)$, кН
1	0,03	$2,50 \cdot 10^{-3}$	0	10,41	2,395	-103,15
2	0,133	$2,383 \cdot 10^{-3}$	$-1,773 \cdot 10^{-3}$	3,758	4,477	-23,354
3	0,235	$2,155 \cdot 10^{-3}$	$-2,592 \cdot 10^{-3}$	2,516	3,557	-13,168
4	0,338	$1,86 \cdot 10^{-3}$	$-3,12 \cdot 10^{-3}$	1,788	2,907	-9,168
5	0,44	$1,522 \cdot 10^{-3}$	$-3,464 \cdot 10^{-3}$	1,269	2,417	-7,033
6	0,543	$1,155 \cdot 10^{-3}$	$-3,672 \cdot 10^{-3}$	0,863	2,026	-5,704
7	0,645	$0,7727 \cdot 10^{-3}$	$-3,772 \cdot 10^{-3}$	0,529	1,7	-4,797
8	0,748	$0,3848 \cdot 10^{-3}$	$-3,782 \cdot 10^{-3}$	0,246	1,423	-4,14
9	0,85	0	$-3,714 \cdot 10^{-3}$	0	1,18	-3,46

Побудована епора прогинів дозволяє визначити циліндричний перетин $r=a$, де функція $w(r)$ досягає найбільшого значення $w_{max} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 7). Відношення найбільшого абсолютного прогину до товщини пластини, що характеризує жорсткість гнучких тонких пластин, виконується

$$\frac{w_{max}}{h} = \frac{0,25 \cdot 10^{-2}}{0,03} = \frac{1}{12} < \frac{1}{5}.$$

Побудовані епюри зусиль дозволяють досліджувати зміну згинальних моментів у кільцевій пластині. У небезпечному циліндричному перетині при $r=a$ функція радіального згинаючого моменту досягає найбільшого значення $M_r(r) = 10,415 \frac{\text{кНм}}{\text{м}}$. У цьому перетині в точці $r=b$ і $z=h/2$ виникає найбільше радіальне розтяжне напруження

$$\sigma_{max} = \sigma_r(a, h/2) = \frac{6 M_r}{h^2} = \frac{6 \cdot 10,415 \cdot 10^3}{0,03^2} = 69,33 \text{ МПа}$$

41

і колові нормальні напруження

$$\sigma_{\theta}(b, h/2) = \frac{6M_{\theta}}{h^2} = \frac{6 \cdot 2,393 \cdot 10^3}{0,03^2} = 16,0 \text{ МПа.}$$

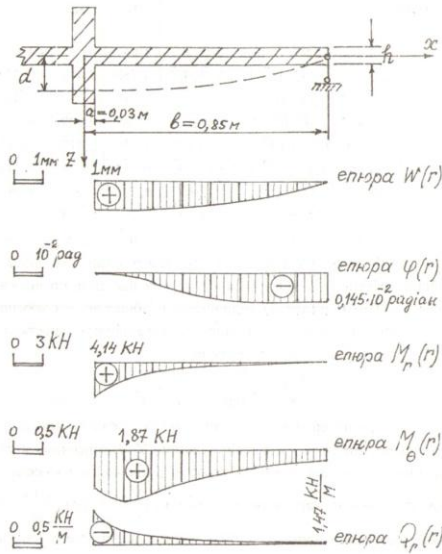


Рис. 7

У цій точці дотичні напруження в площині пластини відсутні. Тому радіальні й колові нормальні напруження одночасно є головними

$$\sigma_1 = \sigma_{\theta}(b, h/2) = 69,33 \text{ МПа}, \sigma_2 = \sigma_{\theta}(b, h/2) = 16,0 \text{ МПа}, \sigma_3 = 0.$$

Чавун – крихкий матеріал, що неоднаково чинить опір на розтягання і стиснення $\sigma_{adm,t} < \sigma_{adm,c}$. Тому умову міцності по нормальних напругах варто перевіряти за першою теорією міцності у точках з координатами $r=b, z=h/2$, де діють напруги, що розтягують

$$\sigma_{max} = 69,33 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 70 \text{ МПа.}$$

Умова міцності по нормальних напругах виконується. У перетині $r=a$ функція поперечної сили також досягає найбільшого значення $Q_r(a) = -103,15 \text{ кН/м}$. Найбільші дотичні напруження будуть на рівні серединної площини при $z=0$, де вони досягають максимуму (див. формулу (6.2)). В околі цієї точки в діаметральній площині виникає плоский напружений стан чистого зсуву.

