



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Мурсков Ю.А., Єременко В.С.  
Корбаков О.Ф.

## ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Методичні рекомендації та завдання  
до виконання розрахунково-графічних робіт  
для студентів будівельних спеціальностей

Розрахунок стержнів на розтягання (стискання)  
Геометричні характеристики плоских перерізів  
Побудова епюр зусиль  
Розрахунок прокатної балки  
Розрахунок вала на кручення

Завдання для групи ЗПЦБ-301, 302  
РГР №1, 2, 3

## Загальні рекомендації

Методичні рекомендації призначені для виконання розрахунково-графічних завдань студентами будівельних спеціальностей по темам, які вивчаються в першому семестрі курсу дисципліни "Опір матеріалів".

Для кожного завдання наведені план, вказівки до реалізації всіх етапів розрахунку та числовий приклад.

Розрахунково-графічну роботу студент виконує за особистим завданням, умова якого визначається згідно з шифром у вигляді тризначного числа, які співпадають з трьома останніми цифрами номера залікової книжки (або вказується викладачем у вигляді тризначного числа). Перші дві цифри шифру відповідають варіантам геометричних розмірів і величинам силових факторів, а остання – варіанту розрахункової схеми. Дані до умов завдань приведені у додатку в табл. 1-6 і рис. Д-1 – Д-6

Розрахунково-графічна робота виконується на аркушах формату А-4 / 297 x 210 мм /, які зшиваються в альбом – з лівого боку. Кожне завдання слід починати з нової сторінки. Спочатку треба привести задану розрахункову схему з буквеними позначеннями і вписати числові дані свого варіанту, потім накреслити схему в масштабі з числовими значеннями розмірів і силових факторів.

Розрахунки та пояснення слід писати на одній стороні аркуша чорнилом (кульковою ручкою), а рисунки дозволяється виконувати олівцем. Виконуючи кожен етап розрахунків, спочатку треба записати розрахункову формулу, підставити числові дані, потім кінцевий результат з одиницею виміру отриманої величини

Завдання, виконане студентом з порушенням наведених правил, не зараховується.

Кожна правильно виконана розрахунково-графічна робота підлягає захисту.

Завдання повинно мати титульний аркуш за такою формою.

Київський Національний університет будівництва і архітектури  
Кафедра опору матеріалів

### РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №

Тема \_\_\_\_\_

Виконав студент \_\_\_\_\_ (група, спеціальність, шифр)  
\_\_\_\_\_ (прізвище, ініціали)

Керівник \_\_\_\_\_ (прізвище, ініціали)

Київ – 200\_ рік

### Задача 1. Розрахунок статично визначуваного стержня

Ступінчастий стержень навантажений силами  $F_1$  і  $F_2$

Потрібно:

1. Скласти рівняння поздовжніх сил  $N(x)$  для кожної ділянки стержня, обчислити значення поздовжніх сил в характерних перерізах, побудувати епюру  $N$ .

2. Обчислити значення нормального напруження в характерних перерізах, побудувати епюру  $\sigma$  і перевірити міцність стержня при допустимому напруженні  $\sigma_{adm} = 1000$  кПа.

3. Визначити абсолютну поздовжню деформацію кожної ділянки і всього стержня, прийнявши величину модуля пружності  $E = 1,6 \cdot 10^8$  кПа.

4. Знайти поздовжні переміщення характерних перерізів стержня і побудувати епюру  $U$  (переміщення).

Всі розрахунки виконати без врахування власної ваги матеріалу.

Вихідні дані взяти з табл.1 і рис. Д-1.

**Вказівки.** Ступінчастий стержень слід по довжині розбити на ділянки. Межами ділянок є перерізи, де прикладені сили, і перерізи, де змінюється площа.

При складанні рівняння поздовжньої сили на кожній ділянці використовується метод перерізів. При цьому доцільно розглядати умову рівноваги вільної (незакріпленої) частини стержня. Нормальні напруження визначаються діленням поздовжньої сили на площу поперечного перерізу стержня даної ділянки. Перевірка міцності повинна завершуватися висновком: міцність забезпечена, не забезпечена з надмірним запасом, не забезпечена.

Абсолютна поздовжня деформація будь-якої ділянки довжиною  $\ell$  визначається так

$$\Delta \ell = \frac{N_0 \ell}{EA}$$

де  $N_0$  - значення поздовжньої сили початкового перерізу ділянки, що розглядається;  $\Delta \ell$  - абсолютна поздовжня деформація стержня дорівнює сумі поздовжніх деформацій його ділянок. Ця величина чисельно дорівнює площі епюри нормальних напружень  $\omega_\sigma$ , поділеній на модуль пружності  $E$ , що може бути використано для перевірки розв'язку.

Поздовжні переміщення слід визначати для всіх характерних перерізів і перерізів. Вони обчислюються послідовно, до відомого значення  $U$  додається абсолютна деформація наступної ділянки.

Починати слід завжди з крайнього закріпленого перерізу, для якого величина  $U$  дорівнює нулю. Якщо закріплений нижній кінець, то при обчисленні переміщень деформація наступної ділянки враховується з оберненим знаком. Переміщення вільного кінця стержня повинно вийти рівним повній поздовжній деформації  $\Delta \ell$ .

Для стержня, розрахованого без врахування власної ваги, епюра  $U$  на кожній ділянці змінюється за лінійним законом. В характерних перерізах на епюрі  $U$  мають місце переломи.

**Приклад 1.** Схема стержня, що розраховується, зображена на рис.1,а.

Вихідні дані такі:  $a=5\text{м}$ ;  $b=3\text{м}$ ;  $c=4\text{м}$ ;  $A_1=0,5\text{м}^2$ ,  $A_2=0,3\text{м}^2$ ;  $F_1=240\text{кН}$ ,  $F_2=60\text{кН}$ .

А. Розрахунок стержня без врахування власної ваги матеріалу.

Розділимо довжину стержня на три ділянки і складемо для них рівняння поздовжньої сили.

Ділянка I (рис. 1,б);  $0 \leq x \leq 4\text{м}$

$$\sum X = 0; \quad N_1 + F_1 = 0; \quad N_1 = -F_1 = -240\text{кН}.$$

Ділянка II (рис. 1,в);  $4 \leq x \leq 7\text{м}$

$$\sum X = 0; \quad N_2 + F_1 = 0; \quad N_2 = -F_1 = -240\text{кН}.$$

Ділянка III (рис. 1,г)  $7 \leq x \leq 12\text{м}$

$$\sum X = 0; \quad N_3 + F_1 - F_2 = 0; \quad N_3 = -F_1 + F_2 = -240 + 60 = -180\text{кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил  $N$  (рис. 2,а).

Визначаємо нормальні напруження на ділянках

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-240}{0,5} = -480 \text{ кПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-240}{0,3} = -800 \text{ кПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-180}{0,3} = -600 \text{ кПа}.$$

Будуємо епюру  $\sigma$  (рис 2,б).

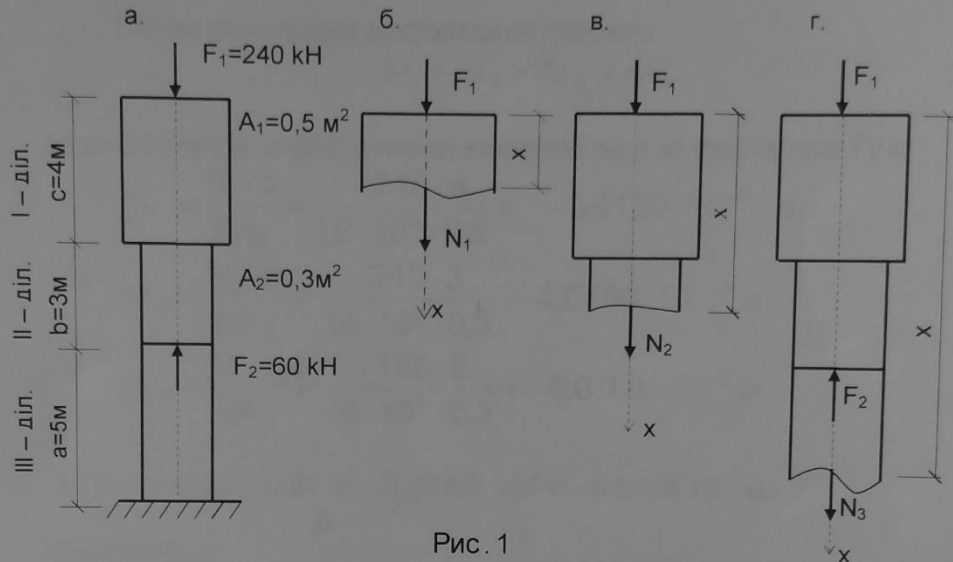


Рис. 1

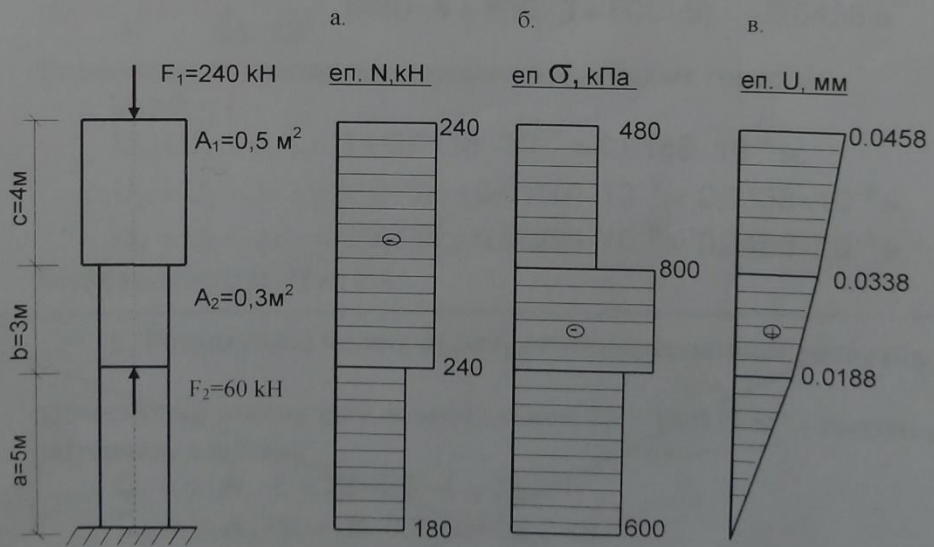


Рис. 2

4

Небезпечними є перерізи в межах ділянки II.  
 $\sigma_{\max} = |800| \text{ кПа} \leq \sigma_{\text{adm}} = 1000 \text{ кПа}$ , тобто умова міцності виконується.

Повна абсолютна деформація стержня

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3,$$

де деформація кожної ділянки визначається за формулою Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot c}{EA_1} = \frac{-240 \cdot 4}{1,6 \cdot 10^8 \cdot 0,5} = -0,0120 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{EA_2} = \frac{-240 \cdot 3}{1,6 \cdot 10^8 \cdot 0,3} = -0,0150 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot a}{EA_2} = \frac{-180 \cdot 5}{1,6 \cdot 10^8 \cdot 0,3} = -0,0188 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l = - (0,0120 + 0,0150 + 0,0188) \cdot 10^{-3} = -0,0458 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Перевірка

$$\Delta l = \frac{\omega_{\sigma}}{E} = -\frac{1}{1,6 \cdot 10^8} \cdot (480 \cdot 4 + 800 \cdot 3 + 600 \cdot 5) = -0,0458 \text{ м}.$$

Визначаємо поздовжні переміщення характерних перерізів

$$U_0 = 0,$$

$$U_1 = U_0 + \Delta l_3 = 0 + 0,0188 \cdot 10^{-3} = 0,0188 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$U_2 = U_1 + \Delta l_2 = (0,0188 + 0,0150) \cdot 10^{-3} = 0,0338 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$U_3 = U_2 + \Delta l_1 = (0,0338 + 0,0120) \cdot 10^{-3} = 0,0458 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Будуємо епюру  $U$  (рис 2,в).

~~Б. Розрахунок стержня з врахуванням власної ваги матеріалу.~~

~~Обчислюємо власну вагу кожної ділянки ( $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$  - питома вага матеріалу стержня)~~

$$~~Q_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot c = 18 \cdot 0,5 \cdot 4 = 36 \text{ кН};~~$$

$$~~Q_2 = \gamma \cdot A_2 \cdot b = 18 \cdot 0,3 \cdot 3 = 16,2 \text{ кН};~~$$

$$~~Q_3 = \gamma \cdot A_2 \cdot a = 18 \cdot 0,3 \cdot 5 = 27 \text{ кН}.~~$$

~~Складаємо рівняння поздовжньої сили~~

~~Ділянка I (рис 3,б)  $0 \leq x \leq 4 \text{ м};$~~

### Задача 3. Визначення геометричних характеристик поперечних перерізів

Поперечний переріз складається з двох елементів: двотавра або швелера і рівнобічного кутка.

**Потрібно:**

1. Виписати з таблиці сортаменту необхідні розміри і геометричні характеристики для кожного елемента перерізу.

2. Визначити положення центра ваги складеного перерізу.

