



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Плоска задача теорії пружності

Методичні рекомендації та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
та індивідуальних завдань для студентів
будівельного факультету спеціальності
7.092101 “Промислове та цивільне будівництво”

Укладачі: Ю.А.Морсков, канд.техн.наук
В.С.Єременко, канд.техн.наук
О.П.Кошевий, канд.техн.наук
А.М.Станкевич, канд.техн.наук

Рецензент О.Ф.Корбаков, канд.техн.наук, доцент

Відповідальний за випуск Л.Т.Шкельов, канд. техн. наук,
завідувач кафедри

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів,
протокол № 1 від 29 серпня 2003 року*

Видається в авторській редакції.

Опір матеріалів. Плоска задача теорії пружності: Методичні
0-61 рекомендації та завдання до виконання розрахунково-
графічної роботи та індивідуальних завдань / Уклад.:
Ю.А.Морсков, В.С.Єременко, О.П.Кошевий, А.М.Станкевич.
К.: КНУБА, 2003. – 39 с.

Наведено завдання до розділу “Плоска задача теорії пружності”,
вказівки та рекомендації до реалізації розрахунків та числові приклади.

Призначені для студентів будівельного факультету спеціальності
7.092101 “Промислове та цивільне будівництво”.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Методичні рекомендації та завдання призначені для засвоєння розділу “Плоска задача теорії пружності”. В рекомендаціях подано завдання для виконання розрахунково-графічної роботи та для індивідуальної роботи студентів під керівництвом викладача.

Для кожного завдання наведені вказівки до реалізації всіх етапів розрахунку та числовий приклад.

Кожну розрахунково-графічну роботу студент виконує за особистим завданням, умова якого визначається згідно з шифром, виданим викладачем у вигляді тризначного числа. Дані до завдання “Розв’язок плоскої задачі в поліномах” наведені у дод. 1, для завдання “Розрахунок балки-стінки” – в дод. 2, для завдання “Розрахунок клина” – в дод. 3.

Вправа виконується на аркушах формату А-4 (297 x 210 мм), які зшиваються в альбом з лівої сторони. Розрахунки та пояснення слід писати на одній стороні аркуша чорнилом (кульковою ручкою), а рисунки дозволяється виконувати олівцем. Виконуючи кожен етап розрахунків, спочатку треба записати розрахункову формулу, підставити числові дані, потім кінцевий результат з одиницею виміру отриманої величини.

Завдання, виконане студентом з порушенням наведених правил, не зараховується.

Завдання повинно мати титульний аркуш за такою формою

Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №

Тема

Виконав студент (група, спеціальність, шифр)
_____ (прізвище, ініціали)

Керівник _____ (прізвище, ініціали)

Київ – 200_ рік

Вірно виконана робота підлягає захисту.

1. Розв'язок плоскої задачі в поліномах

В більшості випадків розв'язок плоскої задачі зводиться до знаходження функції напружень (функції Ері), яка підкоряється бігармонічному рівнянню

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

і задовольняє граничним умовам на контурі диску

$$\begin{aligned} q_x &= \sigma_{xx} \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y, \\ q_y &= \tau_{yx} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y \end{aligned} \quad (2)$$

де q_x, q_y - складові зовнішнього навантаження в точці контуру;

n_x, n_y - напрямні косинуси зовнішньої нормалі в даній точці контуру.

Напруження визначаються через функцію Ері такими співвідношеннями

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Під час розв'язку плоскої задачі функцією напружень часто задаються, поряд з іншими виразами вона може бути у вигляді полінома.

Деформації зв'язані з напруженнями формулами закону Гука а) у випадку плоского напруженого стану

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}); & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \end{aligned} \quad (4)$$

б) у випадку плоскої деформації

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_{xx} - \bar{\mu} \sigma_{yy}); & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_{yy} - \bar{\mu} \sigma_{xx}); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \end{aligned} \quad (4')$$

$$\text{де} \quad \bar{E} = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Вихідні дані та постановка задачі

Відомі розміри прямокутного диску, положення системи координат, пружні характеристики матеріалу та функція напружень. Потрібно визначити параметр “с” функції напружень, побудувати епюри напружень та деформацій в перерізах $x = x_k$, $y = y_k$, визначити навантаження на контурі диску.

Вказівки до виконання завдання

1. Для заданої функції напружень записати похідні та підставити в бігармонічне рівняння (1), з якого визначити параметр “с”.

2. Використовуючи залежності (3), записати вирази для напружень.

3. В одержані вирази напружень підставити значення $x = x_k$, обчислити величини напружень, які залежать від однієї змінної y . Побудувати епюри σ_x та τ_{yx} в вертикальному перерізі $x = x_k$. Аналогічно обчислити величини напружень та побудувати епюри σ_y та τ_{xy} в горизонтальному перерізі $y = y_k$.

4. На основі закону Гука записати вирази деформацій та обчислити їх величини для плоского напруженого стану (4), або для плоскої деформації (4¹).

Побудувати епюри ϵ_x та γ_{yx} в перерізі $x = x_k$, епюри ϵ_y та γ_{xy} при $y = y_k$.*

5. Для кожної грані диска визначити напрямні косинуси зовнішньої нормалі і на основі граничних умов (2) записати вирази для навантажень q_x та q_y . Побудувати епюри навантажень на усіх гранях диска. Виконати перевірку рівноваги диска.

Покажемо, наприклад, як у виразах умов рівноваги врахувати навантаження, яке діє на верхній грані диска. Площі епюр навантажень, які обмежені нахиленою прямою або параболою, розбиваємо на прямокутники з основою “а” і висотою q_x і q_y , (крайні прямокутники мають основу $a/2$) (рис. 1).

*Примітка. Якщо остання цифра шифру непарна, то деформації обчислюються для плоского напруженого стану, а якщо парна – то для плоскої деформації.

Тоді проєкції навантажень на осі x і y , а також момент їх відносно точки "О" матимуть вигляд:

$$F_x = a \left(\frac{q_{x,0}}{2} + q_{x,1} + q_{x,2} + \dots + q_{x,n-1} + \frac{q_{x,n}}{2} \right);$$

$$F_y = a \left(\frac{q_{y,0}}{2} + q_{y,1} + q_{y,2} + \dots + q_{y,n-1} + \frac{q_{y,n}}{2} \right);$$

$$M_0 = a^2 \left(\frac{q_{y,0}}{8} + q_{y,1} \cdot 1 + q_{y,2} \cdot 2 + \dots + q_{y,n-1} (n-1) + \frac{q_{y,n}}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right) +$$

$$+ a \left(\frac{q_{x,0}}{2} + q_{x,1} + q_{x,2} + \dots + q_{x,n-1} + \frac{q_{x,n}}{2} \right) (h - y_B).$$

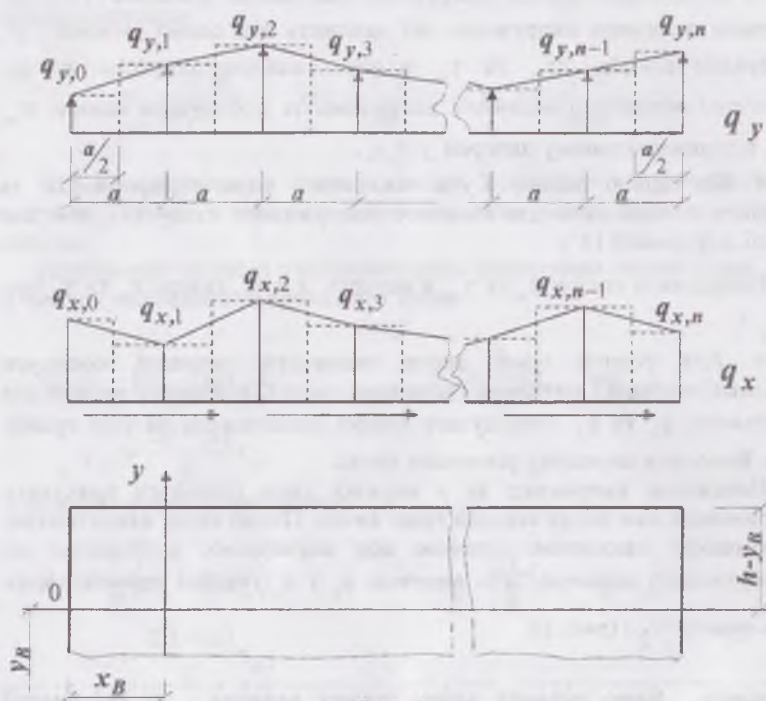


Рис. 1

Приклад 1.

Визначити напруження, деформації та навантаження при таких даних: $h = 3$ м, $b = 4$ м, $E = 25$ ГПа, $\mu = 0,2$ (дані по першій цифрі шифру); $x_B = 0$ м, $y_B = -0,5h$ м, $x_k = 0,375b$ м, $y_k = -0,167h$ м (по другій цифрі шифру); функція напружень $\varphi = \frac{x^3 y}{3} + cx^2 y^2 - y^4$ (по третій цифрі шифру).

1. Визначаємо похідні від функції напружень

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2 y + 2cxy^2;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x^3}{3} + 2cx^2 y - 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2xy + 2cy^2;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2cx^2 - 12y^2;$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 2y;$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = -24y;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -24;$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 2x + 4cy; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4c; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = x^2 + 4cxy.$$

Підставляємо значення похідних в бігармонічне рівняння і визначаємо параметр "с".