Перевірка міцності по дотичних напруженнях виконується

$$\tau_{max} = \tau_{\nu}(a,0) = -\frac{Q_r(0)}{1 \cdot h} = -\frac{3}{2} \frac{Q_r}{h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{103,15 \cdot 10^3}{0,03} = 5,15 \text{ МПа} < \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2} = 35 \text{ МПа.}$$

Перевірка жорсткості пластини виконується в циліндричному перетині $r=a$, де найбільший прогин пластини $w_{max} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Абсолютний допустимий прогин дорівнює $w_{adm} = (b-a)/200 = 0,82/200 = 0,41 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Умова жорсткості пластини виконується $w_{max} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м} < w_{adm} = 0,41 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

10. Пластина, внутрішня кромка якої шарнірно оперта, зовнішня жорстко закріплена і навантажена по всій площині рівномірно розподіленим поперечним навантаженням

Задано кільцеву пластину, на внутрішній кромці якої є в'язі, що обмежують тільки вертикальні лінійні переміщення. На зовнішній кромці є в'язі, що обмежують кут повороту і вертикальні лінійні переміщення (рис.8). Товщина пластини $h=0,024 \text{ м}$. Внутрішній радіус $a=0,3 \text{ м}$, зовнішній радіус $b=1,5 \text{ м}$. Матеріал пластини текстоліт. Модуль пружності $E=30 \text{ ГПа}$, коефіцієнт поперечної деформації $\mu=0,25$. Нормальне допустиме напруження, на розтяг $\sigma_{adm,t} = 15 \text{ МПа}$, а на стиск $\sigma_{adm,c} = 30 \text{ МПа}$. Відносний допустимий прогин неповинний перевищувати $1/200$. Пластина навантажена по всій площині рівномірно розподіленим поперечним навантаженням. Потрібно визначити величину поперечного допустимого навантаження, щоб одночасно виконувалися умови міцності і жорсткості пластини. Побудувати епюри переміщень і зусиль. Перевірити міцність і жорсткість пластини.

Розв'язання задачі

Величина рівномірно розподіленого поперечного навантаження невідома. Розглянемо її як невідомий параметр і позначимо його q_{adm} . Щоб визначити q_{adm} , необхідно знати найбільший прогин пластини і величину найбільшого нормального напруження σ_{max} як функцію цього параметра. Далі, використовуючи умову міцності і жорсткості, можна одержати систему двох нестрогих нерівностей. Загальний корінь системи і визначить величину q_{adm} . Для цього необхідно вирішити крайову задачу для невідомої функції прогинів $w(q_{adm}, r)$. Відомо, що прольот пластини $l = b-a = 1,5 - 0,3 = 1,2 \text{ м}$ і відношення

$$\frac{h}{b-a} = \frac{0,024}{1,2} = \frac{1}{50}$$

задовольняє обмеженням для тонких пластин. Для визначення її напружено деформованого стану можна застосувати формули і методи лінійної теорії пластин.

Невідома функція прогинів пластини $w(q_{adm}, r)$ визначається формулою (4.2). Чотири постійні інтегрування X_1, X_2, X_3, X_4 визначаються граничними умовами задачі. На внутрішній кромці пластини є в'язі, що обмежують її вертикальні лінійні переміщення, тому

$$\text{при } r=a \quad w(q_{adm}, a)=0, \quad M_r(q_{adm}, a)=0.$$

На зовнішній кромці пластини є в'язі, що обмежують кут повороту і лінійні переміщення, тому

$$\text{при } r=b \quad w(q_{adm}, b)=0, \quad \varphi(q_{adm}, b)=0.$$

За допомогою формул (4.2), (4.6), (4.2) і (4.4) одержимо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} w(q_{adm}, a)=0, & \quad a^2 \ln(a) X_1 + a^2 X_2 + \ln(a) X_3 + X_4 + \bar{w}(q_{adm}, a)=0; \\ M_r(q_{adm}, a)=0, & \quad -D[2(1+\mu) \ln(a) + 3 + \mu] X_1 - 2D(1+\mu) X_2 - D \frac{1-\mu}{a} X_3 + \\ & \quad + \bar{M}_r(q_{adm}, a)=0; \\ w(q_{adm}, b)=0, & \quad b^2 \ln(b) X_1 + b^2 X_2 + \ln(b) X_3 + X_4 + \bar{w}(q_{adm}, b)=0; \\ \varphi(q_{adm}, b)=0, & \quad [2b \ln(b) + b] X_1 + 2b X_2 + \frac{1}{b} X_3 + \bar{\varphi}(q_{adm}, b)=0. \end{aligned}$$

Необхідно обчислити вільні члени рівнянь, які залежать від виду функції навантаження. По поверхні пластини діє рівномірно розподілене поперечне навантаження, тому функція навантаження постійна $q_r(r)=q_{adm}$.