3. Визначити осьові і відцентровий моменти інерції відносно центральних осей.

4. Визначити положення головних осей інерції і знайти величини головних моментів інерції.

5. Обчислити головні центральні радіуси інерції і побудувати еліпс інерції.

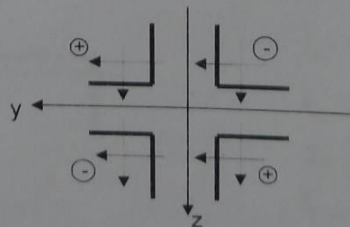
6. Визначити моменти опору перерізу відносно головних центральних осей інерції.

Вихідні дані взяти з табл. 3 і рис. Д-3.

**Вказівки.** При використанні таблиць сортаменту слід звертати увагу на відмінність в позначеннях осей в різних джерелах довідкової літератури. Щоб уникнути помилок, слід також враховувати орієнтацію окремих елементів перерізу відносно прийнятих осей всього перерізу. В стандартах відцентрові моменти інерції прокатних профілів не наведені. Нагадаємо, що для двотавра і швелера  $I_{yz} = 0$ . Для рівнобічного кутка відцентровий момент інерції відносно центральних осей, паралельних полкам, визначається за формулою

$$I_{yz} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}.$$

Знак відцентрового моменту інерції кутка встановлюється в залежності від розміщення його в перерізі і може бути прийнятим в відповідності із схемою



Для визначення положення центра ваги перерізу необхідно вибрати початкові осі. При обчисленні статичних моментів відносно вибраних осей слід враховувати знаки координат центрів ваги окремих елементів. При безпомилковому визначенні положення центру ваги перерізу він і центри ваги окремих двох елементів повинні бути розташовані на одній прямій (графічна перевірка). Остаточною перевіркою визначення положення центру ваги складеного перерізу є рівність нулю статичних моментів площ перерізу відносно центральних осей.

Значення осьових і відцентрового моментів інерції складеного перерізу відносно його центральних осей дорівнюють сумі осьових і відцентрових моментів інерції окремих елементів відносно цих осей. При обчисленні центральних моментів інерції використовуються формули переходу до паралельних осей.

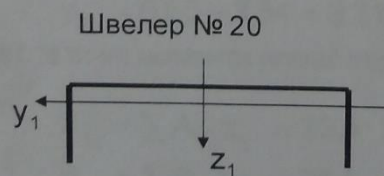
Положення головних центральних осей інерції визначається кутом повороту  $\alpha_0$  відносно центральних осей  $y_c$  і  $z_c$ , величина якого завжди менше  $45^\circ$ . При додатному значенні кута  $\alpha_0$  головні осі повернуті проти ходу годинникової стрілки, при від'ємному – за годинниковою стрілкою.

Головні моменти інерції слід обчислювати за різними формулами: з використанням кута  $\alpha_0$  і без нього.

Необхідно намалювати у великому масштабі поперечний переріз. На кресленні слід показати власні осі кожного елемента, початкові, центральні і головні осі перерізу, кут  $\alpha_0$ , еліпс інерції а також всі відстані, що використовуються в розрахунках.

**Приклад 3.** Поперечний переріз складений з двох елементів: швелера №20 і рівнобічного кутика №12,5 з полицею товщиною 10 мм (рис.6).

Випикуємо з таблиць сортаменту необхідні геометричні характеристики для швелера і кутика.



$$A_1 = 23,4 \text{ см}^2,$$

$$I_{y_1} = 113 \text{ см}^4,$$

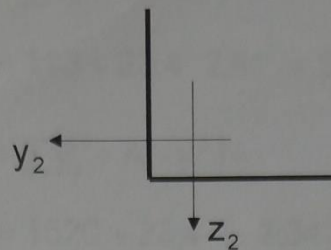
$$I_{z_1} = 1520 \text{ см}^4,$$

$$z_0 = 2,07 \text{ см},$$

$$I_{y_1 z_1} = 0.$$



Рівнобічний кутик 125x10



$$A_2 = 24,3\text{см}^2,$$

$$I_{y_2} = I_{z_2} = 360\text{см}^4,$$

$$I_{\max} = 571\text{см}^4,$$

$$I_{\min} = 149\text{см}^4,$$

$$z_0 = 3,45\text{см},$$

$$I_{y_2 z_2} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = -\frac{571 - 149}{2} = -211\text{см}^4.$$

Визначаємо положення центра ваги перерізу відносно центральних осей швелера.

Координати центрів ваги окремих елементів в осях  $y_1, z_1$ :

$$y_1 = 0; \quad z_1 = 0;$$

$$y_2 = 10 - 3,45 = 6,55\text{см}; \quad z_2 = -(2,07 + 3,45) = -5,52\text{см}.$$

Площа поперечного перерізу

$$A = A_1 + A_2 = 23,4 + 24,3 = 47,7\text{см}^2.$$

Координати центру ваги перерізу відносно осей  $y_1, z_1$ :

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{24,3 \cdot 6,55}{47,7} = 3,34\text{см};$$

$$z_c = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i} = \frac{24,3 \cdot (-5,52)}{47,7} = -2,81\text{см}.$$

Контролюємо достовірність визначення положення центру ваги складеного перерізу. Для цього обчислюємо координати центрів ваги елементів перерізу в координатних осях  $y_c$  та  $z_c$ :

$$y_{c_1} = y_i - y_c;$$

$$z_{c_1} = z_i - z_c;$$

$$y_{c_1} = 0 - 3,34 = -3,34\text{см};$$

$$z_{c_1} = 0 - (-2,81) = 2,81\text{см};$$

$$y_{c_2} = 6,55 - 3,34 = 3,21\text{см};$$

$$z_{c_2} = -5,52 - (-2,81) = -2,71\text{см}.$$

та статичні моменти площі перерізу відносно центральних осей

$$S_{y_c} = \sum A_i \cdot z_{i_c} = 23,4 \cdot 2,81 + 24,3 \cdot (-2,71) = 0,001\text{см}^3 \approx 0;$$

$$S_{z_c} = \sum A_i \cdot y_{i_c} = 23,4 \cdot (-3,34) + 24,3 \cdot 3,21 = -0,15\text{см}^3 \approx 0.$$

Обчислюємо осьові і відцентровий моменти інерції відносно центральних осей  $y_c$  та  $z_c$ :

$$I_{y_c} = \sum (I_y^i + A_i \cdot z_i^2) =$$

$$= 113 + 23,4 \cdot 2,81^2 + 360 + 24,3 \cdot (-2,71)^2 = 836 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c} = \sum (I_z^i + A_i \cdot y_i^2) =$$

$$= 1520 + 23,4 \cdot (-3,34)^2 + 360 + 24,3 \cdot 3,21^2 = 2391 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c z_c} = \sum (I_{yz}^i + A_i \cdot z_i \cdot y_i) =$$

$$= 0 + 23,4 \cdot 2,81 \cdot (-3,34) - 211 + 24,3 \cdot (-2,71) \cdot 3,21 = -642 \text{ см}^4.$$

Визначаємо положення головних центральних осей інерції

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = \frac{2 \cdot (-642)}{2391 - 836} = -0,8257.$$

Звідси

$$2\alpha_0 = -39,54^0; \quad \alpha_0 = -19,77^0.$$

На рисунку відкладаємо від'ємний кут за рухом годинникової стрілки і креслимо головні центральні осі (рис. 6).

Обчислюємо значення головних центральних моментів інерції, використовуючи два види формул. Для цього спочатку знаходимо необхідні тригонометричні функції кута.

$$\cos \alpha_0 = \cos(-19,77^0) = 0,94106;$$

$$\sin \alpha_0 = \sin(-19,77^0) = -0,33825;$$

$$\sin 2\alpha_0 = \sin(-39,54^0) = -0,63662;$$

$$\text{tg} \alpha_0 = \text{tg}(-19,77^0) = -0,3593.$$

Величина головних центральних моментів інерції визначається за формулами

$$I_u = I_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{z_c} \sin^2 \alpha_0 - I_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = 836 \cdot 0,94106^2 +$$

$$+ 2391 \cdot (-0,33825)^2 - (-642) \cdot (-0,63662) = 605 \text{ см}^4;$$

$$I_v = I_{y_c} \sin^2 \alpha_0 + I_{z_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = 836 \cdot (-0,33825)^2 +$$

$$+ 2391 \cdot 0,94106^2 + (-642) \cdot (-0,63662) = 2622 \text{ см}^4.$$

Або

$$I_u = I_{y_c} - I_{y_c z_c} \cdot \text{tg} \alpha_0 = 836 - (-642) \cdot (-0,3593) = 605 \text{ см}^4;$$

$$I_v = I_{z_c} + I_{y_c z_c} \cdot \text{tg} \alpha_0 = 2391 + (-642) \cdot (-0,3593) = 2622 \text{ см}^4.$$

Більший з головних моментів інерції є максимальним, а менший – мінімальним порівняно з осьовими моментами інерції, знайденими відносно всіх інших осей, що проходять через центр ваги.

Значення головних моментів інерції можна визначити за формулами, що не вміщують кут  $\alpha_0$  :

$$I_{u,v} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2} =$$

$$= \frac{836 + 2391}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{836 - 2391}{2}\right)^2 + (-642)^2} = 1613,5 \pm 1008,5;$$

$$I_{v(\max)} = 1613,5 + 1008,5 = 2622 \text{ см}^4;$$

$$I_{u(\min)} = 1613,5 - 1008,5 = 605 \text{ см}^4.$$

У наведених формулах  $I_u$  набуває максимального значення ( $I_u = I_{\max}$ ), а  $I_v$  - мінімального ( $I_v = I_{\min}$ ), якщо  $I_{y_c} > I_{z_c}$ . Якщо  $I_{y_c} < I_{z_c}$ , то ( $I_u = I_{\min}$ ), а ( $I_v = I_{\max}$ ).

Контролем правильності виконання обчислень при визначенні головних моментів інерції є умова інваріантності осьових моментів інерції:

$$I_u + I_v = I_{y_c} + I_{z_c}.$$

$$I_u + I_v = 605 + 2622 = 3227 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} + I_{z_c} = 836 + 2391 = 3227 \text{ см}^4.$$

Головні радіуси інерції перерізу

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{605}{47,7}} = 3,56 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{2622}{47,7}} = 7,41 \text{ см}.$$

На головних центральних осях інерції будується еліпс інерції з півосьми, що дорівнюють головним радіусам інерції. При цьому вздовж осі  $U$  у масштабі відкладаються відрізки  $i_v$ , а вздовж осі  $V$  - відрізки  $i_u$ .

Момент опору перерізу відносно будь-якої з головних осей інерції дорівнює відношенню відповідного центрального моменту інерції до відстані від цієї головної осі до найвіддаленішої точки поперечного перерізу. Положення найвіддаленіших точок визначається дотичними до контуру поперечного перерізу, проведеними паралельно головним центральним осям інерції.

Найбільш віддаленою точкою від осі U є точка Д(6,66; 8,34), а від осі V – В(-13,34; 8,34). Вимірюючи на рисунку відстані до цих точок від відповідних головних осей, отримуємо:  $u_{\max}=15,4$  см;  $v_{\max}=10,1$  см.

Перевіряємо за формулами

$$u_{\max} = y_B \cdot \cos \alpha_0 + z_B \cdot \sin \alpha_0 =$$

$$= -13,34 \cdot 0,94106 + 8,34 \cdot (-0,33825) = -15,38 \text{ см};$$

$$v_{\max} = z_D \cdot \cos \alpha_0 - y_D \cdot \sin \alpha_0 =$$

$$= 8,34 \cdot 0,94106 + 6,66 \cdot (-0,33825) = 10,1 \text{ см};$$

Моменти опору

$$W_u = \frac{I_u}{|v_{\max}|} = \frac{605}{10,1} \approx 60 \text{ см}^3; \quad W_v = \frac{I_v}{|u_{\max}|} = \frac{2622}{15,38} \approx 170 \text{ см}^3.$$

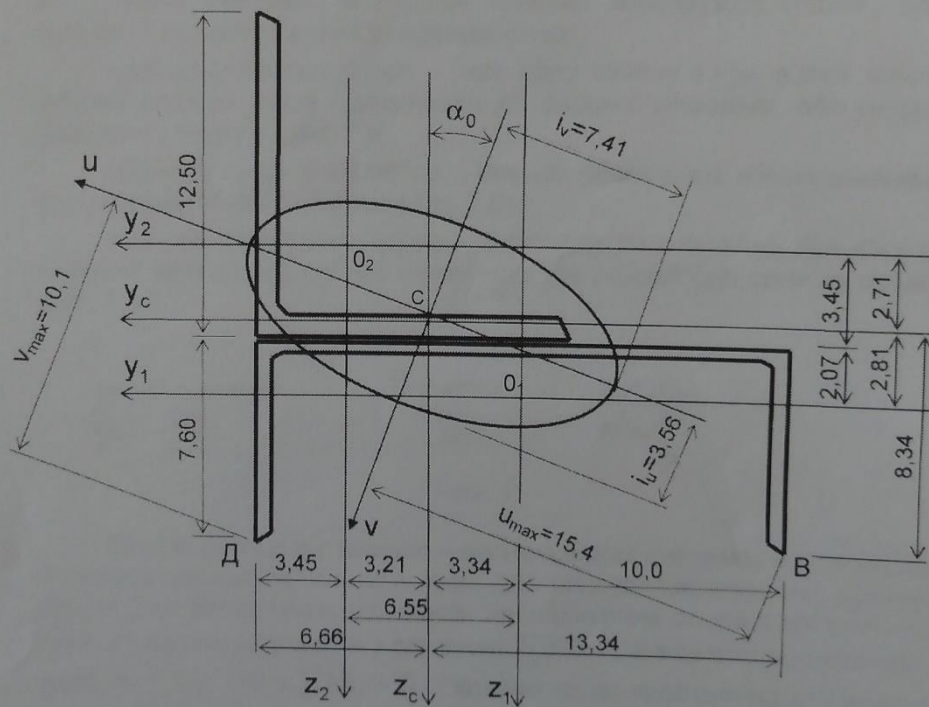


Рис. 6

#### Задача 4. Побудова епюр зусиль.

Наведені схеми статично визначуваних стержневих систем з розмірами і навантаженням.