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0;$$

$$0 + 2 \cdot 4c - 24 = 0, \quad c = 3.$$

Остаточна функція напружень має вигляд

$$\varphi = \frac{x^3 y}{3} + 3x^2 y^2 - y^4.$$

2. Запишемо вирази напружень

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2cx^2 - 12y^2 = 6x^2 - 12y^2;$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2xy + 2cy^2 = 2xy + 6y^2;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -(x^2 + 4cxy) = -x^2 - 12xy.$$

3. Визначаємо напруження в перерізі

$$x_k = 0,375b = 0,375 \cdot 4 = 1,5 \text{ м}$$

$$\sigma_{xx} = 6x^2 - 12y^2 = 6 \cdot 1,5^2 - 12y^2 = 13,5 - 12y^2;$$

$$\sigma_{yy} = 2xy + 6y^2 = 2 \cdot 1,5y + 6y^2 = 3y + 6y^2;$$

$$\tau_{xy} = -x^2 - 12xy = -1,5^2 - 12 \cdot 1,5y = -2,25 - 18y.$$

Підставляючи значення y в межах від $-1,5$ м до $1,5$ м з шагом $0,5$ м отримуємо величини напружень в точках перерізу.

Напруження, МПа	Координата y , м						
	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5
σ_{xx}	-13,5	1,5	10,5	13,5	10,5	1,5	-13,5
τ_{xy}	24,75	15,75	6,75	-2,25	-11,25	-20,25	-29,25
σ_{yy}	9,0	3,0	0,0	0,0	3,0	9,0	18,0

Визначаємо напруження в перерізі

$$y_k = -0,167h = -0,167 \cdot 3 = -0,5 \text{ м}$$

$$\sigma_{xx} = 6x^2 - 12y^2 = 6x - 12 \cdot (-0,5)^2 = 6x^2 - 3;$$

$$\sigma_{yy} = 2xy + 6y^2 = 2x \cdot (-0,5) + 6 \cdot (-0,5)^2 = -x + 1,5;$$

$$\tau_{xy} = -x^2 - 12xy = -x^2 - 12x \cdot (-0,5) = -x^2 + 6x.$$

Підставляючи значення x в межах від $0,0$ м до $4,0$ м з шагом $0,5$ м, отримуємо величини напружень.

Напруження, МПа	Координата x , м								
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
σ_{yy}	1,5	1,0	0,5	0,0	-0,5	-1,0	-1,5	-2,0	-2,5
τ_{xy}	0,0	2,75	5,0	6,75	8,0	8,75	9,0	8,75	8,0
σ_{xx}	-3,0	-1,5	3,0	10,5	21,0	34,5	51,0	70,5	93,0

Будуємо епюри нормальних та дотичних напружень в відповідних перерізах (рис. 2).

4. Записуємо вирази деформацій для випадку плоскої деформації

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \bar{\mu}\sigma_{yy}); \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \bar{\mu}\sigma_{xx});$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy},$$

де зведені характеристики мають такі значення

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\mu^2} = \frac{25,0}{1-0,2^2} = 26,04 \text{ ГПа}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{0,2}{1-0,2} = 0,25.$$

Отже:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{26,04 \cdot 10^9}(\sigma_{xx} - 0,25\sigma_{yy}) \cdot 10^6 = 0,38 \cdot 10^{-4}(\sigma_{xx} - 0,25\sigma_{yy});$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{26,04 \cdot 10^9}(\sigma_{yy} - 0,25\sigma_{xx}) \cdot 10^6 = 0,38 \cdot 10^{-4}(\sigma_{yy} - 0,25\sigma_{xx});$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+0,2)}{25 \cdot 10^9}\tau_{xy} \cdot 10^6 = 0,96 \cdot 10^{-4}\tau_{xy}.$$

Значення деформацій в перерізі $x_k = 1,5 \text{ м}$

Деформації	Координати y , м						
	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5
$\varepsilon_{xx} \cdot 10^4$	-5,98	0,28	3,99	5,13	3,7	-0,28	-6,84
$\gamma_{yx} \cdot 10^4$	23,8	15,12	6,48	-2,16	-10,8	-19,44	-28,1

Значення деформацій в перерізі $y_k = -0,5 \text{ м}$

Дефор мації	Координата x , м								
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\varepsilon_{yy} \cdot 10^4$	0,85	0,52	-0,1	-1,0	-2,18	-3,66	-5,42	-7,46	-9,78
$\gamma_{xy} \cdot 10^4$	0,0	2,4	4,8	6,48	7,68	8,4	8,64	8,4	7,68

Будуємо відповідні епюри (рис. 2).

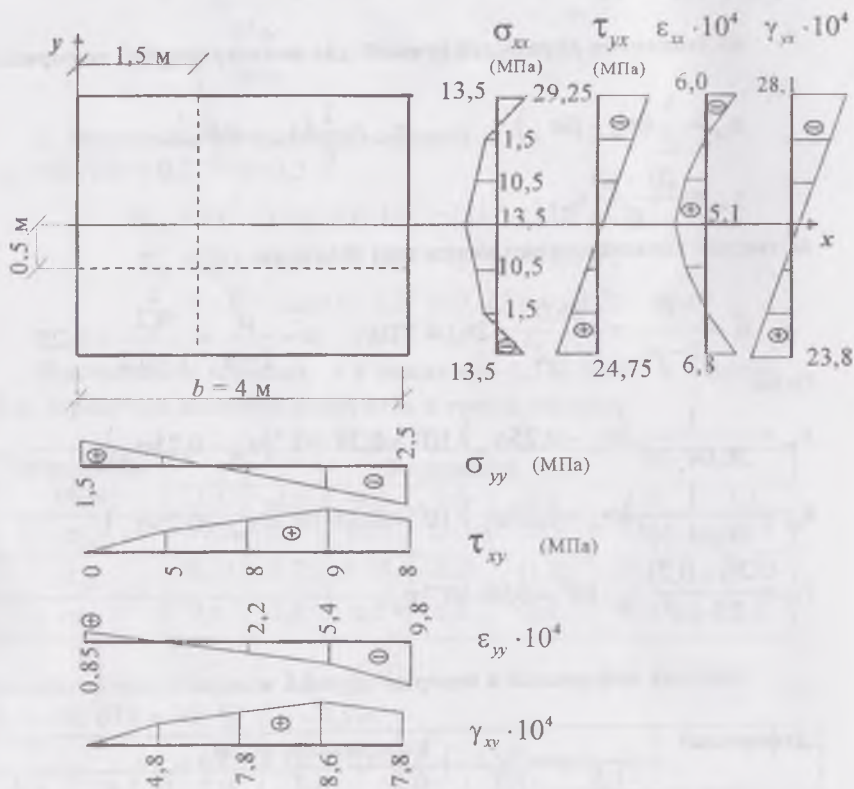


Рис. 2

5. Визначаємо компоненти зовнішніх навантажень на контурі диску

$$q_x = \sigma_{xx} \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y;$$

$$q_y = \tau_{yx} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y.$$

Верхня грань: $y = \frac{h}{2} = 1.5 \text{ м}$, $n_x = 0$, $n_y = 1$.

$$q_x = \tau_{xy} \cdot 1 = -x^2 - 12xy = -x^2 - 12x \cdot 1.5 = -x^2 - 18x,$$

$$q_y = \sigma_{yy} \cdot 1 = 2xy + 6y^2 = 2x \cdot 1.5 + 6 \cdot 1.5^2 = 3x + 13.5.$$

Значення навантажень наведені в таблиці

Навантаження, МПа	Координата x , м								
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
q_x	0,0	-9,25	-19,0	-29,25	-40,0	-51,25	-63,0	-75,25	-88,0
q_y	13,5	15,0	16,5	18,0	19,5	21,0	22,5	24,0	25,5

Нижня грань: $y = -\frac{h}{2} = -1,5$ м, $n_x = 0$, $n_y = -1$.

$$q_x = \tau_{xy} \cdot (-1) = x^2 + 12xy = x^2 + 12x \cdot (-1,5) = x^2 - 18x;$$

$$q_y = \sigma_{yy} \cdot (-1) = -2xy - 6y^2 = -2x \cdot (-1,5) - 6 \cdot (-1,5)^2 = 3x - 13,5.$$

Навантаження, МПа	Координата x , м								
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
q_x	0,0	-8,75	-17,0	-24,75	-32,0	-38,75	-45,0	-50,75	-56,0
q_y	13,5	-12,0	-10,5	-9,0	-7,5	-6,0	-4,5	-3,0	-1,5

Ліва грань: $x = 0$, $n_x = -1$, $n_y = 0$.

$$q_x = \sigma_{xx} \cdot (-1) = -6x^2 + 12y^2 = -6 \cdot 0 + 12y^2 = 12y^2;$$

$$q_y = \tau_{yx} \cdot (-1) = x^2 + 12xy = 0.$$

Навантаження, МПа	Координата y , м						
	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5
q_x	27	12	3	0	3	12	27
q_y	0	0	0	0	0	0	0

Права грань: $x = 4$ м, $n_x = 1$, $n_y = 0$.

$$q_x = \sigma_{xx} \cdot 1 = 6x^2 - 12y^2 = 6 \cdot 4^2 - 12y^2 = 96 - 12y^2;$$

$$q_y = \tau_{yx} \cdot 1 = -x^2 - 12xy = -4^2 - 12 \cdot 4 \cdot y = -16 - 48y.$$

Навантаження, МПа	Координата y , м						
	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5
q_x	69	84	93	96	93	84	69
q_y	56	32	8	-16	-40	-64	-88

Будуємо епюри зовнішніх навантажень (рис. 3).