Вільний член першого рівняння. Окремі рішення (4.3)

$$\bar{w}(r) = \frac{1}{D} \int_r^1 \int_r^1 (1/r) q_r(r) dr dr = \frac{q_{adm}}{D} \int_r^1 \int_r^1 (1/r) dr dr = \frac{q_{adm}}{D} \left(\frac{1}{2} \ln^2 r \right)$$

може бути знайдене за схемою послідовного інтегрування. Обчислимо внутрішній інтеграл $\int r dr = \frac{r^2}{2}$, розділивши результат на r , інтегруємо ще раз $\int \frac{r^2}{2} dr = \frac{r^3}{6}$. Множачи результат на r і інтегруючи ще раз, одержимо $\int \frac{r^3}{6} dr = \frac{r^4}{24}$. Розділивши результат на r , інтегруємо ще раз $\int \frac{r^3}{24} dr = \frac{r^4}{96}$. Остаточний вигляд окремого рішення функції прогинів має такий вигляд

$$\overline{w(r)} = \frac{q_{adm}}{D} \frac{r^4}{64}. \quad (10.1)$$

При $r=a$ одержимо вираз вільного члена першого рівняння

$$\overline{w(a)} = \frac{q_{adm}}{D} \frac{a^4}{64}.$$

Перша похідна від функції прогинів (10.1) є функцією кута повороту

$$\overline{\varphi(r)} = \frac{dw(r)}{dr} = \frac{q_{adm}}{D} \frac{r^3}{16}. \quad (10.2)$$

При $r=a$ одержимо вираз вільного члена четвертого рівняння

$$\overline{\varphi(a)} = \frac{q_{adm}}{D} \frac{a^3}{16}.$$

Друга похідна від функції прогинів (10.1)

$$\frac{d^2 \overline{w(r)}}{dr^2} = \frac{q_{adm}}{D} \frac{3r^2}{16}. \quad (10.3)$$

Підставляючи результати в (4.7), одержимо формулу для функції радіального згинального моменту

$$\overline{M_r(r)} = -D \left(\mu \frac{d^2 \overline{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\overline{w}}{dr} \right) = -\frac{q_{adm}}{16} (3 + \mu) r^2. \quad (10.4)$$

46

При $r=b$ одержимо вираз для вільного члена другого рівняння

$$\overline{M_r(a)} = -\frac{q_{adm}}{16} (3 + \mu) b^2.$$

Вільний член третього рівняння одержимо при підстановці $r=by$ (10.1)

$$\overline{w(b)} = \frac{q_{adm}}{D} \frac{b^4}{64}.$$

Обчисливши значення коефіцієнтів і вільних членів і підставивши їхні значення в систему лінійних алгебраїчних рівнянь, запишемо її у вигляді табл. 10.1

Таблиця 10.1

Номер рівняння	X_1	X_2	X_3	X_4	$= 1$
1	-0,10836	0,09	-1,204	1	$-0,3433 \cdot 10^{-8} q_{adm}$
2	$-0,88514 \cdot 10^{-4}$	$-0,9216 \cdot 10^{-5}$	$0,3072 \cdot 10^{-6}$	0	$0,1828 \cdot 10^{-4} q_{adm}$
3	0,9123	2,25	0,4055	1	$-0,2146 \cdot 10^{-3} q_{adm}$
4	2,7164	3	0,6667	0	$-0,5722 \cdot 10^{-5} q_{adm}$

Система рівнянь параметрична. Її корені залежать від значення параметра q_{adm} . Рішення системи виконано шляхом послідовного виключення невідомих (метод Гаусса). Значення коренів $X_1 = -0,2114 \cdot 10^{-5} q_{adm}$, $X_2 = 0,6636 \cdot 10^{-8} q_{adm}$, $X_3 = 0,5901 \cdot 10^{-5} q_{adm}$, $X_4 = -0,2324 \cdot 10^{-6} q_{adm}$.

Перевірка коренів системи рівнянь дає такі результати. Абсолютний відхил другого рівняння системи дорівнює нулю. Відхил першого, третього і четвертого рівнянь системи рівний відповідно

$$0,1288 \cdot 10^{-13} q_{adm}, -0,4547 \cdot 10^{-12} q_{adm}, -0,4541 \cdot 10^{-12} q_{adm}.$$

47

Найбільший відносний відхил менше $2 \cdot 10^{-5} \%$. Це значить, що система лінійних алгебраїчних рівнянь вирішена вірно.

Підставляючи знайдені значення коренів у формулу (4.2), одержимо функцію прогинів

$$\overline{w(q_{adm}, r)} = -0,2114 \cdot 10^{-5} q_{adm} r^2 \ln(r) + 0,6636 \cdot 10^{-8} q_{adm} r^2 - 0,5901 \cdot 10^{-5} q_{adm} \ln(r) - 0,2324 \cdot 10^{-6} q_{adm} + 4,23855 \cdot 10^{-7} q_{adm} r^4.$$

Підставляючи знайдені значення коренів X_1, X_2, X_3, X_4 у (4.6), одержимо формулу для функції радіального згинального моменту в пластині

$$\overline{M_r(q_{adm}, r)} = 7,793 \cdot 10^{-2} q_{adm} [2,5 \ln(r) + 3,25] - 6,1157 \cdot 10^{-4} q_{adm} + \frac{1,6312 \cdot 10^{-5}}{r^2} q_{adm} - 0,20312 q_{adm} r^2.$$