##### Потрібно:

1. Визначити реакції опор.
2. Поділити систему на ділянки та позначити характерні поперечні перерізи.
3. Обчислити зусилля в характерних перерізах та побудувати епюри зусиль  $N, Q_z, M_y$ .
4. Перевірити побудовані епюри зусиль.

Вихідні дані взяти з табл. 4 та рис. Д-4.1 – Д-4.10.

##### Вказівки.

Величини і напрямки опорних реакцій залежать від умов закріплення системи. В схемах плоских конструкцій (балки, рами, ферми і т.п.) можливі три різновиди опор:

шарнірно-рухома опора - має одну лінійну в'язь, в якій виникає опорна реакція, перпендикулярна до опорної площини, або поздовж опорного стержня (рис. 7, а);

шарнірно-нерухома опора - має дві лінійні в'язі, в яких виникають дві складові опорної реакції (рис. 7, б);

жорстко закріплена опора - накладає на стержень три в'язі (дві лінійні й одну кутову), в них виникають три реакції (дві сили та момент) (рис. 7, в).

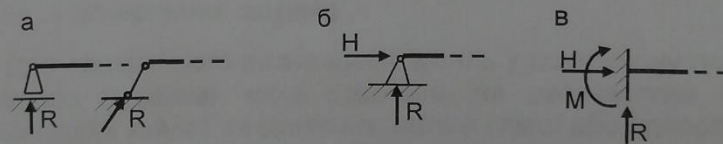


Рис. 7

Опорні реакції в статично – визначуваних системах визначаються з рівнянь рівноваги, кількість яких для плоскої системи сил дорівнює трьом. Для балок і рам, що мають дві шарнірних опори, горизонтальну реакцію можна визначити з рівняння  $\sum X = 0$ , а вертикальні реакції – з рівнянь  $\sum M_A = 0$  і  $\sum M_B = 0$ . Рівняння суми проекцій на вертикальну вісь  $\sum Z = 0$  використовується для контролю.

Для балок з шарнірами, крім вище вказаних рівнянь рівноваги, слід додатково скласти рівняння рівності нулю суми моментів усіх сил, що знаходяться з одного боку від кожного шарніру  $\sum M_{ш}^{ліб} = 0$

або  $\sum M_{\omega}^{np} = 0$ . Опорні реакції (зусилля) для таких систем можна також визначати поділяючи їх на прості балки.

При побудові епюр зусиль в стержнях (прямолінійних і ламаних), жорстко закріплених одним кінцем, визначати опорні реакції необов'язково.

Якщо на стержень діє розподілене навантаження, то при визначенні реакцій його заміняють на зосереджену силу, яка дорівнює площі епюри навантаження і прикладається в центрі ваги цієї площі.

Напрямок опорних реакцій при складанні рівнянь рівноваги можна вибирати довільно. Якщо при розрахунках будь-яка реакція виявляється від'ємною, то слід замінити на рисунку її напрям на протилежний і надалі вважати цю реакцію додатною.

При завантаженні стержня в одній площині виникають три зусилля (рис. 8).

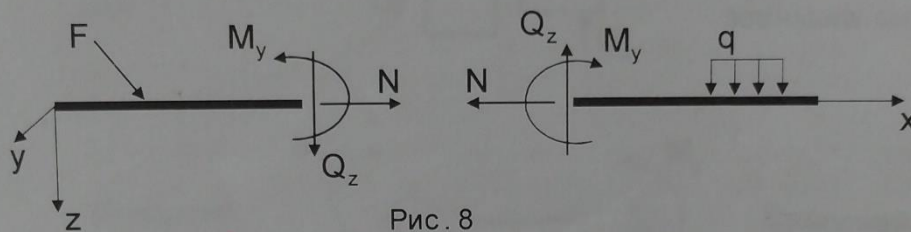


Рис. 8

$N$  - поздовжня (нормальна) сила;  $Q_z$  - поперечна сила;

$M_y$  - згинальний момент.

Для практичного визначення зусиль у довільному перерізі умовно розрізаємо в цьому місці стержень на дві частини і враховуємо зовнішні сили однієї з відсічених частин (лівої або правої). Тут і надалі під "зовнішніми силами" вважатимемо зосереджені і розподілені сили та моменти, включаючи реакції опорних закріплень.

Поздовжня сила  $N$  у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на поздовжню вісь стержня  $x$  всіх зовнішніх сил, які прикладені до однієї з його відсічених частин.

Поперечна сила  $Q_z$  у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь  $z$ , (нормаль) до осі стержня  $x$  усіх зовнішніх сил, прикладених до однієї з його відсічених частин.

Згинальний момент  $M_y$  у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно головної осі перерізу у усіх зовнішніх сил, прикладених до однієї з його відсічених частин.

На рис. 8 вказані додатні напрямки зусиль.

У даному випадку доцільно користуватися правилом знаків, наведеним на рис. 9.

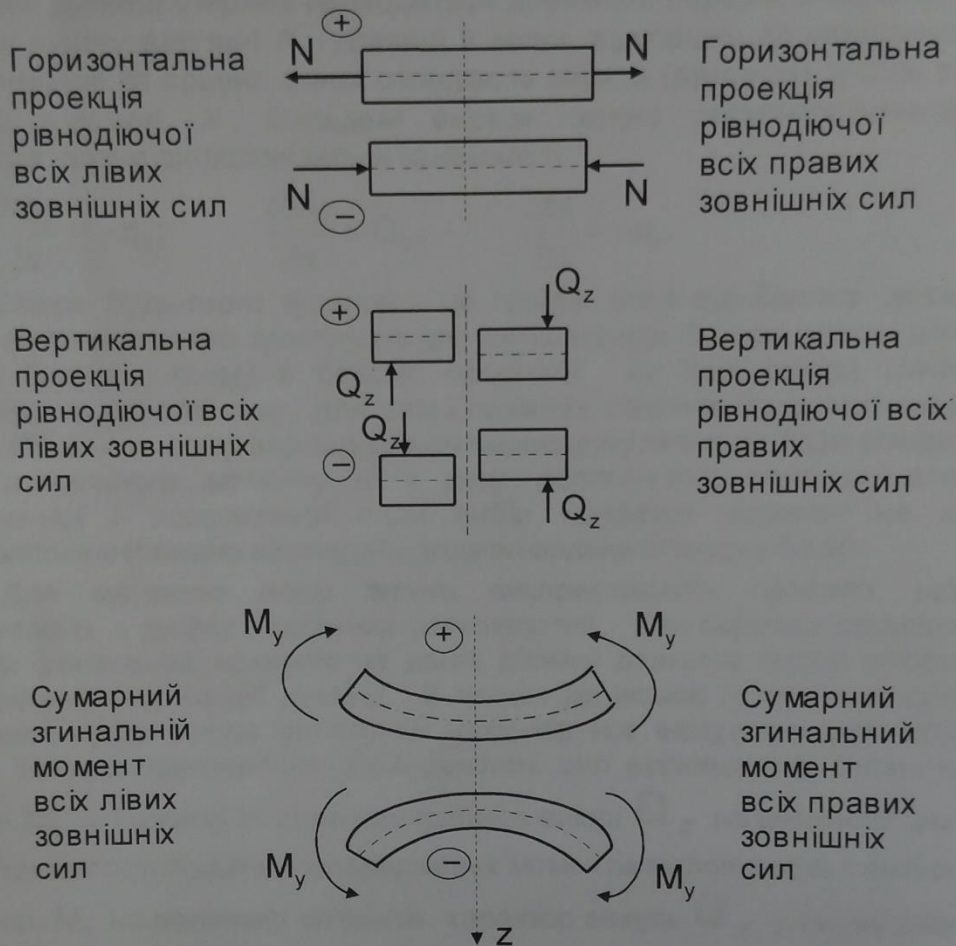


Рис. 9

Ділянкою системи називатимемо кожен її частину, в межах якої характер зміни внутрішніх зусиль залишається постійними. Границями ділянок є поперечні перерізи, в яких прикладені зосереджені навантаження (в тому числі опорні реакції) або в яких починається чи закінчується розподілене навантаження, або в яких змінюється інтенсивність навантаження за новим законом. У рамках границями ділянок є також вузлові перерізи.

Характерні перерізи - це такі, в яких визначаються величини зусиль. Характерними перерізами є границі всіх ділянок, а на ділянках

де діє розподілене навантаження - додатково 1-2 поперечних перерізи.

Зусилля в характерних перерізах можна обчислювати за складеними рівняннями або без їх складання. При складанні рівнянь на кожній ділянці стержня проводиться довільний переріз, вказуються початок відліку відстані  $X$  і границі її зміни, відповідно до наведених рекомендацій та правил знаків складають вирази (рівняння) зусиль як функції відстані  $X$ . Складені вирази можна проконтролювати, використовуючи диференціальні залежності:

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = -q_z; \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} = Q_z; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -q_x.$$

Еюра будь-якого зусилля - це графік, який відображає закон зміни величини цього зусилля по довжині стержня. Еюри зусиль для балок будують кожну в своєму масштабі на базі еюри (лінія паралельна осі стержня), для рам і ламаних стержнів база повторює їх осі. Ординати еюр відкладаються перпендикулярно до бази еюри; для згинального моменту - з боку розтягнутого волокна, для поперечної і поздовжньої сили вибір напрямку ординат не є принциповим (бажано відкладати додатні ординати зверху бази).

Для контролю еюр зусиль використовують правила, що впливають з диференціальних залежностей. Так перепад ординат еюри згинальних моментів на даній ділянці дорівнює площі еюри поперечних сил на цій ділянці. В точках де еюра поперечних сил дорівнює нулю, еюра згинальних моментів має екстремум (max або min). Точкам прикладання зосереджених сил відповідають знами в еюри  $M_y$  у напрямі дії сили та стрибки в еюри  $Q_z$  на величину цих сил; точкам прикладання зосереджених моментів відповідають стрибки в еюри  $M_y$  на величину моментів, характер еюри  $Q_z$  у цьому разі не змінюється.

Для перевірки побудови еюр зусиль можна використовувати також умови рівноваги відсіченої частини системи, якщо прикласти до неї зовнішні навантаження, а в проведених перерізах зусилля, взяті з відповідних еюр. У рамках доцільна перевірка рівноваги вирізаних вузлів.

Слід підкреслити, що при плоскому завантаженні немає необхідності зберігати індекси в позначеннях навантажень і зусиль. Тому надали їх будемо позначати так:  $q$ ,  $Q$ ,  $N$ ,  $M$ .