Виконуємо перевірку рівноваги диску (шаг ординат вздовж осі x беремо 1 м, а вздовж осі y - 0,5м)

$$\sum F_x = 0;$$

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \left(0 - 19 - 40 - 63 - \frac{88}{2} \right) + 1 \cdot \left(0 - 17 - 32 - 45 - \frac{56}{2} \right) + \\ & + 0,5 \cdot \left(\frac{27}{2} + 12 + 3 + 3 + 12 + \frac{27}{2} \right) + \\ & + 0,5 \cdot \left(\frac{69}{2} + 84 + 93 + 96 + 93 + 84 + \frac{69}{2} \right) = \\ & = -166 - 122 + 28,5 + 259,5 = 0. \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$\frac{13,5 + 25,5}{2} \cdot 4 - \frac{13,5 + 1,5}{2} \cdot 4 + \frac{-88 + 56}{2} \cdot 3 = 78 - 30 - 48 = 0.$$

$$\sum M_0 = 0;$$

$$\begin{aligned} & 1^2 \cdot \left(\frac{13,5}{2} \cdot \frac{1}{4} + 16,5 \cdot 1 + 19,6 \cdot 2 + 22,5 \cdot 3 + \frac{25,5}{2} \cdot \left(4 - \frac{1}{4} \right) \right) - \\ & - 1^2 \cdot \left(\frac{13,5}{2} \cdot \frac{1}{4} + 10,5 \cdot 1 + 7,5 \cdot 2 + 4,5 \cdot 3 + \frac{1,5}{2} \cdot \left(4 - \frac{1}{4} \right) \right) + \\ & + \frac{-88 + 56}{2} \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot \left(0 + 19 + 40 + 63 + \frac{88}{2} \right) \cdot 1,5 - \\ & - 1 \cdot \left(0 + 17 + 32 + 45 + \frac{56}{2} \right) \cdot 1,5 = 172,5 - 43,5 + 249 - 183 - 192 = \\ & = 421,5 - 418,5 = -3 \approx 0. \end{aligned}$$

$$\text{Похибка } \Delta = \frac{421,5 - 418,8}{421,5} \cdot 100\% = 0,7\%.$$

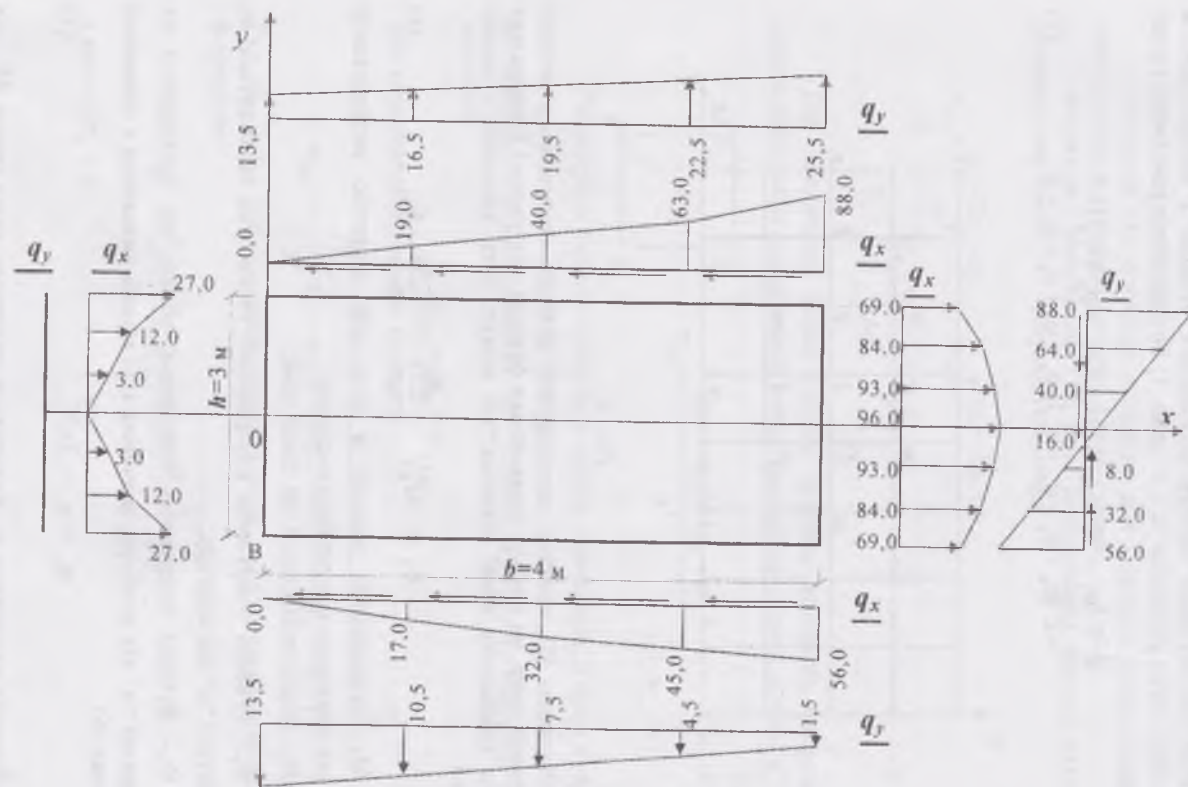


Рис. 3

2. Розрахунок балки – стінки

При застосуванні методу скінченних різниць з використанням квадратної сітки розміром “ $a \times a$ ” (рис. 4) бігармонічне рівняння (1) має вигляд

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_i = 20 \cdot \varphi_i - 8 \cdot (\varphi_f + \varphi_c + \varphi_e + \varphi_d) + 2 \cdot (\varphi_w + \varphi_q + \varphi_m + \varphi_p) + \varphi_u + \varphi_v + \varphi_k + \varphi_s = 0 \quad (5)$$

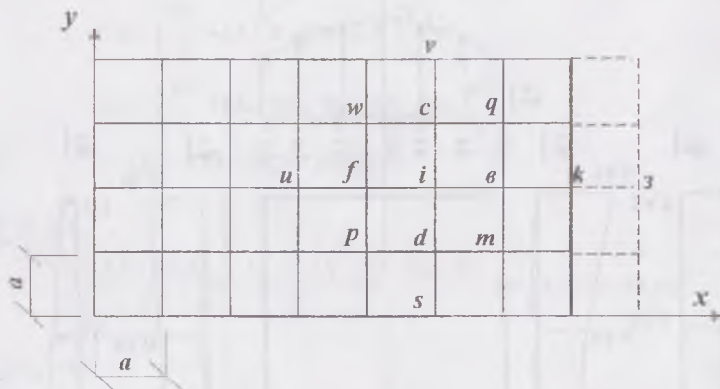


Рис. 4

Рівнянню (5) повинна задовольняти функція напружень в кожній внутрішній точці, на контурі балки-стілки функція напружень і її нормальна похідна приймають певні значення, які можуть бути визначені з рамної аналогії

$$\varphi_k = -M_k; \quad \frac{d\varphi_k}{dn} = \frac{\varphi_3 - \varphi_s}{2a} = N_k, \quad (6)$$

де M_k - згинальний момент в будь-якій статично визначуваній рамі, яка повторює контур балки-стілки;

N_k - поздовжня сила в тій самій рамі;

φ_e - функція напружень внутрішньої точки, яка знаходиться на відстані “ a ” від контуру;

φ_3 - функція напружень зовнішньої точки, що знаходиться на відстані “ a ” від контуру, значення якої можна визначити з граничної умови (6)

$$\varphi_3 = \varphi_e + 2aN_k. \quad (7)$$

Функція напружень φ_k вважається додатною, якщо спюра M_k , що побудована на розтягнутих волокнах, розташована в середині рами,

і від'ємною – зовні контуру рами. Похідна від функції напружень $\frac{\partial \varphi_k}{\partial n}$ вважається додатною, якщо N_k викликає розтяг стержня рами, і від'ємною – при стиску.

Рівняння (5) потрібно складати для кожного вузла сітки, який знаходиться в середині контуру балки-стілки.

Формули напружень (3), при застосуванні методу скінченних різниць, для точки "l", набувають вигляду

$$\sigma_{xx} = \frac{\varphi_c - 2\varphi_i + \varphi_d}{a^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\varphi_a - 2\varphi_i + \varphi_f}{a^2},$$

$$\tau_{xy} = \frac{(\varphi_g + \varphi_p) - (\varphi_m + \varphi_n)}{4a^2}, \quad (8)$$

Для одержання більш точних значень дотичних напружень їх можна визначати для середніх точок квадратної сітки (точка "g")



$$\tau_{xy} = \frac{-(\varphi_f + \varphi_d) + (\varphi_i + \varphi_p)}{a^2}.$$

Розрахунок балки-стілки на міцність звичайний. Умова міцності

$$\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm}, \quad (9)$$

де еквівалентне напруження $\sigma_{екв}$ обчислюється за третьою теорією міцності

$$\sigma_{екв} = \sigma_{11} - \sigma_{33}, \quad (10)$$

або за четвертою теорією міцності

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]}. \quad (10')$$

Тут $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$ - головні напруження, два з них визначаються за формулою

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (11)$$

а третє $\sigma_3 = 0$.

Вихідні дані та постановка задачі

Відомі розміри прямокутного диску (балки–стінки) з навантаженням, крок сітки, допустиме напруження. Потрібно, використовуючи метод скінчених різниць (метод сіток), визначити значення функції напружень в вузлових точках, побудувати епюри нормальних та дотичних напружень, визначити величину допустимого навантаження.

Вказівки до виконання завдання

1. Вибрати статично визначувану раму, яка відповідає контуру балки – стінки. Для цього потрібно ввести три шарніри, або зробити розріз. Для вибраної схеми побудувати епюри M і N .

Розрахункову схему рами вибирають таким чином щоб одержати симетричні епюри M і N при симетричному навантаженні та кососиметричні епюри при кососиметричному навантаженні.

2. Нанести на пластину квадратну сітку з кроком “ a ” і пронумерувати внутрішні, контурні та позаконтурні вузлові точки з врахуванням прямої або косої симетрії.

3. Для кожної внутрішньої точки записати бігармонічне рівняння на основі формули (5).

4. Визначити значення функції напружень в контурних та позаконтурних точках, відповідно до співвідношень (6), (7). Підставити їх в систему рівнянь і розв’язати її. По значенням функції напружень в вузлових точках побудувати поверхню напружень.

5. Визначити в характерних перерізах нормальні та дотичні напруження, використовуючи формули (8), побудувати їх епюри.

Для кожної епюри зробити перевірку рівноваги відсіченої частини балки – стінки, записуючи проекцію сил на відповідну вісь.

6. Визначити головні напруження (11) і записати їх так, щоб виконувалась умова $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$.