Підставляючи вирази першої (10.2) і другої (10.3) похідної у (4.9), одержимо окреме рішення функції колового моменту

$$\overline{M_\theta(r)} = -D \left(\mu \frac{d^2 \overline{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\overline{w}}{dr} \right) = -\frac{q_{adm}}{16} (3 + \mu) r^2. \quad (10.5)$$

Підставляючи знайдені значення коренів X_1, X_2, X_3, X_4 у (4.8), одержимо формулу колового моменту в пластині

$$\overline{M_\theta(q_{adm}, r)} = 7,793 \cdot 10^{-2} q_{adm} [2,5 \ln(r) + 1,75] - 6,1157 \cdot 10^{-4} q_{adm} - \frac{1,6312 \cdot 10^{-5}}{r^2} q_{adm} - 0,1094 q_{adm} r^2.$$

Для визначення найбільших значень функцій $\overline{w(q_{adm}, r)}$, $\overline{M_r(q_{adm}, r)}$, $\overline{M_\theta(q_{adm}, r)}$ розділимо прольот на шість рівних частин і обчислимо значення функцій у точках розподілу. Результати представимо у вигляді табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Номер точки	r	$\overline{w(q_{adm}, r)}$	$\overline{M_r(q_{adm}, r)}$	$\overline{M_\theta(q_{adm}, r)}$
1	0,3	0	0	$-10,882 \cdot 10^{-2} q_{adm}$

48

Продовження табл. 10.2

Номер точки	r	$\overline{w(q_{adm}, r)}$	$\overline{M_r(q_{adm}, r)}$	$\overline{M_\theta(q_{adm}, r)}$
2	0,5	$1,617 \cdot 10^{-7} q_{adm}$	$6,69 \cdot 10^{-2} q_{adm}$	$-2,668 \cdot 10^{-2} q_{adm}$
3	0,7	$2,419 \cdot 10^{-7} q_{adm}$	$8,367 \cdot 10^{-2} q_{adm}$	$1,265 \cdot 10^{-2} q_{adm}$
4	0,9	$2,314 \cdot 10^{-7} q_{adm}$	$6,762 \cdot 10^{-2} q_{adm}$	$2,662 \cdot 10^{-2} q_{adm}$
5	1,1	$1,525 \cdot 10^{-7} q_{adm}$	$2,545 \cdot 10^{-2} q_{adm}$	$2,1970 \cdot 10^{-2} q_{adm}$
6	1,3	$0,522 \cdot 10^{-7} q_{adm}$	$-3,95 \cdot 10^{-2} q_{adm}$	$0,2025 \cdot 10^{-2} q_{adm}$
7	1,5	0	$-12,537 \cdot 10^{-2} q_{adm}$	$-3,134 \cdot 10^{-2} q_{adm}$

Найбільше значення функції прогину досягає при $r=0,7$ м, де $w_{max} = 0,2419 \cdot 10^{-7} q_{adm}$. За умовою жорсткості ця величина повинна бути обмежена величиною допустимого прогину $w_{adm} = (b-a)/200 = 6 \cdot 10^{-3}$ м. Підставивши отримані вирази в умову жорсткості $w_{max} \leq w_{adm}$, одержимо першу нерівність для визначення шуканої величини навантаження, що допускається,

$$0,2419 \cdot 10^{-7} q_{adm} \leq 6 \cdot 10^{-3}. \quad (10.6)$$

Замінивши нестрогу нерівність на рівність, одержимо рівняння для визначення шуканої величини допустимого навантаження $0,2417 \cdot 10^{-7} q_{adm} = 6 \cdot 10^{-3}$. Його рішення визначить величину рівномірно розподіленого навантаження $q_{adm} = 24,824$ кПа, при якій найбільший відносний прогин у пластині дорівнює $1/200$.

Серед множини значень функцій радіальних і колового згинальних моментів (див. табл. 10.2) є найбільше за модулем значення при $r=b$ $\overline{M_r(q_{adm}, b)} = 12,537 \cdot 10^{-2} q_{adm}$. Матеріал текстоліт не однаково опирається розтягу і стиску. Величина допустимого напруження на розтяг менша, ніж на стиск $\sigma_{adm, r} < \sigma_{adm, s}$. Тому умову міцності слід перевіряти в точці з координатами $r=b$, $z=-h/2$ за розтяжними напруженнями. У цій точці виникає найбільша радіальна нормальна розтяжна напружка (див. формулу (6.1))

рис. 10.2

49

$$\sigma_r(a, -\frac{h}{2}) = \frac{6 \cdot M_z}{h^2} = \frac{6 \cdot 12,537 \cdot 10^{-3} q_{adm}}{0,024^2} = 1,306 \cdot 10^3 q_{adm}$$

За умовою міцності за першою теорією міцності ця величина не повинна перевищувати величини допустимої напруги на розтяг для текстоліту

$$\sigma_r(a, -\frac{h}{2}) = 1,306 q_{adm} \leq \sigma_{adm} = 15 \text{ МПа.} \quad (10.7)$$

Замінивши нестрогу нерівність на рівність, одержимо рівняння для визначення шуканої величини допустимого навантаження $1,306 q_{adm} = 15 \cdot 10^6$. Рішення рівняння буде $q_{adm} = 11,485 \text{ кПа}$ визначить величину рівномірно розподіленого навантаження, при якій найбільша нормальна напрута в пластині дорівнює 15 МПа.