Приклад 4,а. Горизонтальна балка на двох опорах, на яку діє зовнішнє навантаження, прикладене в площині балки (рис.10)

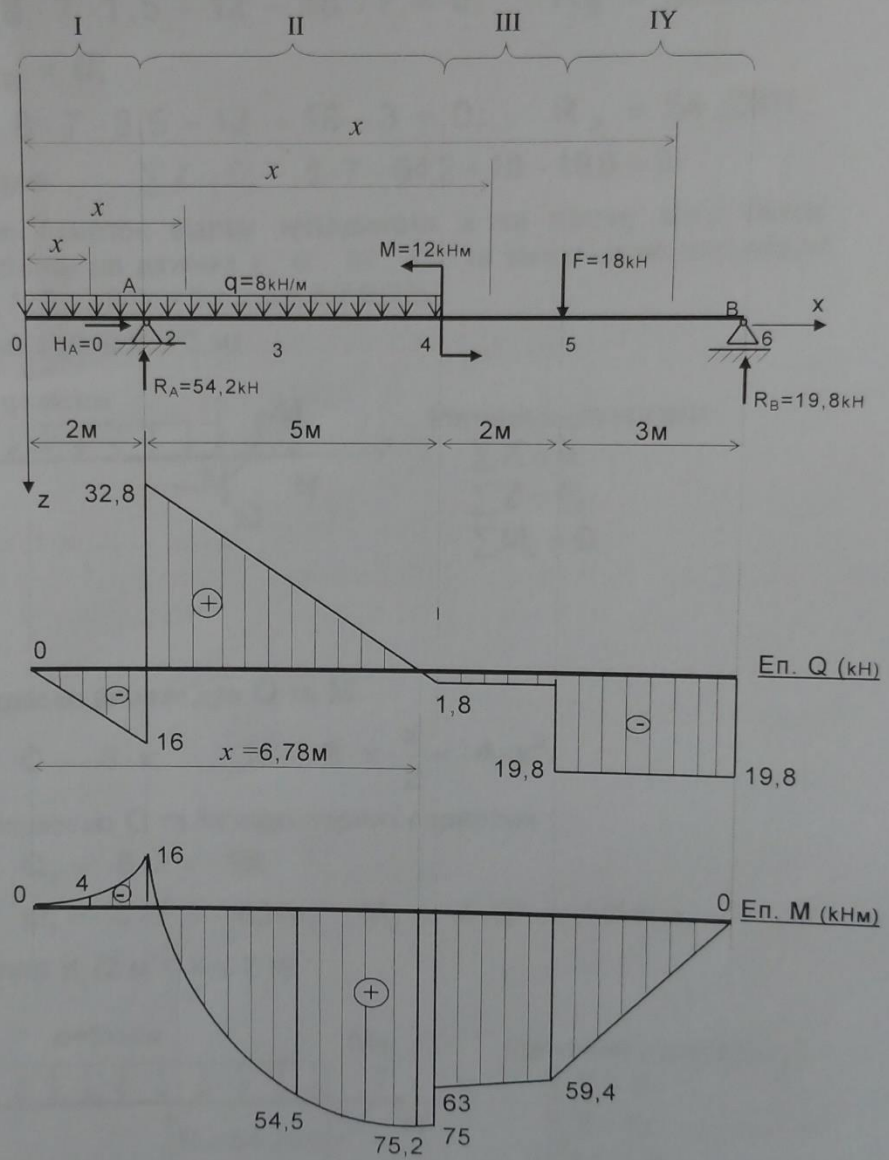


Рис. 10

Визначаємо реакції опор:

$$\sum X = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B \cdot 10 - 8 \cdot 7 \cdot 1.5 + 12 - 18 \cdot 7 = 0; \quad R_B = 19,8 \text{ кН};$$

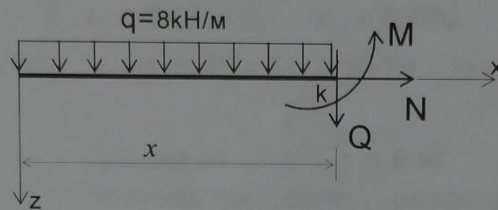
$$\sum M_B = 0;$$

$$R_A \cdot 10 - 8 \cdot 7 \cdot 8,5 - 12 - 18 \cdot 3 = 0; \quad R_A = 54,2 \text{ кН};$$

$$\text{Перевірка: } \sum Z = 0; \quad 8 \cdot 7 - 54,2 + 18 - 19,8 = 0.$$

Беремо початок відліку координати  $x$  на лівому кінці балки. Поділяємо балку на ділянки I, II, III, IV та визначаємо характерні перерізи: 0, 1, 2, ..., 6 ( $x = 0; 1; 2; 4; 5; 5; 7; 9; 12$ ).

Ділянка I ( $0 \leq x \leq 2$  м)



Рівняння рівноваги

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Z = 0;$$

$$\sum M_k = 0.$$

Складаємо вирази для  $Q$  та  $M$

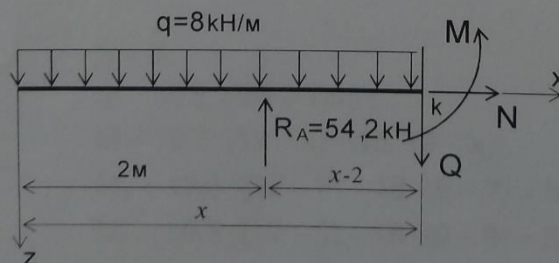
$$N = 0; \quad Q = -8 \cdot x; \quad M = -8 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -4 \cdot x^2.$$

Обчислюємо  $Q$  та  $M$  характерних перерізах:

$$Q_0 = 0; \quad Q_2 = -8 \cdot 2 = -16;$$

$$M_0 = 0; \quad M_1 = -4 \cdot 1^2 = -4 \text{ кНм}; \quad M_2 = -4 \cdot 2^2 = -16 \text{ кНм}.$$

Ділянка II ( $2 \text{ м} \leq x \leq 7$  м)



Рівняння рівноваги

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Z = 0;$$

$$\sum M_k = 0.$$

$$N = 0; \quad Q = -8 \cdot x + 54,2;$$

$$M = -8 \cdot \frac{x^2}{2} + 54,2 \cdot (x - 2) = -4 \cdot x^2 + 54,2 \cdot (x - 2);$$

$$Q_2 = -8 \cdot 2 + 54,2 = 38,2 \text{кН};$$

$$Q_4 = -8 \cdot 7 + 54,2 = -1,8 \text{кН};$$

$$M_2 = -4 \cdot 2^2 + 54,2 \cdot (2 - 2) = 16 \text{кНм};$$

$$M_3 = -4 \cdot 4,5^2 + 54,2 \cdot (4,5 - 2) = 54,5 \text{кНм};$$

$$M_4 = -4 \cdot 7^2 + 54,2 \cdot (7 - 2) = 75 \text{кНм}.$$

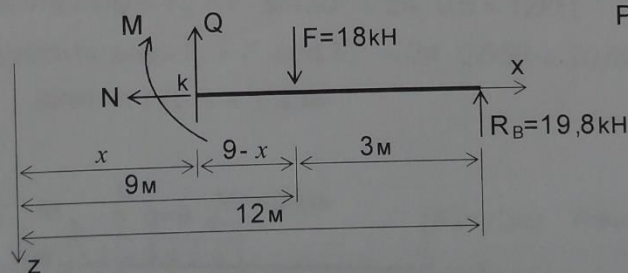
Визначаємо екстремум згинального моменту (при  $Q = 0$ ,  $M = M_{\max}$ )

$$-8 \cdot x_0 + 54,2 = 0; \quad x_0 = 6,78 \text{м}.$$

$$M_{\max} = -4 \cdot 6,78 + 54,2 \cdot (6,78 - 2) = 75,2 \text{кНм}.$$

Ділянка III ( $7 \text{ м} \leq x \leq 9 \text{ м}$ )

Враховуємо сили, розташовані праворуч перерізу, що розглядається



Рівняння рівноваги

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Z = 0;$$

$$\sum M_k = 0.$$

$$N = 0;$$

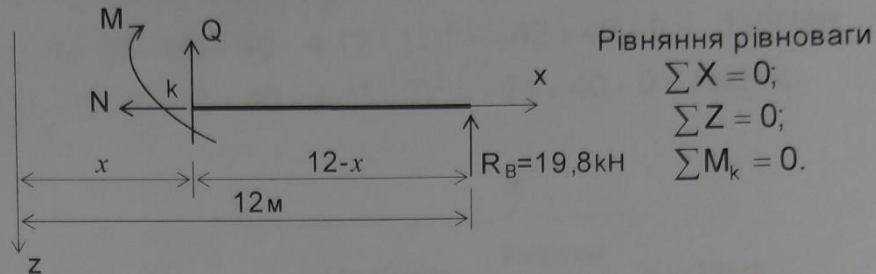
$$Q = 19,8 - 18 = 1,8 \text{кН};$$

$$M = 19,8 \cdot (12 - x) - 18 \cdot (9 - x);$$

$$M_4 = 19,8 \cdot (12 - 7) - 18 \cdot (9 - 7) = 63 \text{кНм};$$

$$M_5 = 19,8 \cdot (12 - 9) - 18 \cdot (9 - 9) = 59,4 \text{кНм};$$

Ділянка ІУ ( $9 \text{ м} \leq x \leq 12 \text{ м}$ )



$$N = 0; \quad Q = 19,8 \text{ кН}; \quad M = 19,8 \cdot (12 - x);$$

$$M_5 = 19,8 \cdot (12 - 9) = 59,4 \text{ кНм};$$

$$M_6 = 19,8 \cdot (12 - 12) = 0.$$

Будуємо епюри Q та M (рис. 10).

**Приклад 4,6** Консольна балка з вільним правим кінцем (рис. 11)

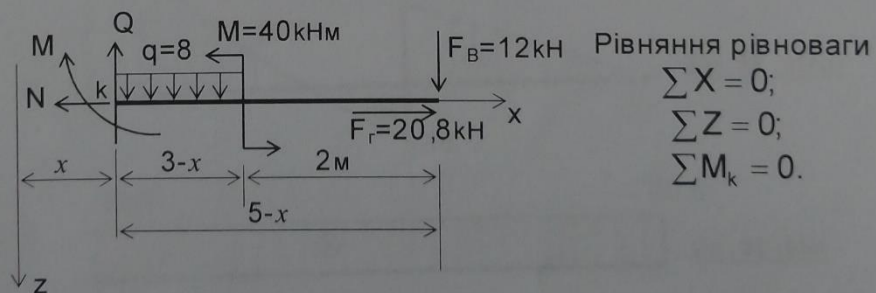
Опорні реакції на лівому кінці балки не визначаємо. Зусилля знаходимо з умов рівноваги правої умовно відсіченої частини балки.

Силу, нахилену під кутом  $30^\circ$  до осі балки, розкладаємо на дві складові:

$$\text{вертикальну} - F_B = F \cdot \sin 30^\circ = 24 \cdot 0,5 = 12 \text{ кН};$$

$$\text{горизонтальну} - F_r = F \cdot \cos 30^\circ = 24 \cdot 0,866 = 20,8 \text{ кН}.$$

Ділянка І ( $0 \leq x \leq 3 \text{ м}$ )



$$N = 20,8 \text{ кН}; \quad Q = 12 + 8(3 - x);$$

$$M = -12 \cdot (5 - x) + 40 - \frac{8 \cdot (3 - x)^2}{2} = -12 \cdot (5 - x) + 40 - 4 \cdot (3 - x)^2;$$

$$Q_0 = 12 + 8 \cdot (3 - 0) = 36 \text{ kH};$$

$$Q_2 = 12 + 8 \cdot (3 - 3) = 12 \text{ kH};$$

$$M_0 = -12 \cdot (5 - 0) + 40 - 4 \cdot (3 - 0)^2 = -60 + 40 - 36 = -56 \text{ kHm};$$

$$M_1 = -12 \cdot (5 - 1,5) + 40 - 4 \cdot (3 - 1,5)^2 = -42 + 40 - 9 = -11,5 \text{ kHm};$$

$$M_2^{\text{ниб}} = -12 \cdot (5 - 3) + 40 - 4 \cdot (3 - 3)^2 = -24 + 40 - 0 = 16 \text{ kHm}.$$

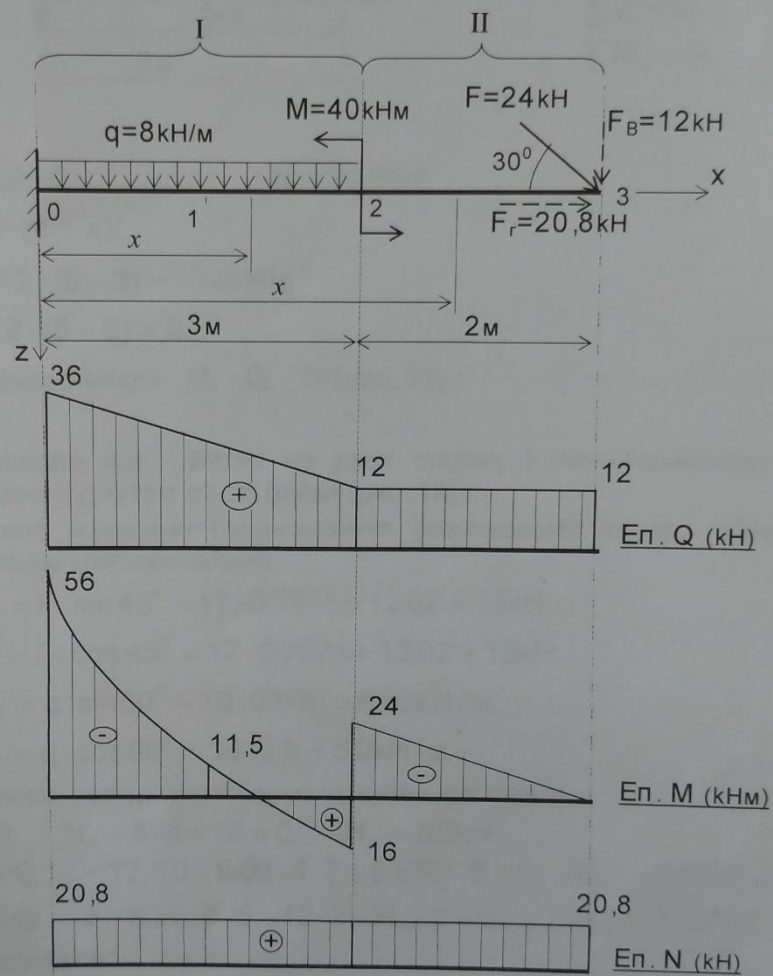
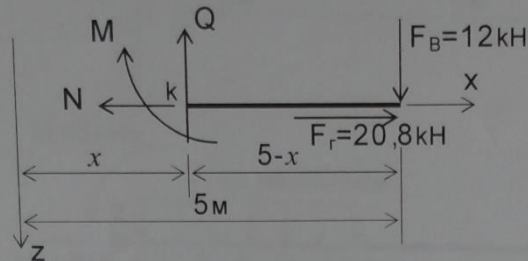


Рис. 11

Ділянка II ( $3 \leq x \leq 5$  м)



Рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ \sum Z &= 0; \\ \sum M_k &= 0. \end{aligned}$$

$$Q_{2-3} = 12 \text{ кН}; \quad N = 20,8 \text{ кН};$$

$$M = -12 \cdot (5 - x);$$

$$M_2^{\text{пр}} = -12 \cdot (5 - 3) = -24 \text{ кНм};$$

$$M_3 = -12 \cdot (5 - 5) = 0.$$

Будуємо епюри  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис. 11).