Обчислити еквівалентні напруження за третьою або четвертою теорією міцності (10), (10'). *

Визначити допустиме навантаження з умови міцності (9).

*Примітка. Якщо остання цифра шифру непарна, то для визначення допустимого навантаження використати третю теорію міцності, а якщо остання цифра шифру парна - четверту теорію міцності.

Приклад 2.

Для балки – стінки (рис. 5) з параметрами: $a=0,5$ м, $h=3a$, $b=4a$, $\sigma_{adm} = 160$ МПа визначити значення функції напружень в вузлових точках, побудувати епюри нормальних та дотичних напружень і обчислити допустиме значення навантаження.

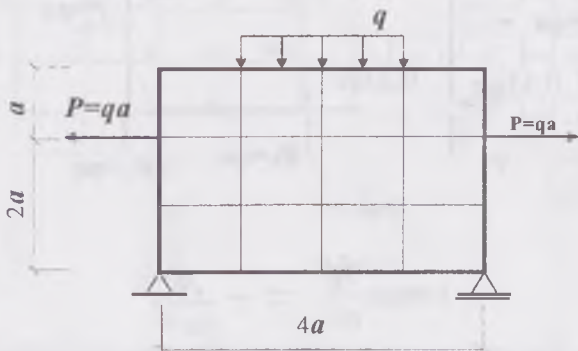


Рис. 5

1. Визначаємо опорні реакції. Для одержання статично визначуваної рами вводимо три шарніри (рис. 6). Визначаємо реакції в шарнірах (рис. 7) і будуємо епюри згинальних моментів та поздовжніх сил (рис. 8, а, б).

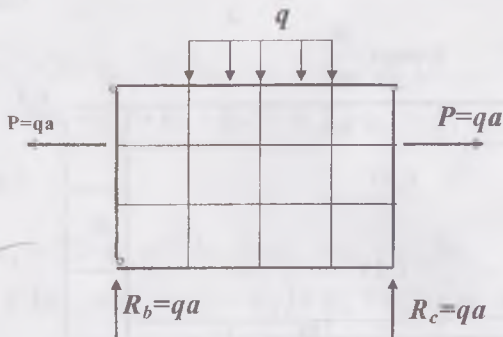


Рис. 6

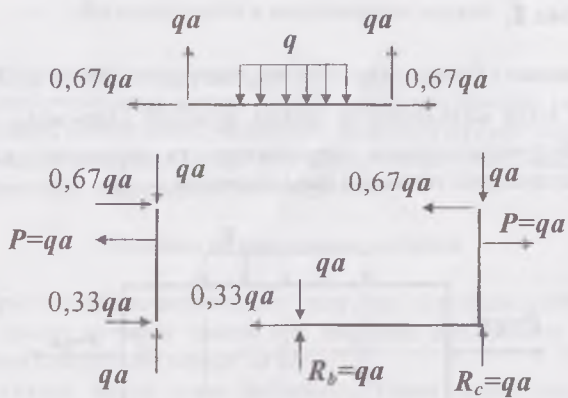


Рис. 7

Епюра $\frac{M}{qa^2} = -\frac{M}{qa^2}$

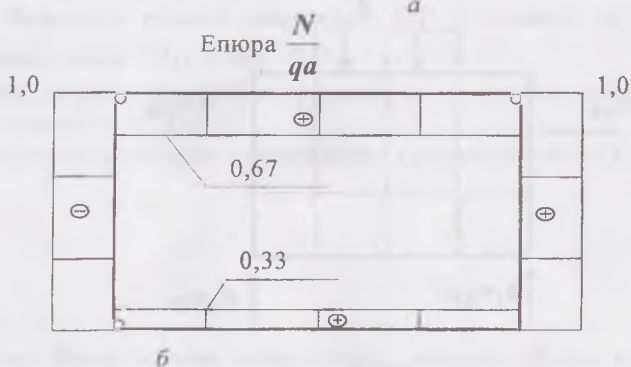
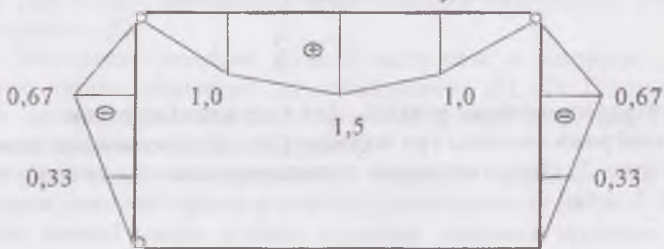


Рис. 8

2. На пластину наносимо сітку і нумеруємо вузлові точки сітки з врахуванням симетрії (рис. 9,а).

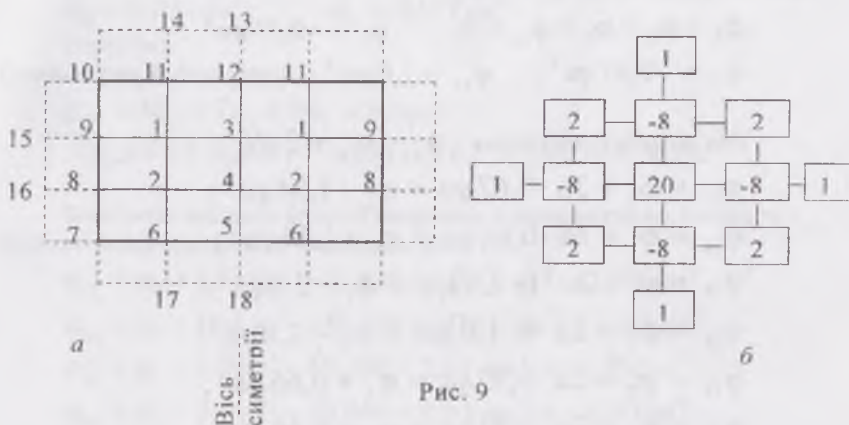


Рис. 9

3. Записуємо для кожної внутрішньої вузлової точки бігармонічне рівняння (5), згідно трафарету рис. 9,б.

Для точки 1

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_1 = 20 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot (\varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_3 + \varphi_2) + 2 \cdot (\varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12} + \varphi_4) + \varphi_{15} + \varphi_{14} + \varphi_1 + \varphi_6 = 0.$$

Для точки 2

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_2 = 20 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot (\varphi_8 + \varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_6) + 2 \cdot (\varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_3 + \varphi_5) + \varphi_{16} + \varphi_{11} + \varphi_2 + \varphi_{17} = 0.$$

Для точки 3

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_3 = 20 \cdot \varphi_3 - 8 \cdot (\varphi_1 + \varphi_{12} + \varphi_1 + \varphi_4) + 2 \cdot (\varphi_{11} + \varphi_{11} + \varphi_2 + \varphi_2) + \varphi_9 + \varphi_{13} + \varphi_9 + \varphi_5 = 0.$$

Для точки 4

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_4 = 20 \cdot \varphi_4 - 8 \cdot (\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_5) + 2 \cdot (\varphi_6 + \varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_6) + \varphi_{18} + \varphi_8 + \varphi_{12} + \varphi_8 = 0.$$

4. Визначимо значення функції напружень в контурних та позаконтурних точках сітки відповідно до формул 6, 7.

Для контурних точок $\varphi_k = -M_k$.

$$\begin{aligned}\varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7 = \varphi_{10} &= 0; & \varphi_8 &= -0,33qa^2; \\ \varphi_9 &= -0,67qa^2; & \varphi_{11} &= 1,0qa^2; & \varphi_{12} &= 1,5qa^2.\end{aligned}$$

Для позаконтурних точок $\varphi_s = \varphi_s + 2aN$

$$\begin{aligned}\varphi_{13} &= \varphi_3 + 2a \cdot 0,67qa = \varphi_3 + 1,34qa^2; \\ \varphi_{14} &= \varphi_1 + 2a \cdot 0,67qa = \varphi_1 + 1,34qa^2; \\ \varphi_{15} &= \varphi_1 + 2a \cdot (-1,0)qa = \varphi_1 - 2,0qa^2; \\ \varphi_{16} &= \varphi_2 + 2a \cdot (-1,0)qa = \varphi_2 - 2,0qa^2; \\ \varphi_{17} &= \varphi_2 + 2a \cdot 0,33qa = \varphi_2 + 0,66qa^2; \\ \varphi_{18} &= \varphi_4 + 2a \cdot 0,33qa = \varphi_4 + 0,66qa^2.\end{aligned}$$

Підставимо значення контурних та позаконтурних функцій в перше рівняння і зведемо подібні

$$\begin{aligned}20\varphi_1 - 8 \cdot (-0,67qa^2 + 1,0qa^2 + \varphi_3 + \varphi_2) + \\ + 2 \cdot (-0,33qa^2 + 0 + 1,5qa^2 + \varphi_4) + \\ + \varphi_1 - 2,0qa^2 + \varphi_1 + 1,34qa^2 + \varphi_1 + 0 = 0; \\ 23\varphi_1 - 8\varphi_2 - 8\varphi_3 + 2\varphi_4 = 1,0qa^2.\end{aligned}$$

Виконавши аналогічні підстановки в інші рівняння і звівши подібні, отримуємо систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} 23\varphi_1 - 8\varphi_2 - 8\varphi_3 + 2\varphi_4 = 1,0qa^2 \\ -8\varphi_1 + 23\varphi_2 + 2\varphi_3 - 8\varphi_4 = -1,0qa^2 \\ -16\varphi_1 + 4\varphi_2 + 21\varphi_3 - 8\varphi_4 = 8,0qa^2 \\ 4\varphi_1 - 16\varphi_2 - 8\varphi_3 + 21\varphi_4 = -1,5qa^2 \end{cases}$$

Якщо перші два рівняння помножити на два, то одержимо симетричну матрицю коефіцієнтів рівняння відносно головної діагоналі. Розв'язуємо отриману систему.