Найменшим загальним коренем системи двох нестрогих нерівностей (10.6) і (10.7) буде менше з двох значень $q_{adm} = \min(11,485; 24,793) = 11,485 \text{ кПа}$. Приймемо $q_{adm} = 11,5 \text{ кПа}$. Це дозволяє визначити функції переміщення і зусиль, що визначають напружено деформований стан пластини.

Функція прогинів.

$$w(r) = -2,431 \cdot 10^{-3} \cdot r^2 \ln(r) + 7,631 \cdot 10^{-5} \cdot r^2 + 6,786 \cdot 10^{-6} \ln(r) - 2,6734 \cdot 10^{-3} + 4,8744 \cdot 10^{-3} \cdot r^4$$

Функція кута повороту

$$\varphi(r) = -2,431 \cdot 10^{-3} \cdot [2r \ln(r) + r] + 1,5262 \cdot 10^{-4} \cdot r + 6,786 \cdot 10^{-6} / r + 1,9497 \cdot 10^{-2} \cdot r^3$$

Функція радіального згинального моменту

$$M_r(r) = 8,9616 \cdot 10^{-2} \cdot [2,5 \ln(r) + 3,25] - 7,0329 + 1,8763 \cdot 10^{-1} / r^2 - 2,3359 \cdot 10^{-3} \cdot r^2$$

Функція колового згинального моменту

$$M_\theta(r) = 8,9616 \cdot 10^{-2} \cdot [2,5 \ln(r) + 1,75] - 7,0329 - 1,8763 \cdot 10^{-1} / r^2 - 1,2578 \cdot 10^{-3} \cdot r^2$$

50

Підставляючи вираз першої похідної (10.2) у (4.11) і послідовно диференціюючи, одержимо

$$\bar{Q}_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) = -\frac{qr}{2} = -\frac{11,5 \cdot 10^3 r}{2} = -5,75 \cdot 10^3 r$$

Функція радіальної поперечної сили

$$Q_r(r) = 3,5847 \cdot 10^3 / r - 5,75 \cdot 10^3 r$$

Для побудови епюр переміщення і зусиль (рис. 8) розділимо проліт на шість різних частин і обчислимо значення функцій $w(r)$, $\varphi(r)$, $M_r(r)$, $M_\theta(r)$, $Q_r(r)$ у точках розподілу. Результати обчислення значень функцій подані у табл. 10.3.

Таблиця 10.3

Номер точки розподілу	r , м	$w(r)$, м	dw/dr , радіани	$M_r(r)$, кН	$M_\theta(r)$, кН	$Q_r(r)$, кН
1	0,3	0	$0,109 \cdot 10^{-1}$	0	-1,251	10,22
2	0,5	$0,186 \cdot 10^{-2}$	$0,722 \cdot 10^{-2}$	0,769	-0,307	4,294
3	0,7	$0,278 \cdot 10^{-2}$	$0,193 \cdot 10^{-2}$	0,926	0,145	1,096
4	0,9	$0,266 \cdot 10^{-2}$	$-0,291 \cdot 10^{-2}$	0,778	0,306	-1,192
5	1,1	$0,175 \cdot 10^{-2}$	$-0,571 \cdot 10^{-2}$	0,293	0,253	-3,066
6	1,3	$0,601 \cdot 10^{-3}$	$-0,515 \cdot 10^{-2}$	-0,454	0,023	-4,717
7	1,5	0	0	-1,442	-0,360	-6,235

Побудовані епюри прогинів і кутів повороту дозволяють уточнити циліндричний перетин, де функція $w(r)$ досягає найбільшого значення (рис. 8). В інтервалі $0,7 < r < 0,9$ перша похідна функції прогинів dw/dr змінює знак. Заміняючи на цьому інтервалі функцію $w(r)$ лінійною апроксимацією, знайдемо нуль функції $dw/dr = 0$. У точці з абсцисою $r = 0,78$ м. буде найбільший абсолютний прогин пластини $w_{max} = 2,85 \cdot 10^{-3}$ м. Відношення найбіль-

51

шого абсолютного прогину до товщини пластини, що характеризує жорсткість гнучких тонких пластин, виконується

$$\frac{w_{max}}{h} = \frac{2,85 \cdot 10^{-3}}{0,024} = \frac{1}{8,42} < \frac{1}{5}$$