**Приклад 4,в.** Балка на двох опорах з навантаженням, яке прикладене під кутом до осі балки (рис. 12).

Кожне нахилене навантаження розкладаємо на дві складові: вертикальну і горизонтальну.

$$F_B = F \cdot \sin 45^\circ = 17 \cdot 0,7071 = 12,02 \approx 12 \text{ кН};$$

$$F_r = F \cdot \cos 45^\circ = 17 \cdot 0,7071 = 12,02 \approx 12 \text{ кН};$$

$$q_B = q \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН/м};$$

$$q_r = q \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5,0 \text{ кН/м}.$$

Опорні реакції визначаємо з рівнянь рівноваги

$$\sum X = 0; \quad H_A - 5 \cdot 4 + 12 = 0; \quad H_A = 8,0 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -12 \cdot 10 - 8,66 \cdot 4 \cdot 2 + 8 + R_B \cdot 8 = 0; \quad R_B = 22,66 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad 8 + 8,66 \cdot 4 \cdot 6 - 12 \cdot 2 - R_A \cdot 8 = 0; \quad R_A = 23,98 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Z = 0; \quad 8,66 \cdot 4 - 23,98 - 22,66 + 12 = 0.$$

Зусилля обчислюємо без складання рівнянь в характерних перерізах. Від горизонтальних складових навантажень і реакцій визначаємо поздовжні сили, а від вертикальних поперечні сили і згинальні моменти.

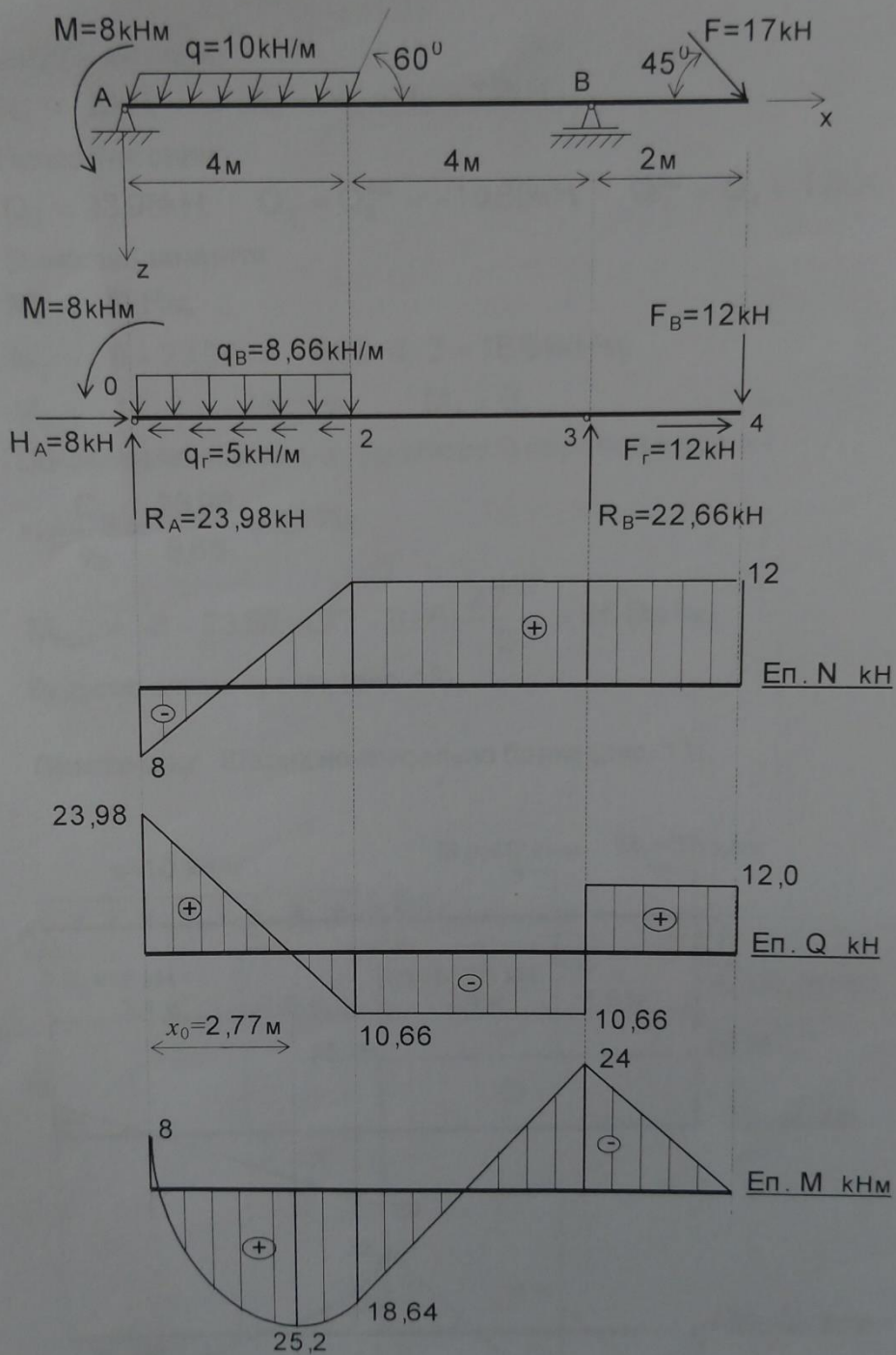


Рис. 12

Поздовжні сили:

$$N_0 = -8 \text{ кН}; \quad N_2 = N_3 = N_4 = 12 \text{ кН}.$$

Поперечні сили:

$$Q_0 = 23,98 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_3^{\text{лів}} = -10,66 \text{ кН}; \quad Q_3^{\text{пр}} = Q_4 = 12 \text{ кН}.$$

Згинальні моменти:

$$M_0 = -8 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -8 + 23,98 \cdot 4 - 8,66 \cdot 4 \cdot 2 = 18,64 \text{ кНм};$$

$$M_3 = -12 \cdot 2 = -24 \text{ кНм}; \quad M_4 = 0;$$

Обчислюємо відстань  $x_0$  (де еюра  $Q$  перетинає вісь  $x$ ).

$$x_0 = \frac{Q_0}{q_B} = \frac{23,98}{8,66} = 2,77 \text{ м};$$

$$M_{\text{max}} = -8 + 23,98 \cdot 2,77 - 8,66 \cdot \frac{2,77^2}{2} = 25,2 \text{ кНм}.$$

Будуємо еюри зусиль (рис. 12).

Приклад 4,г Шарнірно-консольна балка (рис. 13).

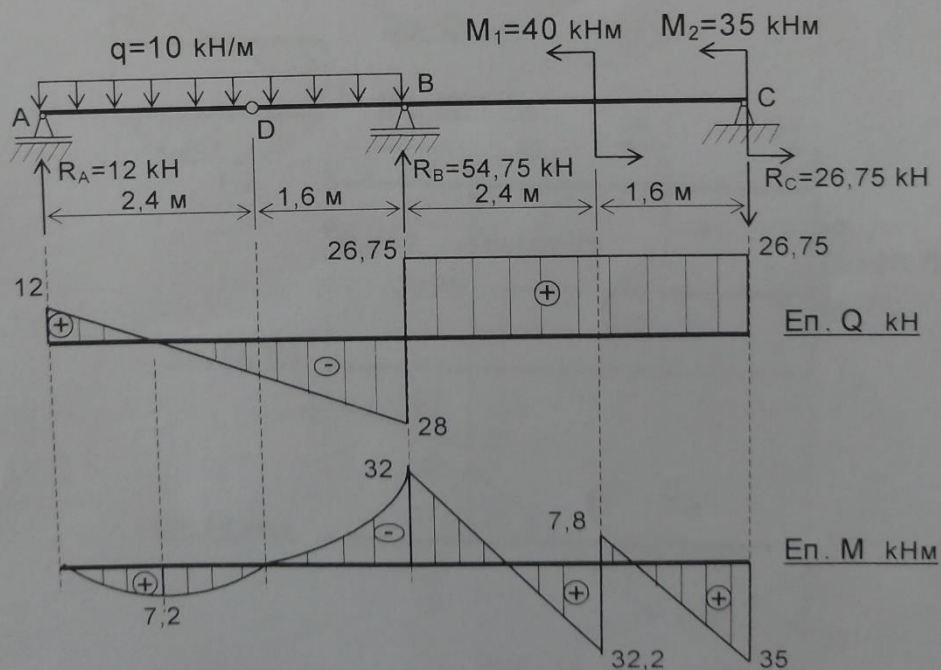


Рис. 13



Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_D^{лів} = 0; \quad -R_A \cdot 2,4 + 10 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 0; \quad R_A = 12 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad -12 \cdot 8 + 10 \cdot 4 \cdot 6 - R_B \cdot 4 + 40 + 35 = 0; \quad R_B = 54,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -12 \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 40 + 35 - R_C \cdot 4 = 0; \quad R_C = 26,75 \text{ кН}.$$

Перевірка:  $\sum Z = 0; \quad -12 + 10 \cdot 4 - 54,75 + 26,75 = 0.$

Визначаємо ординати епюр зусиль, враховуючи зовнішні навантаження, що містяться зліва від розглянутих перерізів, і будуємо епюри Q та M (рис. 13).

Можна цю систему розрахувати, поділяючи її на окремі балки. Послідовність визначення реакцій та побудови епюр зусиль у цей спосіб показана на рис. 14.

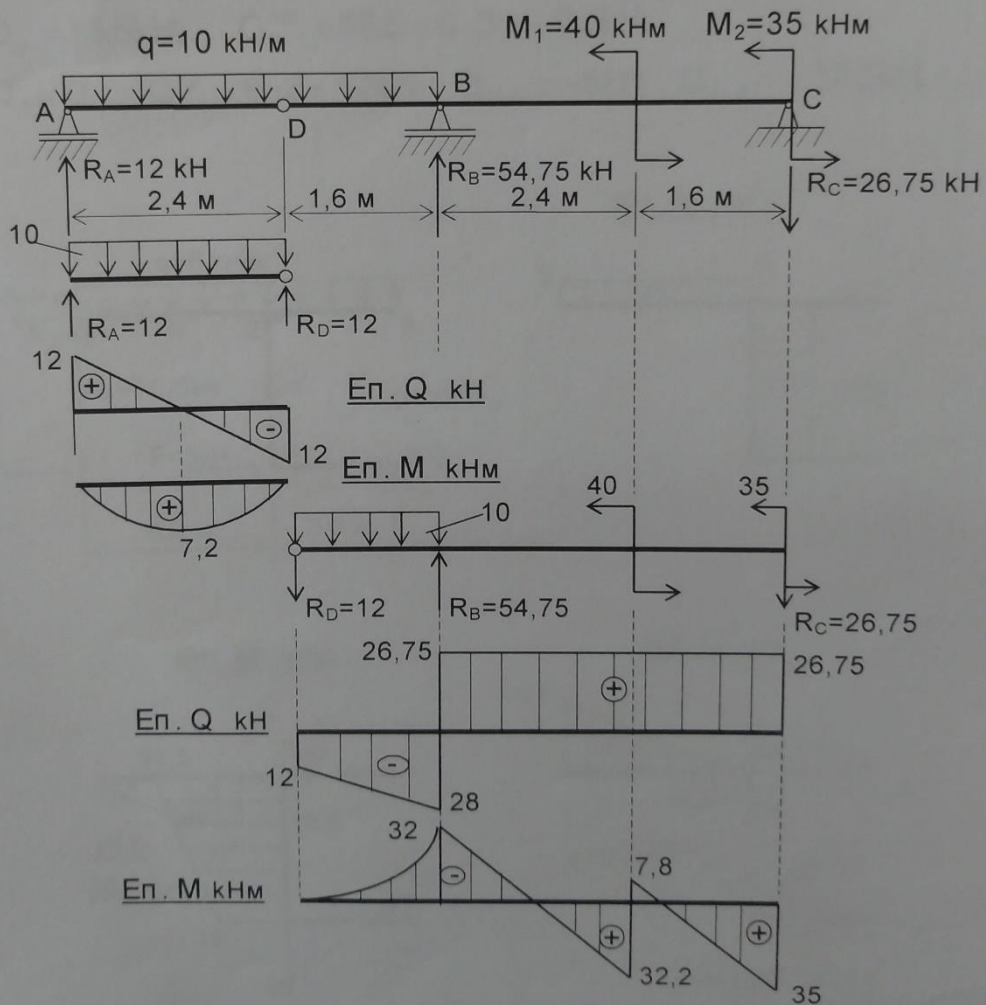


Рис. 14

**Приклад 4 д.** Плоска рама на двох опорах (рис. 15)

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum X = 0; \quad -H_A + 5 = 0; \quad H_A = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 5 - 10 + 5 \cdot 2,5 - 6 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0; \quad R_B = 14,5 \text{ кН};$$

$$\sum Z = 0; \quad 6 \cdot 5 - 14,5 - R_A = 0; \quad R_A = 15,5 \text{ кН}.$$

Намічаємо характерні перерізи і обчислюємо в них значення зусиль.