Значення функції напружень внутрішніх точках:

$$\varphi_1 = 0,268 qa^2; \quad \varphi_2 = 0,049 qa^2;$$

$$\varphi_3 = 0,636 qa^2; \quad \varphi_4 = 0,157 qa^2.$$

Перевірка:

Сумарне рівняння системи

$$3\varphi_1 + 3\varphi_2 + 7\varphi_3 + 7\varphi_4 = 6,5 qa^2;$$

$$(3 \cdot 0,268 + 3 \cdot 0,049 + 7 \cdot 0,636 + 7 \cdot 0,157) \cdot qa^2 = 6,502 qa^2.$$

Записуємо значення функції напружень в позаконтурних точках та будуємо поверхню функції напружень (рис. 10)

$$\varphi_{13} = \varphi_3 + 1,34 qa^2 = (0,636 + 1,34) \cdot qa^2 = 1,976 qa^2;$$

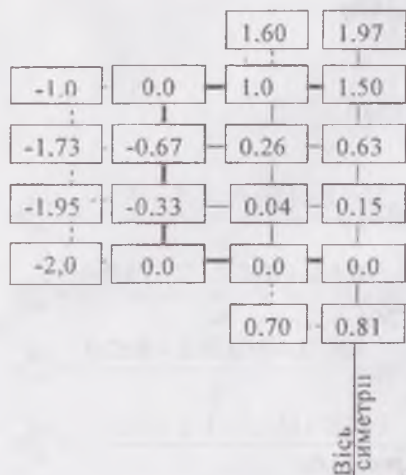
$$\varphi_{14} = \varphi_1 + 1,34 qa^2 = (0,268 + 1,34) \cdot qa^2 = 1,608 qa^2;$$

$$\varphi_{15} = \varphi_1 - 2,0 qa^2 = (0,268 - 2,0) \cdot qa^2 = -1,732 qa^2;$$

$$\varphi_{16} = \varphi_2 - 2,0 qa^2 = (0,049 - 2,0) \cdot qa^2 = -1,951 qa^2;$$

$$\varphi_{17} = \varphi_2 + 0,66 qa^2 = (0,049 + 0,66) \cdot qa^2 = 0,709 qa^2;$$

$$\varphi_{18} = \varphi_4 + 0,66 qa^2 = (0,157 + 0,66) \cdot qa^2 = 0,817 qa^2.$$



Поверхня функцій напружень ($1/qa^2$)

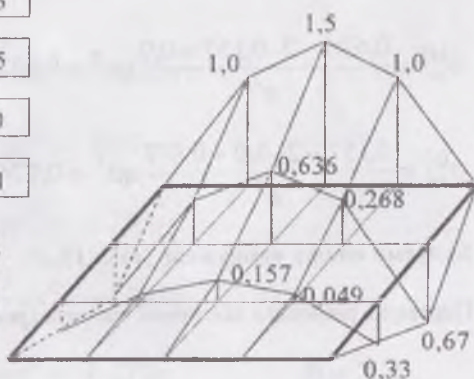


Рис. 10

5. Будуємо епюри нормальних та дотичних напружень.
Обчислюємо ординати епюри

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_i + \varphi_{j-1}}{a^2}$$

$$\sigma_{xx}^{(11)} = \frac{1,608 - 2 \cdot 1,0 + 0,268}{a^2} qa^2 = -0,124q;$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{1,0 - 2 \cdot 0,268 + 0,049}{a^2} qa^2 = 0,513q;$$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \frac{0,268 - 2 \cdot 0,049 + 0,0}{a^2} qa^2 = 0,17q;$$

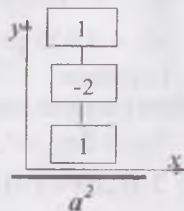
$$\sigma_{xx}^{(6)} = \frac{0,049 - 2 \cdot 0,0 + 0,709}{a^2} qa^2 = 0,758q;$$

$$\sigma_{xx}^{(12)} = \frac{1,976 - 2 \cdot 1,5 + 0,636}{a^2} qa^2 = -0,388q;$$

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \frac{1,5 - 2 \cdot 0,636 + 0,157}{a^2} qa^2 = 0,385q;$$

$$\sigma_{xx}^{(4)} = \frac{0,636 - 2 \cdot 0,157 + 0,0}{a^2} qa^2 = 0,322q;$$

$$\sigma_{xx}^{(5)} = \frac{0,157 - 2 \cdot 0,0 + 0,817}{a^2} qa^2 = 0,974q.$$



Будуємо епюру напружень (рис. 11,а).

Перевірка рівноваги відсіченої частини (рис. 11,б)

$$\sum F_x = 0;$$

$$-qa + a \cdot \left(\frac{-0,124}{2} + 0,513 + 0,17 + \frac{0,758}{2} \right) \cdot q = -qa + qa = 0.$$

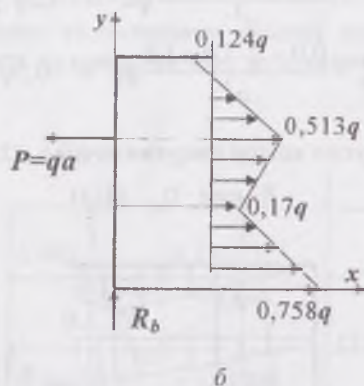
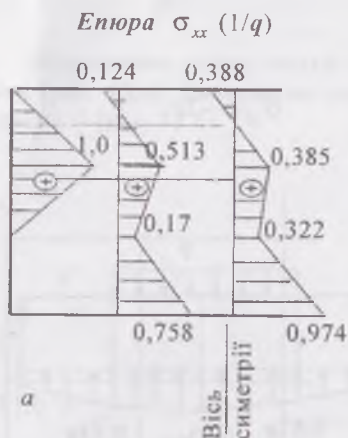
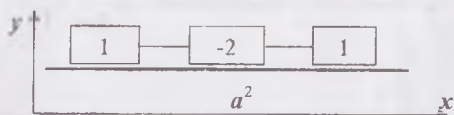


Рис. 11

Обчислюємо ординати епюри $\sigma_{yy}^{(i)} = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{a^2} qa^2$



$$\sigma_{yy}^{(9)} = \frac{-1,73 - 2 \cdot (-0,67) + 0,268}{a^2} qa^2 = -0,132q;$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \frac{-0,67 - 2 \cdot 0,268 + 0,636}{a^2} qa^2 = -0,57q;$$

$$\sigma_{yy}^{(3)} = \frac{0,268 - 2 \cdot 0,636 + 0,268}{a^2} qa^2 = -0,736q;$$

$$\sigma_{yy}^{(8)} = \frac{-1,95 - 2 \cdot (-0,33) + 0,049}{a^2} qa^2 = -1,241q;$$

$$\sigma_{yy}^{(2)} = \frac{-0,33 - 2 \cdot 0,049 + 0,157}{a^2} qa^2 = -0,271q;$$

$$\sigma_{yy}^{(4)} = \frac{0,049 - 2 \cdot 0,157 + 0,049}{a^2} qa^2 = -0,216q;$$

$$\sigma_{yy}^{12} = \frac{1,0 - 2 \cdot 1,5 + 1,0}{a^2} qa^2 = -1,0q ;$$

$$\sigma_{yy}^{11} = \frac{0,0 - 2 \cdot 1,0 + 1,5}{a^2} qa^2 = -0,5q ;$$

$$\sigma_{yy}^2 = -2q .$$

Будуємо епюру напружень (рис. 12,а).

Епюра σ_{yy} (1/q)

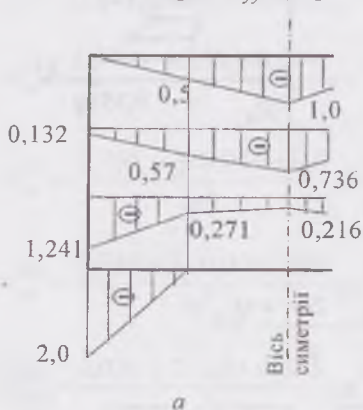
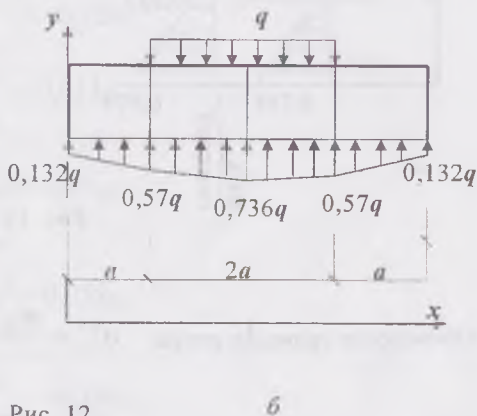


Рис. 12

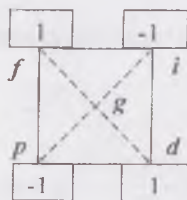


Перевірка рівноваги відсіченої частини (рис. 12,б)

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$\begin{aligned} -2a \cdot q + a \cdot \left(\frac{0,132}{2} + 0,57 + 0,736 + 0,57 + \frac{0,132}{2} \right) \cdot q = \\ = -2qa + 2,008qa = 0. \end{aligned}$$

Ординати епюри дотичних напружень будемо обчислювати для середніх точок квадратів сітки .



$$\tau_{xy}^{(g)} = \frac{(\varphi_f + \varphi_d) - (\varphi_i + \varphi_p)}{a^2} .$$

Накреслимо схему балки – стінки та позначимо середні точки сітки (рис. 13,а). Визначаємо ординати епюри дотичних напружень та будуємо її (рис. 13,б).