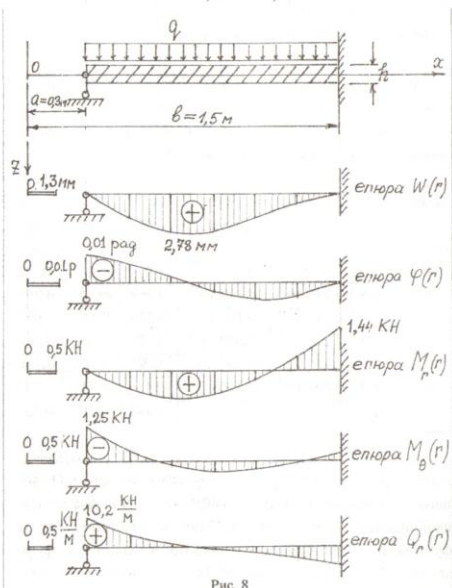


Рис. 8

52

Побудовані епюри зусиль дозволяють визначити небезпечний циліндричний перетин $r=b$, де функція радіального згинаючого моменту досягає найбільшого значення. На верхній площині пластини в точці з координатами $r=b, z=h/2$ виникають напруження

$$\sigma_r(b, -h/2) = \frac{6M_z}{h^2} = \frac{6 \cdot 1,44 \cdot 10^3}{0,024^2} = 15,0 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_\theta(b, -h/2) = \frac{6M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,36 \cdot 10^3}{0,024^2} = 3,75 \text{ МПа.}$$

У цій точці дотичні напруження в площині пластини відсутні. Тому радіальні й колові нормальні напруження одночасно є головними

$$\sigma_1 = \sigma_r(b, -h/2) = 15,0 \text{ МПа, } \sigma_2 = \sigma_\theta(b, -h/2) = 3,75 \text{ МПа, } \sigma_3 = -11,5 \text{ кПа.}$$

Текстоліт – матеріал, що неоднаково опирається розтягу і стиску. Нормальне допустиме напруження на розтяг $\sigma_{adm} = 15 \text{ МПа}$ менше, ніж на стиск $\sigma_{adm} = 30 \text{ МПа}$. Тому перевірку міцності в нормальних напружень варто робити за першою теорією міцності в точці з координатами $r=b, z=h/2$, де діють розтяжні напруження $\sigma_1 = 15,0 \text{ МПа} = \sigma_{adm} = 15,0 \text{ МПа}$.

Умова міцності виконується точно. У перетині $r=a$ функція поперечної сили досягає найбільшого значення $Q_r(a) = 10,224 \text{ кН/м}$. Найбільші дотичні напруження будуть на рівні серединної площини при $z=0$, де вони досягають максимуму (див. формулу (6.2)). В околі цієї точки виникає плоский напружений стан чистого зсуву

$$\tau_{max} = \tau_z(a, 0) = -\frac{Q_r S(0)}{h^3} = -\frac{Q_r}{2} \frac{S(0)}{h} = -\frac{3}{2} \frac{10,224 \cdot 10^3}{0,024} = 6,375 \text{ МПа.}$$

53

Дотична допустима напруга дорівнює половині нормальної допустимої напруги. Умова міцності по дотичних напруженнях виконується

$$\tau_{\max} = 6,375 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{2} = 7,5 \text{ МПа}.$$

Перевірка жорсткості пластини. У точці $r = 0,78$ м найбільший абсолютний прогин пластини $w_{\max} = 2,85 \cdot 10^{-3}$ м. Допустимий прогин $w_{\text{adm}} = (b-a)/200 = 1,2/200 = 6 \cdot 10^{-3}$ м. Умова жорсткості пластини $w_{\max} = 2,85 \cdot 10^{-3}$ м. $< w_{\text{adm}} = 6 \cdot 10^{-3}$ м виконується.

11. Визначення даних індивідуальних задач розрахунково-графічної вправи «Розрахунок кільцевої пластини на міцність і жорсткість»

Дані індивідуальної задачі визначаються шестизначним числом, що задається викладачем. Перші дві цифри задають номер розрахункової схеми з табл. 11.1. Третя цифра задає номер рядка табл. 11.2, що задає механічні характеристики матеріалу. Четверта цифра визначає рядок геометричних параметрів з табл. 11.3. П'ята цифра задає номер задачі (1-перевірка міцності; 2-визначення величини допустимого навантаження; 3-обчислення величини коефіцієнта запасу). Шоста цифра задає номер рядка табл. 11.4, де зібрані параметри навантаження. Вона потрібна тільки в задачі 1.