Поздовжня сила:

$$N_{0-2} = 5 \text{ кН}; \quad N_{2-3} = 0; \quad N_{4-5} = 0; \quad N_{2-4} = -14,5 \text{ кН}.$$

Поперечна сила:

$$Q_0 = 15,5 \text{ кН}; \quad Q_2^{\text{ліб}} = 15,5 - 6 \cdot 3 = -2,5 \text{ кН};$$

$$Q_3 = 0; \quad Q_2^{\text{пр}} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}; \quad Q_{2-4} = -5 \text{ кН}; \quad Q_{4-5} = -14,5 \text{ кН}.$$

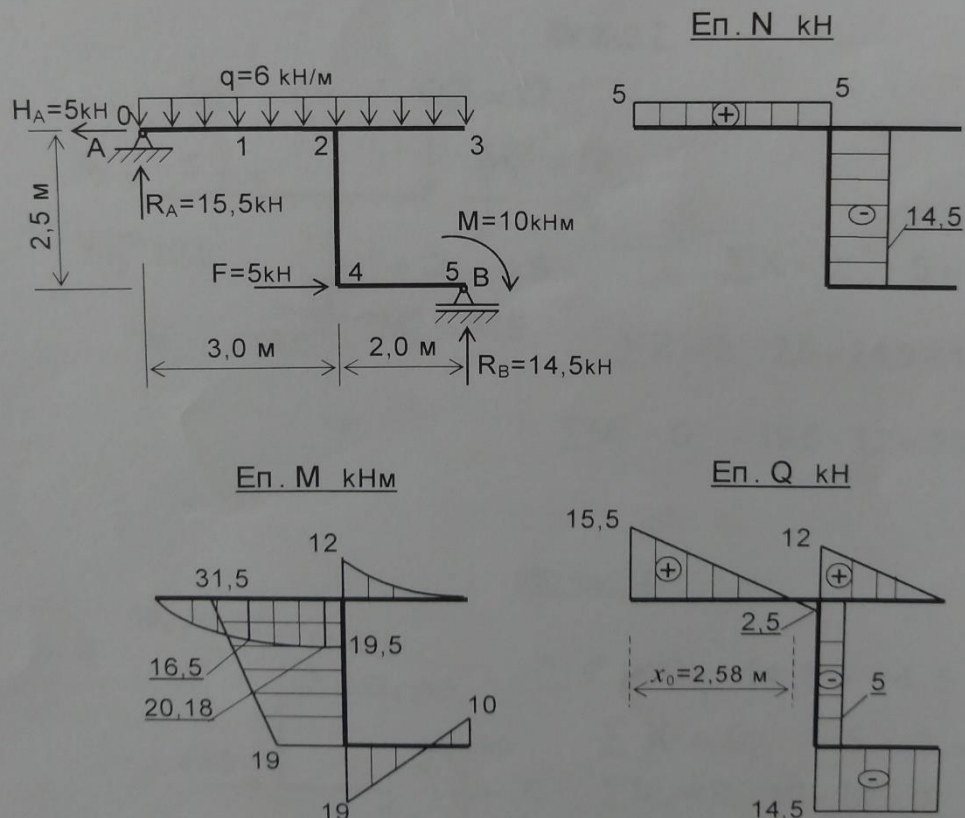


Рис. 15

Згинальні моменти:

$$M_0 = 0; \quad M_1 = 15,5 \cdot 1,5 - 6 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 16,5 \text{кНм};$$

$$M_2^{\text{лів}} = 15,5 \cdot 3 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 19,5 \text{кНм};$$

Визначаємо максимальне значення згинального моменту на ділянці 0-2.  $x_0 = Q_0 / q = 15,5 / 6 = 2,58 \text{м}$ ,

$$M_{\text{max}} = 15,5 \cdot 2,58 - 6 \cdot 2,58 \cdot 1,29 = 20,18 \text{кНм};$$

$$M_3 = 0; \quad M_2^{\text{пр}} = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{кНм};$$

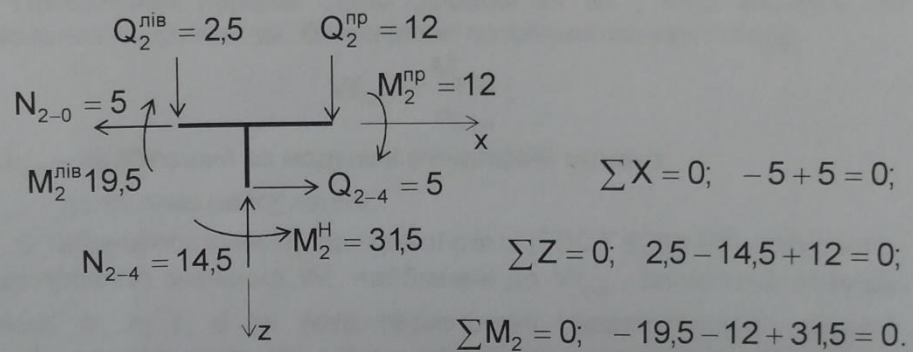
$$M_2^{\text{ниж}} = 5 \cdot 2,5 + 14,5 \cdot 2 - 10 = 31,5 \text{кНм};$$

$$M_4 = 14,5 \cdot 2 - 10 = 19 \text{кНм}; \quad M = 10 \text{кНм}.$$

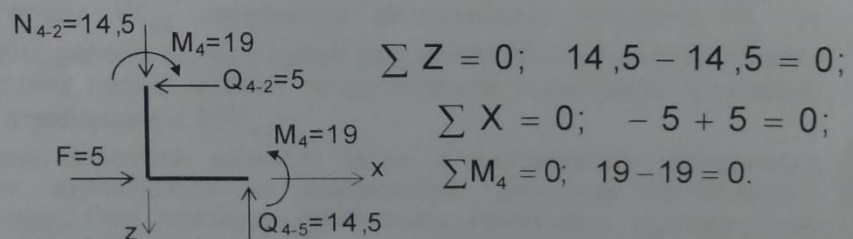
Будуємо епюри зусиль  $N, Q, M$  (рис. 15).

Виконуємо перевірку рівноваги вузлів рами 2 і 4, прикладаючи до них внутрішні зусилля і зовнішні навантаження в вузлах.

#### Вузол 2



#### Вузол 4



### Задача 5. Розрахунок прокатної балки

Балка на двох опорах знаходиться під дією зовнішнього навантаження.

#### Потрібно:

1. Визначити реакції опор, побудувати епюри  $Q$  і  $M$ , визначити перерез, де діє максимальний згинальний момент.
2. Підбрати поперечний переріз: з двотавра, круглий і прямокутний ( $h=2b$ ) при допустимому напруженні  $\sigma_{adm} = 160$  МПа. Порівняти вагу балок з різними поперечними перерізами.
3. Виконати повну перевірку міцності прийнятої балки з двотавровим перерізом.
4. Визначити переміщення характерних перерізів балки, побудувати епюри  $EIw$  і  $EI\varphi$  та обчислити максимальні значення кута повороту  $\varphi$  і прогину  $w$ , прийнявши  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Вихідні дані прийняти з табл.5 і рис. Д-5.

#### Вказівки.

Поперечний переріз балки добираємо за умови міцності по нормальних напруженнях. Визначаємо потрібний момент опору

$$W_{пот} = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}};$$

де  $M_{max}$  – найбільший за модулем згинальний момент,

$\sigma_{adm}$  – допустиме напруження.

З таблиці сортаменту прокатної сталі (ГОСТ 8239-72) добираємо номер профілю значення  $W_y$  найближче до  $W_{пот}$ . Випишуємо розміри перерізу  $h, b, t, d$  та його геометричні характеристики: момент інерції  $I_y$ , момент опору  $W_y$ , статичний момент половини перерізу  $S_{max}$  відносно нейтральної осі (у таблиці сортаменту ці величини позначені відповідно  $I_x, W_x, S_x$ ).

При великих значеннях згинального моменту, коли потрібний момент опору  $W_{пот}$  перевищує максимальне значення  $W_x$  за стандартом, переріз балки у цьому разі можна брати з двох двотаврів, розташованих поряд, момент опору кожного з двотаврів приблизно повинен дорівнювати  $0,5 W_{пот}$ .

Повна перевірка міцності балки з двотавровим поперечним перерізом здійснюється по нормальних, дотичних та головних напруженнях. При перевірці нормальних напружень небезпечними вважаються точки, які є найбільш віддалені від нейтральної осі

перерізу, де діє найбільший згинальний момент. Максимальні дотичні напруження виникають в точках, розташованих на нейтральній осі перерізу, де діє найбільша поперечна сила. При перевірці по дотичним напруженням проймаємо  $\tau_{adm} = 100$  МПа.

Для перевірки головних напружень вибирають переріз, де згинальний момент і поперечна сила приймають достатньо великі значення. Небезпечними вважаються точки стику полк і стінки двотавра. При обчисленні статичного моменту опору полки припускається заміна дійсного прокатного профілю ідеалізованим перерізом, складеним з трьох вузьких прямокутників.

Для визначення переміщень точок осі балки (кута повороту і прогину) застосовуються формули методу початкових параметрів. Після визначення початкових параметрів слід обчислити 6-10 значень переміщень, в тому числі на границях ділянок і побудувати відповідні епюри. Всі епюри розмістити на одній сторінці під схемою балки у послідовності, яка впливає з диференційних залежностей, тобто  $Q, M, EI\varphi, EIw$  і проставити числові значення ординат.

**Приклад 5.** Схема балки зображена на рис. 16, а.

Визначаємо реакції опор

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 4,5 - 18 - 16 \cdot 3 \cdot 3 - 24 \cdot 5,5 = 0; \quad R_B = 65,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4,5 - 18 + 16 \cdot 3 \cdot 1,5 - 24 \cdot 1 = 0; \quad R_A = 6,67 \text{ кН}.$$

Перевірка

$$\sum Z = 0; \quad 6,67 - 16 \cdot 3 + 65,33 - 24 = 0.$$

Намічаємо точки на осі балки: 0, 1, 2, ..., 7.

Обчислюємо зусилля в характерних перерізах.

Поперечна сила:

$$Q_{0-2} = 6,67 \text{ кН}; \quad Q_5^{лів} = 6,67 - 16 \cdot 3 = -41,33 \text{ кН}; \quad Q_{5-7} = 24 \text{ кН}.$$

Згинальний момент:

$$M_0 = 0; \quad M_2^{лів} = 6,67 \cdot 1,5 = 10 \text{ кНм}; \quad M_2^{пр} = 6,67 \cdot 1,5 + 18 = 28 \text{ кНм}.$$

$$M_5 = -24 \cdot 1 = -24 \text{ кНм}; \quad M_7 = 0.$$

Посередині ділянки з рівномірно-розподіленим навантаженням

$$x = 3,0 \text{ м.} \quad M = 6,67 \cdot 3 + 18 - \frac{16 \cdot 1,5^2}{2} = 20 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри  $Q$  і  $M$  (рис. 16, б, в).