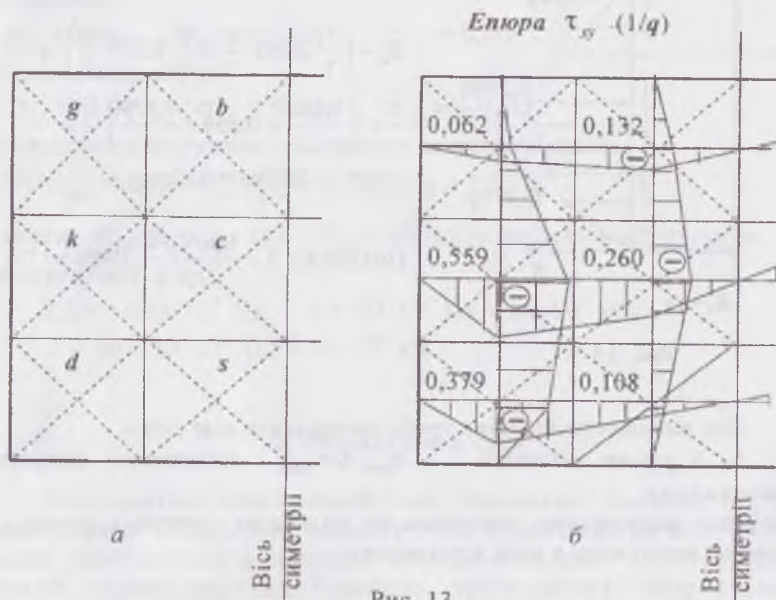


Рис. 13

$$\tau_{xy}^{(g)} = \frac{(0,0 + 0,268) - (1,0 - 0,67)}{a^2} qa^2 = -0,062q;$$

$$\tau_{xy}^{(k)} = \frac{(-0,67 + 0,049) - (0,268 - 0,33)}{a^2} qa^2 = -0,559q;$$

$$\tau_{xy}^{(d)} = \frac{(-0,33 + 0,0) - (0,049 + 0,0)}{a^2} qa^2 = -0,379q;$$

$$\tau_{xy}^{(b)} = \frac{(1,0 + 0,636) - (1,5 + 0,268)}{a^2} qa^2 = -0,132q;$$

$$\tau_{xy}^{(c)} = \frac{(0,157 + 0,268) - (0,636 + 0,049)}{a^2} qa^2 = -0,26q;$$

$$\tau_{xy}^{(s)} = \frac{(0,049 + 0,0) - (0,157 + 0,0)}{a^2} qa^2 = -0,108q.$$

Перевіряємо рівновагу відсіченої частини балки – стінки (рис. 14).

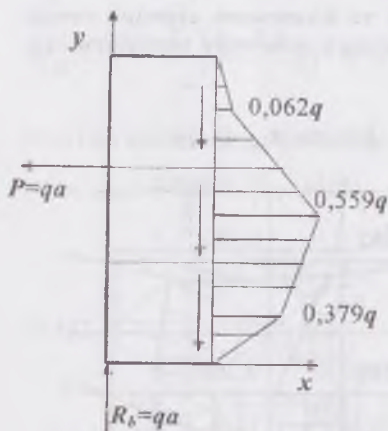


Рис. 14

$$\sum F_y = 0;$$

$$R_b - \left(\frac{1}{2} \cdot 0,062 \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0,379 \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot q - \\ - a \cdot \left(\frac{0,062}{2} + 0,559 + \frac{0,379}{2} \right) \cdot q = \\ = qa - 0,89qa = 0,11qa.$$

$$\text{Похибка: } \Delta = \frac{1,0 - 0,89}{1,0} \cdot 100\% = 11\%.$$

Для зменшення похибки треба зменшувати шаг сітки.

6. З умови міцності $\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm}$ визначаємо допустиме навантаження.

Найбільш напруженою внутрішньою вузловою точкою є точка – 1, значення напружень в якій дорівнюють:

$$\sigma_{xx} = 0,513q; \quad \sigma_{yy} = -0,570q; \\ \tau_{xy} = \frac{(\varphi_{10} + \varphi_4) - (\varphi_{12} + \varphi_8)}{4a^2} = \\ = \frac{(0,0 + 0,157) - (1,5 - 0,33)}{4a^2} qa^2 = -0,25q$$

Визначаємо значення головних напружень. Два з них

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ = \left(\frac{0,513 - 0,57}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,513 + 0,57}{2} \right)^2 + (-0,25)^2} \right) \cdot q =$$

$$= (-0,028 \pm 0,596) \cdot q;$$

$$\text{третє } \sigma_3 = 0.$$

Отже, головні напруження:

$$\sigma_{11} = 0,568q; \quad \sigma_{22} = 0,0q; \quad \sigma_{33} = -0,624q.$$

Еквівалентне напруження за третьою теорією міцності

$$\sigma_{екв} = \sigma_{11} - \sigma_{33} = (0,568 - (-0,624)) \cdot q = 1,192q.$$

Найбільш напруженою контурною точкою є точка 7, напруження в якій порівнюють:

$$\sigma_{xx} = 0,0q; \quad \sigma_{yy} = -2,0q; \quad \tau_{xy} = 0,0q.$$

Головні напруження:

$$\sigma_{11} = 0,0q; \quad \sigma_{22} = 0,0q; \quad \sigma_{33} = -2,0q.$$

Еквівалентне напруження за третьою теорією міцності

$$\sigma_{екв} = \sigma_{11} - \sigma_{33} = (0,0 - (-2,0)) \cdot q = 2,0q.$$

З умови $\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm}$ при $\sigma_{adm} = 160$ МПа визначаємо допустиме навантаження q .

$$2,0q = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad q = 80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80 \cdot 10^3 \text{ кПа}.$$

$$P = qa = 80 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = 40 \cdot 10^3 \text{ кН}.$$

3. Розрахунок клина

Розглядається нескінченний клин “одиничної” товщини під дією навантаження (сили або моменту), яке прикладене на вістрі клина. Задача розв'язується в полярній системі координат з застосуванням функції напружень, яка повинна задовольняти бігармонічному рівнянню

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(r, \gamma) = 0, \quad (12)$$

і граничним умовам

$$q_r = \sigma_{rr} \cdot n_r + \tau_{r\gamma} \cdot n_\gamma;$$

$$q_\gamma = \tau_{r\gamma} \cdot n_r + \sigma_{\gamma\gamma} \cdot n_\gamma, \quad (13)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2}$ - оператор Лапласа,

q_r, q_γ - складові зовнішнього навантаження в точці поверхні;

n_r, n_γ - напрямні косинуси зовнішньої нормалі в даній точці поверхні.

В полярній системі координат напруження визначаються виразами:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2}; & \sigma_{r\gamma} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\gamma} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \gamma}.\end{aligned}\quad (14)$$

Дія сили на нескінченний клин

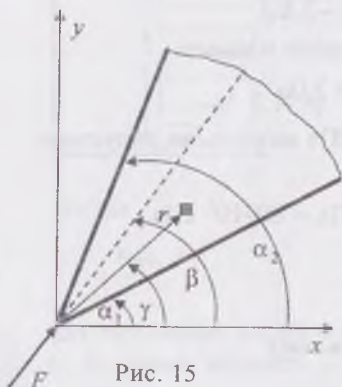


Рис. 15

Початок систем координат вибираємо на вістрі клина. Клин обмежується двома гранями (рис. 15), які повернуті відносно

осі x на кути α_1 і α_2 . Довільна точка клина

має координати r і γ , де $\alpha_1 \leq \gamma \leq \alpha_2$.

Кут між лінією дії сили і віссю x позначаємо β . Кути β , γ , α_1 і α_2 - додатні, якщо відраховуються від осі x проти ходу

годинникової стрілки.

Функція напружень для даної задачі

має вигляд:

$$\phi = A \cdot \gamma \cdot r \cdot \sin \gamma - B \cdot \gamma \cdot r \cdot \cos \gamma.$$

Вона задовольняє рівнянню (12) і граничним умовам (13).

В відповідності до виразів (14) напруження дорівнюють:

$$\sigma_{r\gamma} = 0; \quad \tau_{r\gamma} = 0;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{F}{r(a^2 - b^2 - c^2)} \{ [(a - c) \cdot \cos \beta - b \cdot \sin \beta] \cdot \cos \gamma + \\ &+ [(a + c) \cdot \sin \beta - b \cdot \cos \beta] \cdot \sin \gamma \},\end{aligned}$$

$$\text{де } a = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}; \quad b = \frac{\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1}{2};$$

$$c = \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2}.$$

Такий напружений стан називається простим радіальним. Але одержана формула для визначення радіальних напружень досить громіздка, тому в більшості випадків доцільно користуватися частинними випадками.

а) Сила діє вздовж бісектриси клина

В полярній системі координат:

$$\alpha_1 = -\alpha; \quad \alpha_2 = \alpha; \quad \beta = 0;$$

$$a = \alpha; \quad b = 0; \quad c = \frac{\sin 2\alpha}{2};$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F \cos \gamma}{r \cdot (2\alpha + \sin 2\alpha)}.$$

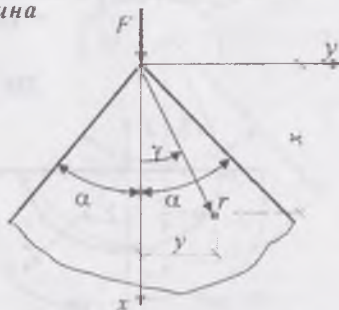


Рис. 16

В декартовій системі координат:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2 \gamma = -\frac{2F \cos^3 \gamma}{r \cdot (2\alpha + \sin 2\alpha)} = -\frac{2F \cdot x^3}{(x^2 + y^2)^2 (2\alpha + \sin 2\alpha)};$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2 \gamma = -\frac{2F \cos \gamma \sin^2 \gamma}{r \cdot (2\alpha + \sin 2\alpha)} = -\frac{2F \cdot xy^2}{(x^2 + y^2)^2 (2\alpha + \sin 2\alpha)};$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{rr} \sin \gamma \cos \gamma = -\frac{2F \cos^2 \gamma \sin \gamma}{r \cdot (2\alpha + \sin 2\alpha)} = -\frac{2F \cdot x^2 y}{(x^2 + y^2)^2 (2\alpha + \sin 2\alpha)}.$$