123456
72

Таблиця 11.1

1		7	
2		8	
3		9	
4		10	
5		11	
6		12	

Продовження табл. 11.1

13		19	
14		20	
15		21	
16		22	
17		23	
18		24	

Закінчення табл. 11.1

25		31	
26		32	
27		33	
28		34	
29		35	
30		36	

3

Таблиця 11.2

№ пор.	Матеріал	E, ГПа	μ	σ _{адм,з} , МПа	σ _{адм,р} , МПа
1	СтальСТ2	200	0,3	180	
2	СтальСТ3	210	0,3	200	
3	Бронза	110	0,32	60	
4	ДТ-5	70	0,3	70	
5	Чавун	120	0,23	70	120
6	Бетон	32,5	0,167	1,2	30
7	Текстоліт	30	0,25	15	30
8	СВАМ 1:1	40	0,25	50	42

4

Таблиця 11.3

№	a м	b м	h мм
1	0,5	1,5	20
2	0,4	1,2	22
3	0,6	1,4	18
4	0,3	1,2	16
5	0,4	1,6	22
6	0,5	1,8	18
7	0,3	1,5	16
8	0,6	1,8	20
9	0,4	1,5	16
0	0,5	1,6	18

5

Таблиця 1.4

№ пор.	q, кПа	q ₁ , кПа м	P, кН м	m, кНм м	α, рад.	Δ, мм
1	3	1,2	8	18	0,005	4
2	4	1,4	12	22	0,003	5
3	2	1,6	6	24	0,004	3
4	3,5	0,9	7	21	0,006	4,5
5	4,5	0,8	11	17	0,007	5
6	5	0,75	17	18	0,004	3,5
7	3,5	1,4	21	16	0,004	2
8	2,5	1,1	18	15	0,006	4

12. Табулювання функцій, заданих громіздкими формулами, на мікрокалькуляторах типу "Casio" fx-100W, fx-570W

Інженерні мікрокалькулятори(МК) типу "Casio" призначені для автоматизації обчислень нескладних науково-технічних і інженерних розрахунків. МК"Casio" складається з кнопочного пристрою вводу, мікропроцесора і запам'ятовуючого пристрою для виконання обчислень і дисплея для виведення числових результатів. Кнопки вводу поділяються на дві групи. Одна група кнопок призначена для введення чисел і знаків арифметичних операцій. Інша група кнопок служить для керування обчислювальним процесом і вводу функцій. Запам'ятовувачий пристрій складається з набору регістрів для збереження даних і лінійної пам'яті для збереження програми. Дисплей складається з двох рядків. Верхній відображає символи, що вводяться, нижній рядок є рядком результату. Є бібліотека вбудованих математичних і статистичних функцій. Наявність лінійної пам'яті дозволить 79 знаків і рядка

дисплея, де вона відображається, дозволяє просто організувати обчислення користувальницьких функцій, що конструюються з бібліотечних функцій за допомогою арифметичних операцій. Обчислення декількох значень функцій виконуються при одноразовому введенні формули з наступною заміною значення аргументу. При цьому при введенні формули під аргумент резервується стільки позицій пам'яті, щоб її вистачило для "найдовшого" числа. При введенні поточного значення зайві позиції заповнюються нулями. Приклад. Обчислити значення функції кута повороту, узятій з першого приклада, при наступних значеннях аргументу $r = 0,6; 0,75$.

$$\varphi(r) = -0,41933 \cdot 10^{-2} \cdot [2 \ln(r) + r] + 1,0806 \cdot 10^{-2} \cdot r - 0,50625 \cdot 10^{-3} \cdot r.$$

Введемо наступні позначення для клавіш МК "Casio".

* Прямими дужками позначаються функціональні клавіші, що згруповані і знаходяться у верхній частині клавіатури. Символи в прямих дужках є назвами цих клавіш. Назви розташовані на самій клавіші. Наприклад, $[x^2]$ – оператор піднесення до квадрату; $[\ln]$ – оператор натуральний логарифм.

* Кутовими дужками позначена клавіша дорівнює, клавіші арифметичних операцій, клавіша десяткова крапка і клавіша підстановки ступеня числа десять $\langle = \rangle$, $\langle + \rangle$, $\langle - \rangle$, $\langle \times \rangle$, $\langle \div \rangle$, $\langle \bullet \rangle$, $\langle EXP \rangle$ Ці клавіші згруповані в нижній частині клавіатури

* Фігурними дужками позначені клавіші керуванням курсором $\langle \leftarrow \rangle$, $\langle \rightarrow \rangle$ і вибір режимів $\{ MODE \}$.

* При вводі значення аргументу 0,6 натискаються клавіші $0 \langle \bullet \rangle 60$

1. Включення МК"Casio". Початок роботи задається натисканням клавіші $\{ AC/ON \}$. Виконується перевірка встановлених режимів роботи МК "Casio".