Визначаємо положення нульової точки епюри  $Q$

$$x_0 = \frac{Q}{q} = \frac{6,67}{16} = 0,42 \text{ м},$$

і максимальне значення згинального моменту

$$M_{max} = 6,67 \cdot 1,92 + 18 - \frac{16 \cdot 0,42^2}{2} = 29,39 \text{ кНм}.$$

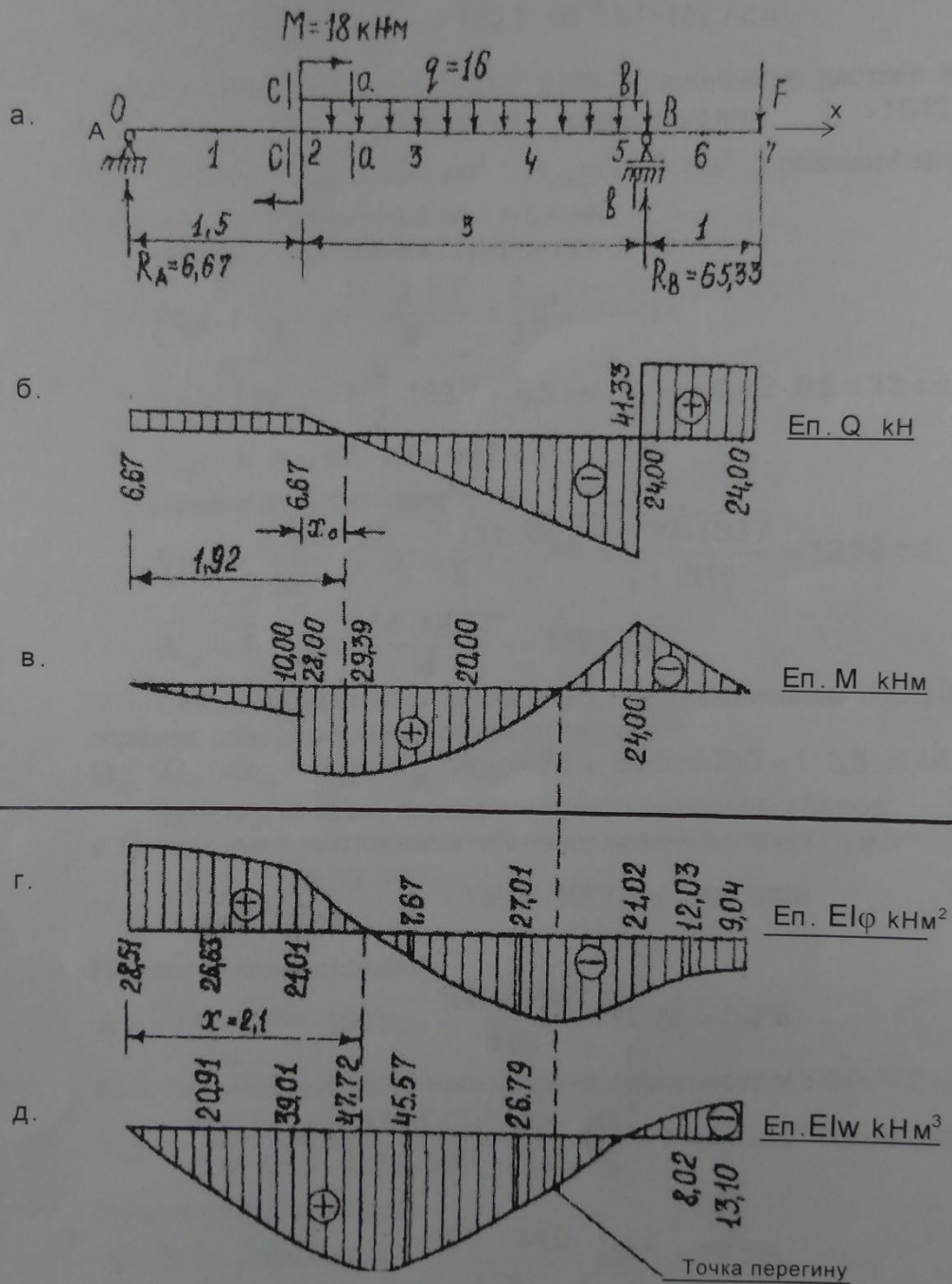


Рис. 16

Потрібний момент опору

$$W_{\text{пот}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{29,39 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 183,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 183,7 \text{ см}^3.$$

З таблиці сортаменту (ГОСТ 8239-72) вибираємо двотавр №20, який має такі геометричні характеристики:  $I_y = 1840 \text{ см}^4$ ;

$W_y = 184 \text{ см}^3$ ;  $S_{\text{max}} = 104 \text{ см}^3$ ;  $A_{\text{дв}} = 26,8 \text{ см}^2$  і розміри перерізу  $h=200 \text{ мм}$ ;  $b=100 \text{ мм}$ ;  $d=5,2 \text{ мм}$ ;  $t=8,4 \text{ мм}$ .

Розміри прямокутного перерізу при  $h=2b$

$$W_{\text{пот}} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} W_{\text{пот}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 183,7} = 6,5 \text{ см}, \quad h=2b=2 \cdot 6,5 = 13 \text{ см};$$

$$A_{\text{пр}} = b \cdot h = 6,5 \cdot 13 = 84,5 \text{ см}^2.$$

Діаметр круглого перерізу

$$W_{\text{пот}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_{\text{пот}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 183,7}{3,14}} = 12,32 \text{ см};$$

$$A_{\text{кр}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12,32^2}{4} = 119,1 \text{ см}^2.$$

Співвідношення ваги балки з різними поперечними перерізами дорівнює співвідношенню площ їх перерізів.

$$G_{\text{дв}} : G_{\text{пр}} : G_{\text{кр}} = A_{\text{дв}} : A_{\text{пр}} : A_{\text{кр}} = 26,8 : 84,5 : 119,1 = 1 : 3,5 : 4,44.$$

Здійснюємо повну перевірку міцності двотаврової балки:

а. По максимальним нормальним напруженням в перерізі а-а ( $x=1,92 \text{ м}$ )

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_y} = \frac{29,39 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 159,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 159,7 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{\sigma_{\text{adm}} - \sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{adm}}} \cdot 100\% = \frac{160 - 159,7}{160} \cdot 100\% = 0,2\%.$$

б. По максимальним дотичним напруженням в перерізі b-b ( $x=4,5 \text{ м}$ )

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} S_{\text{max}}}{d \cdot I_y} = \frac{41,33 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 44,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 44,9 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{\tau_{\text{adm}} - \tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{adm}}} \cdot 100\% = \frac{100 - 44,9}{100} \cdot 100\% = 55,1\%.$$

Обчислюємо статичний момент полки двотавра відносно нейтральної осі і дотичне напруження в точці стику полки із стінкою двотавра.

$$S_n = b \cdot t \cdot \frac{h-t}{2} = 10 \cdot 0,84 \cdot \frac{20-0,84}{2} = 80,47 \text{ см}^3$$

$$\tau_n = \frac{Q_{\max} S_n}{d \cdot I_y} = \frac{41,33 \cdot 10^3 \cdot 80,47 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 34,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 34,5 \text{ МПа.}$$

в. Головні напруження перевіряємо в перерізі с-с ( $x=1,5 \text{ м}$ )

$$M = 28 \text{ кНм}; \quad Q = 6,67 \text{ кН.}$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{I_y} \cdot \left( \frac{h}{2} - t \right) = \frac{28 \cdot 10^3}{1840 \cdot 10^{-8}} \cdot \left( \frac{20}{2} - 0,84 \right) \cdot 10^{-2} = 139,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 139,4 \text{ МПа.}$$

$$\tau_1 = \frac{Q_{\max} S_n}{d \cdot I_y} = \frac{6,67 \cdot 10^3 \cdot 80,47 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 5,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,6 \text{ МПа.}$$

Обчислюємо еквівалентне напруження за 4-тою теорією міцності

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{139,4^2 + 3 \cdot 5,6^2} = 139,7 \text{ МПа.}$$

Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{\sigma_{\text{adm}} - \sigma_{\text{red}}}{\sigma_{\text{adm}}} \cdot 100\% = \frac{160 - 139,7}{160} \cdot 100\% = 12,7\%.$$

Визначаємо дотичне напруження на нейтральній осі цього перерізу

$$\tau_0 = \frac{Q S_{\max}}{d \cdot I_y} = \frac{6,67 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 7,25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,25 \text{ МПа.}$$

Будуємо епюри нормальних напружень в перерізі а-а, дотичних напружень в перерізі b-b, нормальних і дотичних напружень в перерізі с-с.

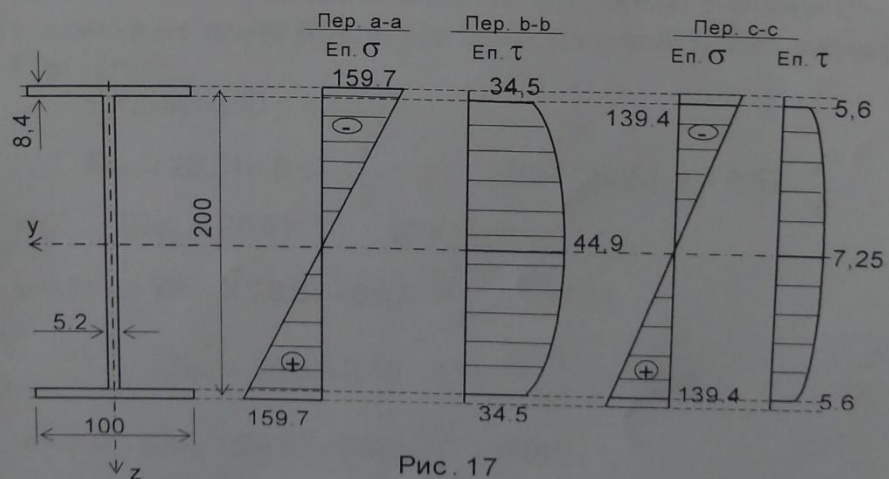


Рис. 17



Обчислюємо переміщення точок осьової лінії балки методом початкових параметрів. Запишемо формули методу початкових параметрів.

$$EI\varphi = EI\varphi_0 - M_0 \cdot x - Q_0 \cdot \frac{x^2}{2} + \sum M \cdot (x-a) + \sum F \cdot \frac{(x-b)^2}{2} + \sum \frac{q}{6} \cdot [(x-c)^3 - (x-d)^3];$$

$$EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 \cdot x - M_0 \cdot \frac{x^2}{2} - Q_0 \cdot \frac{x^3}{6} + \sum M \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + \sum F \cdot \frac{(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q}{24} \cdot [(x-c)^4 - (x-d)^4].$$

Початкові параметри:

$$w_0 = 0; \quad \varphi_0 = ?; \quad M_0 = 0; \quad Q_0 = 6,67 \text{ кН.}$$

Невідомий початковий кут повороту  $\varphi_0$  визначаємо з граничної умови на правій опорі балки: при  $x=4,5$  м,  $w = 0$ .

Використовуючи формулу початкових параметрів для прогину, запишемо

$$EIw_{x=4,5} = EI\varphi_0 \cdot 4,5 - 6,67 \cdot \frac{4,5^3}{6} - 18 \cdot \frac{(4,5 - 1,5)^2}{2} + \frac{16}{24} \cdot [(4,5 - 1,5)^4 - (4,5 - 4,5)^4] = 0,$$

звідки  $EI\varphi_0 = 28,51 \text{ кНм}^2\text{рад.}$

Розбиваємо балку на три ділянки, складаємо вирази для кута повороту і прогину на всіх ділянках та обчислюємо значення  $EI\varphi$  і  $EIw$  в позначених точках 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (розмірність  $EI\varphi$  в  $\text{кНм}^2\text{рад}$ , а  $EIw$  -  $\text{кНм}^3$ ).

1-а ділянка ( $0 \leq x \leq 1,5$ ) м.

$$EI\varphi = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{x^2}{2}; \quad EIw = 28,51 \cdot x - 6,67 \cdot \frac{x^3}{6}.$$

$$x=0; \quad EI\varphi_0 = 28,51; \quad EIw_0 = 0.$$

$$x=0,75 \text{ м}; \quad EI\varphi_1 = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{0,75^2}{2} = 26,63;$$

$$EIw_1 = 28,51 \cdot 0,75 - 6,67 \cdot \frac{0,75^3}{6} = 20,91;$$

$$x=1,5 \text{ м}; \quad EI\varphi_2 = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 21,01;$$

$$EIw_2 = 28,51 \cdot 1,5 - 6,67 \cdot \frac{1,5^3}{6} = 39,01;$$

2-а ділянка ( $1,5 \leq x \leq 4,5$ ) м.

$$EI\varphi = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{x^2}{2} - 18 \cdot (x - 1,5) + \frac{16}{6} \cdot (x - 1,5)^3;$$

$$EIw = 28,51 \cdot X - 6,67 \cdot \frac{X^3}{6} - 18 \cdot \frac{(X - 1,5)^2}{2} + 16 \cdot \frac{(X - 1,5)^4}{24};$$

$$x=1,5 \text{ м}; \quad EI\varphi_2 = 21,01; \quad EIw_2 = 39,01.$$

$x=2,5$  м;

$$EI\varphi_3 = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{2,5^2}{2} - 18 \cdot (2,5 - 1,5) + \frac{16}{6} \cdot (2,5 - 1,5)^3 = -7,67;$$

$$EIw_3 = 28,51 \cdot 2,5 - 6,67 \cdot \frac{2,5^3}{6} - 18 \cdot \frac{(2,5 - 1,5)^2}{2} + 16 \cdot \frac{(2,5 - 1,5)^4}{24} = 45,57;$$

$x=3,5$  м;

$$EI\varphi_4 = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{3,5^2}{2} - 18 \cdot (3,5 - 1,5) + \frac{16}{6} \cdot (3,5 - 1,5)^3 = -27,01;$$

$$EIw_4 = 28,51 \cdot 3,5 - 6,67 \cdot \frac{3,5^3}{6} - 18 \cdot \frac{(3,5 - 1,5)^2}{2} + 16 \cdot \frac{(3,5 - 1,5)^4}{24} = 26,79;$$