б) Сила діє перпендикулярно бісектрисі клина

В полярній системі координат:

$$\alpha_1 = -\alpha; \quad \alpha_2 = \alpha; \quad \beta = \frac{\pi}{2};$$

$$a = \alpha; \quad b = 0; \quad c = \frac{\sin 2\alpha}{2};$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F \sin \gamma}{r \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha)}.$$

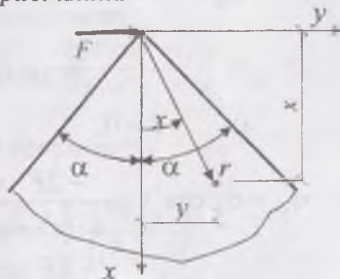


Рис. 17

В декартовій системі координат:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2 \gamma = -\frac{2F \cos^2 \gamma \sin \gamma}{r \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha)} = -\frac{2F \cdot x^2 y}{(x^2 + y^2)^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)};$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2 \gamma = -\frac{2F \sin^3 \gamma}{r \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha)} = -\frac{2F \cdot y^3}{(x^2 + y^2)^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)};$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \gamma \cos \gamma = -\frac{2F \cos \gamma \sin^2 \gamma}{r \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha)} = -\frac{2F \cdot xy^2}{(x^2 + y^2)^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

Дія сили на півплощину

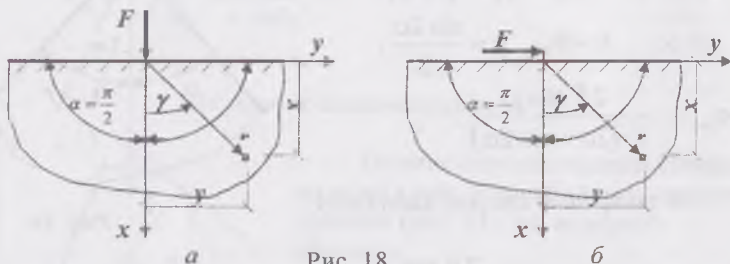


Рис. 18

В полярній системі координат:

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}; \quad a = \pi; \quad b = 0; \quad c = 0;$$

а) $\beta = 0,$

б) $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \gamma}{r\pi};$$

$$\sigma_r = -\frac{2F \sin \gamma}{r\pi}.$$

В декартовій системі координат:

а) $\beta = 0,$

б) $\beta = \frac{\pi}{2},$

$$\sigma_{xx} = \sigma_r \cos^2 \gamma = \frac{-2F \cdot x^3}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2}; \quad \sigma_{xx} = \sigma_r \cos^2 \gamma = \frac{-2F \cdot x^2 y}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2};$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_r \sin^2 \gamma = \frac{-2F \cdot xy^2}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2}; \quad \sigma_{yy} = \sigma_r \sin^2 \gamma = \frac{-2F \cdot y^3}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2};$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \gamma \cos \gamma = \frac{-2F \cdot x^2 y}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2};$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \gamma \cos \gamma = \frac{-2F \cdot xy^2}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2};$$

Дія моменту на нескінченний клин

Початок системи координат вибираємо на вістрі клина, а вісь x направляємо вздовж бісектриси клина.

Функція напружень для даної задачі має вигляд:

$$\varphi = A \cdot \gamma + B \cdot \gamma \cdot \sin 2\gamma.$$

Вона задовольняє рівнянню (12) і граничним умовам (13).

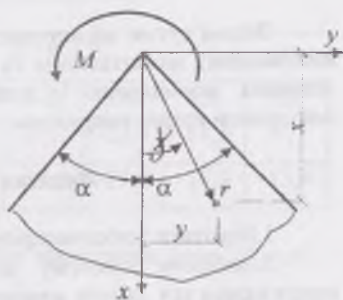


Рис. 19

В відповідності до виразів (14) напруження дорівнюють:

$$\sigma_{rr} = \frac{2M \sin 2\gamma}{r^2 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}; \quad \tau_{r\gamma} = \frac{-M (\cos 2\gamma - \cos 2\alpha)}{r^2 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}; \quad \sigma_{\gamma\gamma} = 0.$$

Дія моменту на півплощину

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

В полярній системі координат:

$$\sigma_{rr} = \frac{2M \sin 2\gamma}{\pi \cdot r^2}; \quad \tau_{r\gamma} = \frac{-M (\cos 2\gamma + 1)}{\pi \cdot r^2} = \frac{-2M \cos^2 \gamma}{\pi \cdot r^2}; \quad \sigma_{\gamma\gamma} = 0.$$

В декартовій системі координат:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2 \gamma - \tau_{r\gamma} \sin 2\gamma = \frac{8M \sin \gamma \cos^3 \gamma}{\pi \cdot r^2} = \frac{8Mx^3 y}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^3};$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2 \gamma + \tau_{r\gamma} \sin 2\gamma = \frac{-4M \sin 2\gamma \cos 2\gamma}{\pi \cdot r^2} = \frac{-4Mxy(x^2 - y^2)}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^3};$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{rr}}{2} \sin 2\gamma + \tau_{r\gamma} \cos 2\gamma = \frac{2M \cos^2 \gamma (2 \sin^2 \gamma - \cos 2\gamma)}{\pi \cdot r^2} = \frac{2Mx^2 (3y^2 - x^2)}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^3}$$

Вихідні дані та постановка задачі

Відомі кутові характеристики нескінченного клина (частинний випадок півплощина), навантаження та місця його прикладання. Потрібно визначити значення нормальних і дотичних напружень в заданому перерізі та побудувати епюри напружень.

Вказівки до виконання завдання

1. Намітити точки перерізу, в яких будуть визначатись напруження.
2. Вибрати систему координат, в якій будуть визначатись напруження від даного навантаження.
3. Визначити значення і побудувати епюри нормальних та дотичних напружень від даного навантаження.
4. Якщо на клин діє кілька навантажень, використати принцип суперпозиції, виконати пункти 2,3 для кожного навантаження. Якщо на клин діє рівномірно-розподілене навантаження, його довжину поділити на ділянки і дію розподіленого навантаження замінити зосередженими силами, прикладеними посередині ділянок.
5. Побудувати сумарні епюри нормальних та дотичних напружень в заданому перерізі.

Приклад 3.

Для півплощини (рис. 18,а) з навантаженням у вигляді вертикальної $F_1=300$ кН на горизонтальній $F_2=150$ кН сил, визначити та побудувати епюри нормальних і дотичних напружень в горизонтальному перерізі $h=2,0$ м.

1. В перерізі намічаємо 9 точок з кроком 0,5 м (з розрахунку щоб охопити зони на два кроки зовні від точок прикладення сил) рис. 20.а.

2. Початок координат розміщуємо в точці прикладення сил F_1 (рис. 20,б).

3. Значення нормальних та дотичних напружень визначаються за формулами:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2F \cdot x^3}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{2F \cdot x^2 y}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2}.$$

При $x=2,0$ м. і навантаженні $F_1=300$ кН отримусмо вирази для обчислення напружень

$$\sigma_{xx} = -\frac{2 \cdot 300 \cdot 2^3}{\pi \cdot (2^2 + y^2)^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{2 \cdot 300 \cdot 2^2 y}{\pi \cdot (2^2 + y^2)^2}.$$

Визначаємо значення напружень в точках перерізу.

Напруження, кПа	Координата у, м								
	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
σ_{xx}	-61,1	-84,6	-95,5	-84,6	-61,1	-39,1	-23,9	-14,5	-9,1
τ_{yx}	30,6	21,2	0,0	-21,2	-30,6	-29,3	-23,9	-18,2	-13,6

Будуємо епюри нормальних та дотичних напружень (рис. 20,в,г).

3. Розміщуємо початок системи координат в точці де прикладена сила $F_2=150$ кН (рис. 20,д). Значення нормальних та дотичних напружень визначаються за формулами:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2F \cdot x^2 y}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{2F \cdot xy^2}{\pi \cdot (x^2 + y^2)^2}.$$

При $x=2,0$ м. і навантажені $F_2=-150$ кН отримуємо вирази для обчислення напружень

$$\sigma_{xx} = -\frac{2 \cdot (-150) \cdot 2^2 y}{\pi \cdot (2^2 + y^2)^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{2 \cdot (-150) \cdot 2 \cdot y^2}{\pi \cdot (2^2 + y^2)^2}.$$

Визначаємо значення напружень в точках перерізу.

Напруження, кПа	Координата у, м								
	-3,0	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0
σ_{xx}	-2,3	-9,1	-11,9	-14,7	-15,3	-10,6	0,0	10,6	15,3
τ_{yx}	10,2	11,4	11,9	11,0	7,6	2,6	0,0	2,6	-7,6

Будуємо епюри нормальних та дотичних напружень від дії сили F_2 (рис. 20,е,ж), і сумарні епюри від дії обох сил (рис. 20,з,і).