Режими	Звичайних обчислень	Виміру кутів	Представлення чисел	Кількість значущих цифр
Індикатор	COMP	RAD	NORM2	SCI2,ENG2

2. Введення формули для обчислення значення функції при $r = 0,6$.

$$\begin{aligned} & -0 \langle \bullet \rangle 41933 \langle EXP \rangle \langle - \rangle 2 \langle \times \rangle (2 \langle \times \rangle 0 \langle \bullet \rangle 60 \langle \times \rangle [\ln] 0 \langle \bullet \rangle 60 \\ & + 0 \langle \bullet \rangle 60) + 1 \langle \bullet \rangle 0806 \langle EXP \rangle - 2 \langle \times \rangle 0 \langle \bullet \rangle 60 - 0 \langle \bullet \rangle 506025 \langle EXP \rangle - \\ & 3 \langle \div \rangle 0 \langle \bullet \rangle 60. \end{aligned}$$

Символи, що вводяться, з'являються на верхньому рядку дисплея. Здійснюється поточний контроль і при виявленні помилки за допомогою клавіші курсор уліво $\langle \leftarrow \rangle$ знаходиться потрібна позиція і помилка виправляється.

3. По закінченні введення формули натискається клавіша дорівнює $\langle = \rangle$. На нижньому рядку дисплея з'являється результат $5,69432 \cdot 10^{-3}$. Кінець обчислення першого значення функції.

4. Щоб обчислити друге значення функції треба замінити старе значення аргументу на нове $r = 0,75$. За допомогою клавіші курсор уліво $\langle \leftarrow \rangle$ знаходиться потрібна позиція аргументу і виконується його заміна. По закінченні всіх змін натискається клавіша дорівнює $\langle = \rangle$. На нижньому рядку дисплея з'являється результат $6,094126 \cdot 10^{-3}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров А.В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 2002. – 398 с.
2. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горыкова А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Изд. ассоциации строительных вузов, 1995. – 572 с.
3. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Главн. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1984. – 317 с.
4. Прочность • Устойчивость • Колебания: Справочник в 3-х т./ Под общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Панскова. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
5. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей)/ Под общ. ред. П.М. Варвакаш, А.Ф. Рябова. – К.: Будівельник, 1971. – 418 с.

62

довжиною 79 знаків і рядка дисплея, де вона відображається, дозволяє просто організувати обчислення користувальницьких функцій, що конструюються з бібліотечних функцій за допомогою арифметичних операцій. Обчислення декількох значень функції виконується при одноразовому введенні формули з наступною заміною значення аргументу. При цьому при введенні формули під аргумент резервується стільки позицій пам'яті, щоб її вистачило для "найдовшого" числа. При введенні поточного значення зайві позиції заповнюються нулями. Приклад. Обчислити значення функції кута повороту, узятій з першого прикладу, при наступних значеннях аргументу $r = 0,6; 0,75$.

$$\varphi(r) = -0,41933 \cdot 10^{-2} [2r \ln(r) + r] + 1,0806 \cdot 10^{-2} r - 0,50625 \cdot 10^{-3} / r.$$

Введемо наступні позначення для клавіш МК "Casio".

- * Прямими дужками позначаються функціональні клавіші, що згруповані і знаходяться у верхній частині клавіатури. Символи в прямих дужках є назвами цих клавіш. Назви розташовані на самій клавіші. Наприклад, $[x^2]$ – оператор піднесення до квадрату; $[\ln]$ – оператор натуральний логарифм.
- * Кутовими дужками позначена клавіша дорівнює, клавіші арифметичних операцій, клавіша десяткова крапка і клавіша підстановки ступеня числа десять $\langle = \rangle$, $\langle + \rangle$, $\langle - \rangle$, $\langle \times \rangle$, $\langle \div \rangle$, $\langle \bullet \rangle$, $\langle EXP \rangle$. Ці клавіші згруповані в нижній частині клавіатури.
- * Фігурними дужками позначені клавіші керування курсору $\{ \leftarrow \}$, $\{ \rightarrow \}$ і вибір режимів $\{ MODE \}$.
- * При вводі значення аргументу 0,6 натискаються клавіші 0 $\langle \bullet \rangle$ 6 0

1. Включення МК "Casio". Початок роботи задається натисканням клавіші $\{ AC/ON \}$. Виконується перевірка встановлених режимів роботи МК "Casio".

Режими	Звичайних обчислень	Виміру кутів	Представлення чисел	Кількості значущих цифр
--------	---------------------	--------------	---------------------	-------------------------

63

Укв. пом.
Навч. пос.
розр. різн.
контр. доц. і зм.
Становище - Укв. пос.
контр. 142

КІЛЬЦЕВА ПЛАСТИНА

Методичні рекомендації
до виконання розрахунково-графічної
роботи для студентів спеціальності
7.092101 "Промислове і цивільне будівництво"

Укладач ПЕКЛОВ Микола Олександрович

Комп'ютерна верстка О.В. Яворської

Підписано до друку 22.12.2003. Формат 60х84 _{1/16}.
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.
Ум. друк. ар. 3,72. Облік.-вид. ар. 4,0. Ум. фарбов. д.б. 23.
Тираж 200 прим. Вид. № 110/ПІ-03. Зам. № 8/1-04.

КНУБА. Політрофлотський проспект, 31, Київ-680, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури.

Свідчення про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої
справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.