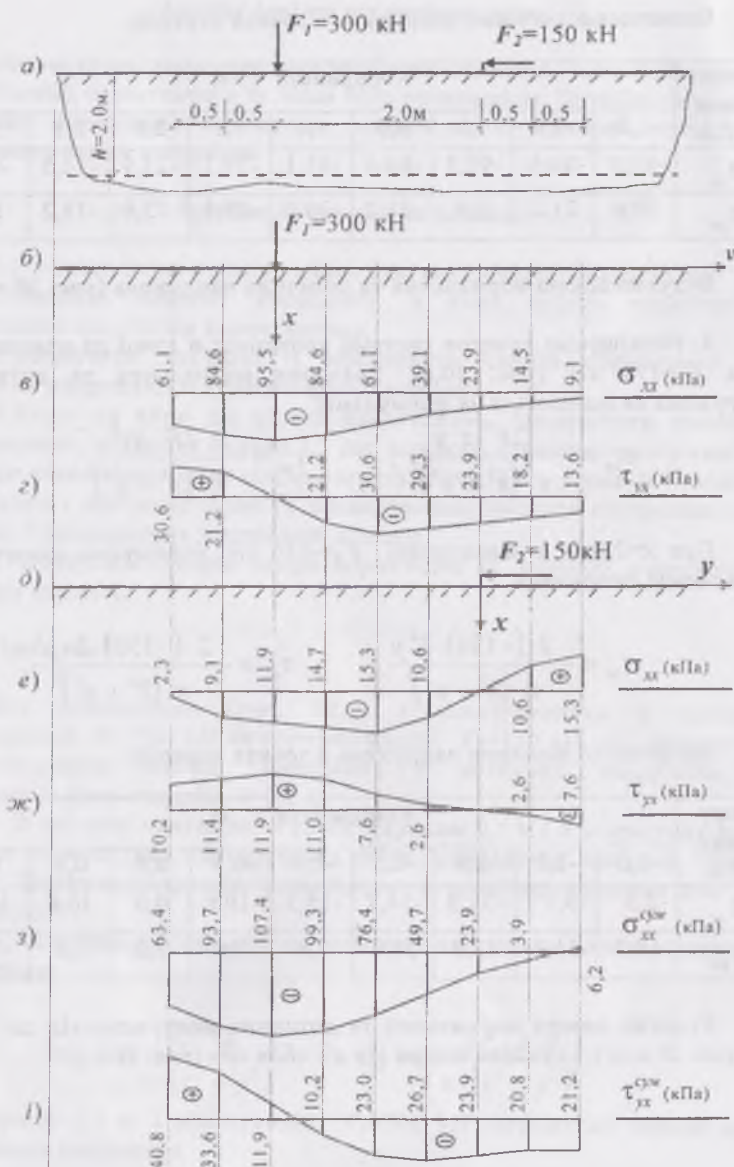
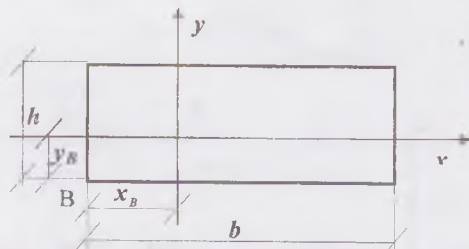


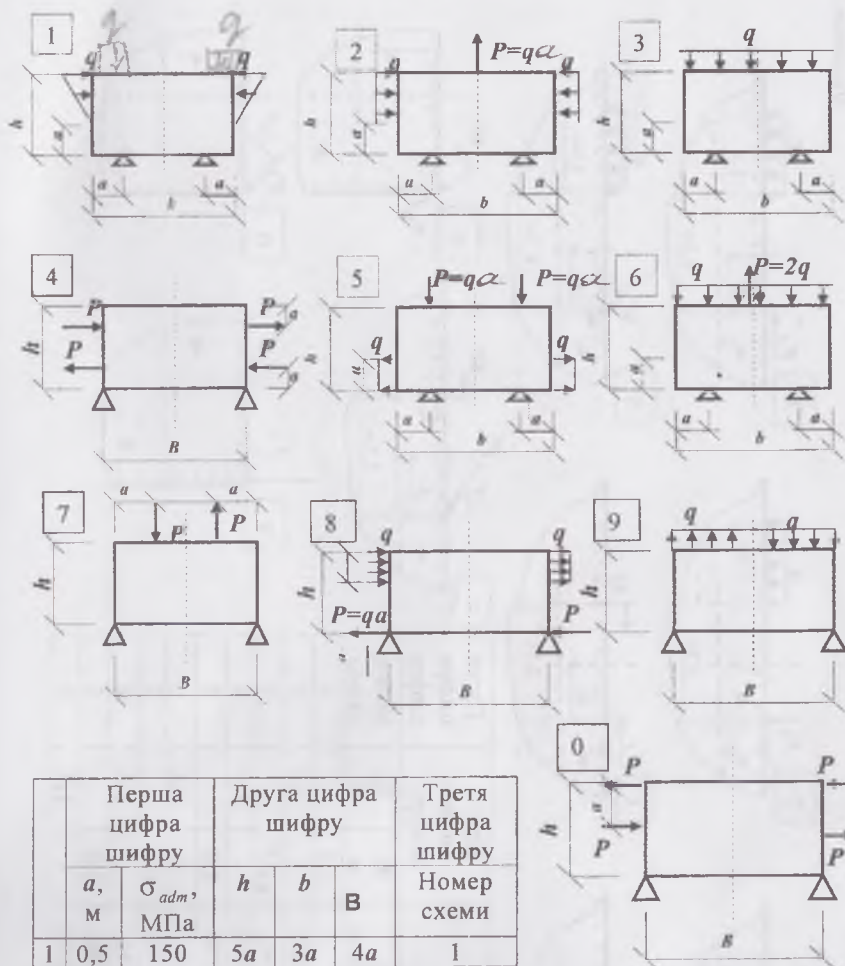
Рис. 20

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

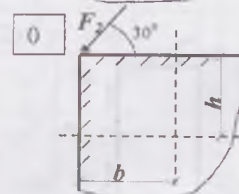
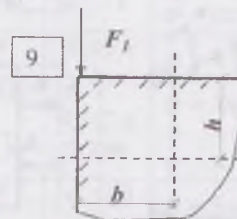
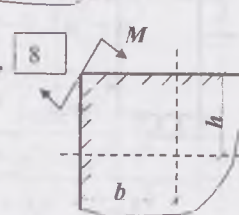
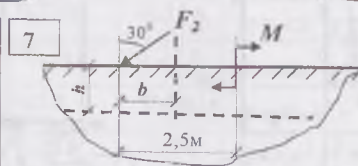
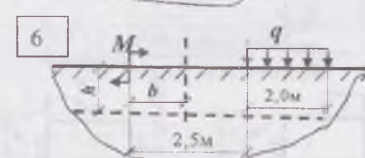
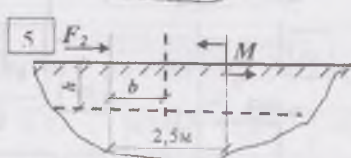
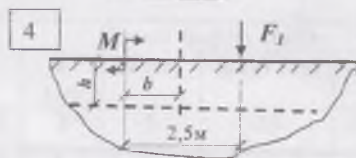
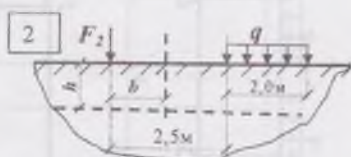
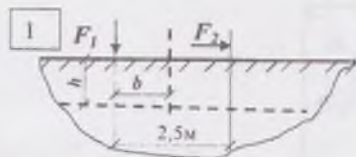
1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести: Учеб. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
2. Справочник по теории упругости / Под ред. П.М. Варвака и А.Ф. Рябова. – К.: Будівельник, 1971. – 419 с.
3. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: Підручник / За ред. проф. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – Ч. 1; кн. 3. – 272 с.
4. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. – М.: Наука, 1984. – 319 с.



	Перша цифра шифру				Друга цифра шифру				Третя цифра шифру
	h (м)	b (м)	E (ГПа)	μ	x_B (м)	y_B (м)	x_K (м)	y_K (м)	Функція напружень
1	3	5	20	0,15	0,0	$-0,5h$	$0,2b$	$-0,25h$	$\varphi = cx^2y^2 + 0,25x^4 - y^4$
2	3	4	25	0,20	$-0,25b$	$-0,5h$	$0,25b$	$-0,33h$	$\varphi = cx^2y^3 - 0,2y^5 + x^3$
3	4	3	30	0,15	$-b$	$-0,5h$	$-0,33b$	$0,25h$	$\varphi = cx^3y^2 + x^5 - y^3$
4	5	2	35	0,20	0,0	0,0	$0,5b$	$0,5h$	$\varphi = 0,25x^4 + cx^2y^2 - y^4$
5	4	3	40	0,15	0,0	$-h$	$0,25b$	$-0,5h$	$\varphi = x^2y^2 + x^4 - cy^4$
6	3	4	35	0,20	$-0,5b$	0,0	$-0,33b$	$0,33h$	$\varphi = cx^2y^3 + xy^3 - 0,2y^5$
7	2	5	30	0,15	$-0,5b$	$-h$	$0,25b$	$-0,25h$	$\varphi = x^4y - 2x^2y^3 + cy^5$
8	5	4	25	0,20	0,0	$-0,5h$	$0,375b$	$0,167h$	$\varphi = cxy^4 - 2x^3y^2 + x^5$
9	3	6	20	0,15	$-b$	$-0,5h$	$-0,75b$	$0,25h$	$\varphi = x^2y^2 - x^4 + 0,25cy^4$
0	4	5	30	0,20	0,0	$-h$	$0,33b$	$-0,33h$	$\varphi = 5x^3y^2 - cx^5 + y^3$



	Перша цифра шифру		Друга цифра шифру			Третя цифра шифру Номер схеми
	a , м	σ_{adm} , МПа	h	b	B	
1	0,5	150	$5a$	$3a$	$4a$	1
2	0,4	160	$3a$	$4a$	$5a$	2
3	0,3	170	$3a$	$5a$	$6a$	3
4	0,6	180	$5a$	$3a$	$4a$	4
5	0,5	160	$3a$	$4a$	$5a$	5
6	0,4	170	$3a$	$5a$	$6a$	6
7	0,3	160	$3a$	$4a$	$5a$	7
8	0,4	170	$3a$	$5a$	$6a$	8
9	0,5	180	$5a$	$3a$	$4a$	9
0	0,6	140	$5a$	$3a$	$4a$	0



	Перша цифра шифру				Друга цифра шифру		Третя цифра шифру
	F_1 , кН	F_2 , кН	M , кНм	q , кН/м	h , м	b , м	Номер схеми
1	150	170	160	70	1,5	-	1
2	180	270	170	80	-	0,5	2
3	210	250	180	90	+2,5	-	3
4	240	220	210	100	-	1,0	4
5	170	160	240	120	2,0	-	5
6	270	170	170	90	-	1,5	6
7	250	180	150	70	1,5	-	7
8	220	210	180	50	-	2,0	8
9	160	240	210	90	2,0	-	9
0	170	170	240	100	-	1,5	0