$x=4,5$  м;

$$EI\varphi_5 = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{4,5^2}{2} - 18 \cdot (4,5 - 1,5) + \frac{16}{6} \cdot (4,5 - 1,5)^3 = -21,02;$$

$$EIw_5 = 28,51 \cdot 4,5 - 6,67 \cdot \frac{4,5^3}{6} - 18 \cdot \frac{(4,5 - 1,5)^2}{2} + 16 \cdot \frac{(4,5 - 1,5)^4}{24} = 0.$$

3-я ділянка ( $4,5 \leq x \leq 5,5$ ) м.

$$EI\varphi = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{x^2}{2} - 18 \cdot (x - 1,5) + \frac{16}{6} \cdot [(x - 1,5)^3 - (x - 4,5)^3] -$$

$$- 65,33 \cdot \frac{(x - 4,5)^2}{2};$$

$$EIw = 28,51 \cdot X - 6,67 \cdot \frac{X^3}{6} - 18 \cdot \frac{(X - 1,5)^2}{2} - 65,33 \cdot \frac{(x - 4,5)^3}{6} +$$

$$+ \frac{16}{24} [(x - 1,5)^4 - (x - 4,5)^4]$$

$$x=4,5 \text{ м}; \quad EI\varphi_5 = -21,02; \quad EIw_5 = 0;$$

$$x=5,0 \text{ м};$$

$$EI\varphi_6 = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{5^2}{2} - 18 \cdot (5 - 1,5) + \frac{16}{6} \cdot [(5 - 1,5)^3 - (5 - 4,5)^3] - \\ - 65,33 \cdot \frac{(5 - 4,5)^2}{2} = -12,03;$$

$$EIw_6 = 28,51 \cdot 5 - 6,67 \cdot \frac{5^3}{6} - 18 \cdot \frac{(5 - 1,5)^2}{2} - 65,33 \cdot \frac{(5 - 4,5)^3}{6} + \\ + \frac{16}{24} [(5 - 1,5)^4 - (5 - 4,5)^4] = -8,02;$$

$$x=5,5 \text{ м};$$

$$EI\varphi_7 = 28,51 - 6,67 \cdot \frac{5,5^2}{2} - 18 \cdot (5,5 - 1,5) - 65,33 \cdot \frac{(5,5 - 4,5)^2}{2} + \\ + \frac{16}{6} \cdot [(5,5 - 1,5)^3 - (5,5 - 4,5)^3] = -9,04;$$

$$EIw_7 = 28,51 \cdot 5,5 - 6,67 \cdot \frac{5,5^3}{6} - 18 \cdot \frac{(5,5 - 1,5)^2}{2} - 65,33 \cdot \frac{(5,5 - 4,5)^3}{6} + \\ + \frac{16}{24} [(5,5 - 1,5)^4 - (5,5 - 4,5)^4] = -13,1.$$

За визначеними ординатами будемо епюри переміщень  $EI\varphi$  і  $EIw$  (рис. 16, г, д). Нульова точка епюри  $EI\varphi$  розташована на відстані 2,1 м (визначено з рівняння кута повороту на другій ділянці). Визначаємо величину  $EIw_{\max}$  при  $x=2,1$  м.

$$EIw_{\max} = 28,51 \cdot 2,1 - 6,67 \cdot \frac{2,1^3}{6} - 18 \cdot \frac{(2,1 - 1,5)^2}{2} + 16 \cdot \frac{(2,1 - 1,5)^4}{24} = 47,72.$$

Максимальні значення кута повороту і прогину отримаємо діленням величини  $EI\varphi_{\max}$  і  $EIw_{\max}$  на жорсткість балки при згинанні

$$EI = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 3680 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2;$$

$$\varphi_{\max} = \frac{28,51 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 7,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$w_{\max} = \frac{47,72 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 12,97 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

### Задача 6. Розрахунок вала на кручення.

Трансмiсійний вал має п'ять шкiвiв: один ведучий i чотири – веденi. Через веденi шкiви передаються вiдомi потужностi.

#### Потрiбно:

1. Визначити скручувальнi моменти, що передаються через веденi шкiви.
  2. Визначити скручувальний момент, який передає ведучий шкiв.
  3. Обчислити значення крутного моменту на кожнiй дiлянцi валу i побудувати епюру  $M_k$ .
  4. Визначити з умови мiцностi дiаметри вала на кожнiй дiлянцi.
  5. Визначити величину кута закручування на кожнiй дiлянцi валу i побудувати епюру  $\varphi$  (прийняти  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа).
  6. Знайти найбільший вiдносний кут закручування (град/м).
- Вихiднi данi взятi з табл. 6 i рис. Д-6.

**Вказiвки.** Епюра крутного моменту  $M_k$  обмежена вiдрiзками горизонтальних прямих. Визначенi з умови мiцностi величини дiаметра вала на кожнiй дiлянцi слiд округлити до найближчого бiльшого стандартного значення, вiдповiдно рiвного 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 i т.п. мм. При побудовi епюри кута закручування вала iз змiнним дiаметром вважати нерухомим лiвий торцевий перерiз.

**Приклад 6.** Ведучий шкiв трансмiсійного валу через веденi шкiви передає потужностi  $N_1 = 25$  квт,  $N_2 = 75$  квт,  $N_3 = 30$  квт,  $N_4 = 45$  квт, (рис. 18, а). Кутова швидкiсть обертання вала  $\omega = 70$  рад/с, вiдстань  $a = 0,6$  м, допустиме дотичне напруження  $\tau_{adm} = 60$  МПа. Визначаємо скручувальнi моменти, якi передаються веденими шкiвами

$$M_k = \frac{N}{\omega}$$

$$M_1 = \frac{25}{70} = 0,357 \text{ кНм}; \quad M_2 = \frac{75}{70} = 1,071 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \frac{30}{70} = 0,429 \text{ кНм};$$

$$M_4 = \frac{45}{70} = 0,643 \text{ кНм}.$$

З умови рівноваги знаходимо скручувальний момент, який передає ведучий вал (рис. 18,б).

$$\sum M_x = 0; \quad M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - M_0 = 0;$$

$$M_0 = 0,357 + 1,071 + 0,429 + 0,643 = 2,5 \text{ кНм.}$$

Визначаємо значення крутного моменту на кожній ділянці:

$$M_{к,1} = -0,357 \text{ кНм};$$

$$M_{к,2} = -0,357 + 2,5 = 2,143 \text{ кНм};$$

$$M_{к,3} = -0,357 + 2,5 - 1,071 = 1,072 \text{ кНм};$$

$$M_{к,4} = -0,357 + 2,5 - 1,071 - 0,429 = 0,643 \text{ кНм};$$

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 18,в).

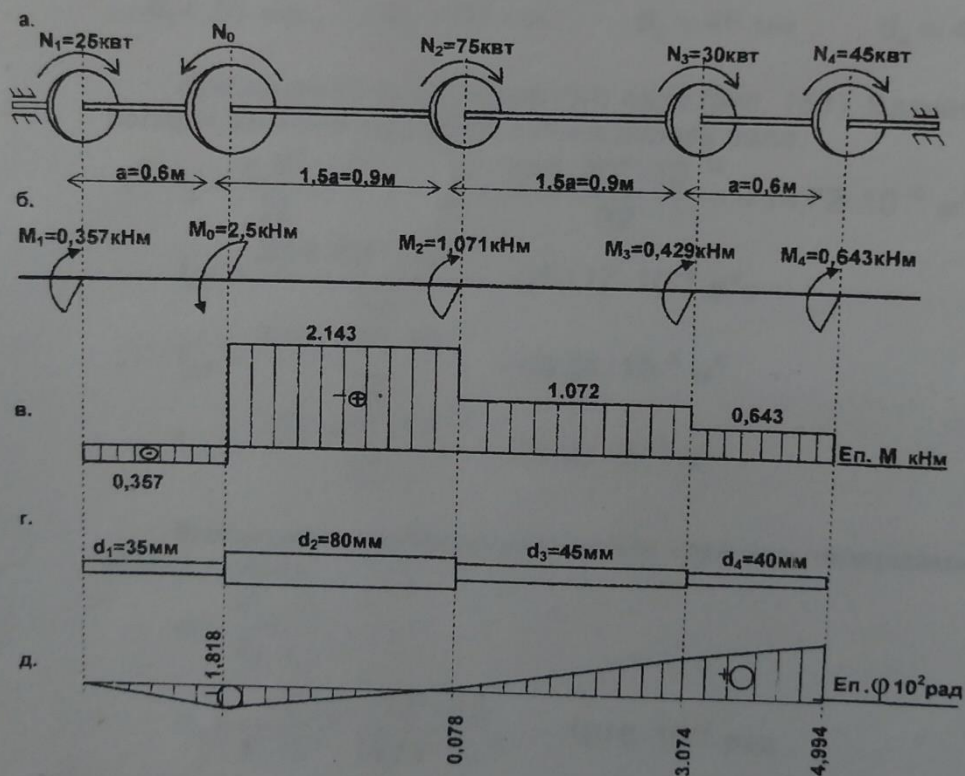


Рис. 18

Визначаємо з умови міцності діаметр вала на кожній ділянці.

$$W_{\text{пот}} = \frac{M_k}{\tau_{\text{adm}}}; \quad W_{\text{кр}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}; \quad \text{звідси } d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot \tau_{\text{adm}}}}$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,357 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 31,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 31,2 \text{ мм};$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,143 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 56,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 56,7 \text{ мм};$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,072 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 45,0 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 45,0 \text{ мм};$$

$$d_4 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,643 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 37,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 37,9 \text{ мм}.$$

Приймаємо наступні діаметри вала:

$$d_1 = 35 \text{ мм}; \quad d_2 = 60 \text{ мм}; \quad d_3 = 45 \text{ мм}; \quad d_4 = 40 \text{ мм}.$$

Креслимо ескіз ступінчастого вала (рис. 18,г). Визначаємо полярні моменти інерції на кожній ділянці вала.

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}; \quad I_{p,1} = \frac{3,14 \cdot 35^4 \cdot 10^{-12}}{32} = 14,72 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{p,2} = \frac{3,14 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}}{32} = 127,17 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{p,3} = \frac{3,14 \cdot 45^4 \cdot 10^{-12}}{32} = 40,24 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{p,4} = \frac{3,14 \cdot 40^4 \cdot 10^{-12}}{32} = 25,12 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо кут закручування між крайніми перерізами кожної ділянки.

$$\varphi = \frac{M_{k,i} \cdot \ell_i}{G_i \cdot I_{p,i}};$$

$$\varphi_1 = \frac{-0,357 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 14,72 \cdot 10^{-8}} = -1,818 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{2,143 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{8 \cdot 10^{10} \cdot 127,17 \cdot 10^{-8}} = 1,896 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{1,072 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{8 \cdot 10^{10} \cdot 40,24 \cdot 10^{-8}} = 2,996 \cdot 10^{-2} \text{ рад ;}$$

$$\varphi_4 = \frac{0,643 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,12 \cdot 10^{-8}} = 1,920 \cdot 10^{-2} \text{ рад .}$$

Знаходимо кут закручування кожного шківа відносно прийнятого нерухомим лівого перерізу вала.

$$\varphi_{\text{лів}} = \varphi_1 = 0;$$

$$\varphi_{1-0} = \varphi_{\text{лів}} + \varphi_1 = 0 - 1,818 \cdot 10^{-2} = -1,818 \cdot 10^{-2} \text{ рад ;}$$

$$\varphi_{1-2} = \varphi_{1-0} + \varphi_2 = (-1,818 + 1,896) \cdot 10^{-2} = 0,078 \cdot 10^{-2} \text{ рад ;}$$

$$\varphi_{1-3} = \varphi_{1-2} + \varphi_3 = (0,078 + 2,996) \cdot 10^{-2} = 3,074 \cdot 10^{-2} \text{ рад ;}$$

$$\varphi_{1-4} = \varphi_{1-3} + \varphi_4 = (3,074 + 1,920) \cdot 10^{-2} = 4,994 \cdot 10^{-2} \text{ рад .}$$

Будуємо епюру кута закручування (рис. 18,д).

Обчислюємо найбільший відносний кут закручування

$$\theta_{\text{max}} = \theta_3 = \frac{\varphi_3}{l_3} \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{2,996 \cdot 10^{-2}}{0,9} \cdot \frac{180^0}{3,14} = 1,9 \text{ град/м .}$$

Завдання до РГР № 1, 2, 3  
ЗТЦБ г. Корбаков О. Ф. Додаток

Вихідні дані до задачі № 1

Таблиця 1

| Номер рядка | Цифра шифру |       |                                  |                     |       |                                  |                     | Номер схеми |
|-------------|-------------|-------|----------------------------------|---------------------|-------|----------------------------------|---------------------|-------------|
|             | перша       |       |                                  |                     | друга |                                  |                     |             |
|             | a (м)       | c (м) | A <sub>1</sub> (м <sup>2</sup> ) | F <sub>1</sub> (кН) | a (м) | A <sub>2</sub> (м <sup>2</sup> ) | F <sub>2</sub> (кН) |             |
| 0           | 3,2         | 3,0   | 0,20                             | 200                 | 5,2   | 0,45                             | 50                  | 0           |
| 1           | 3,4         | 4,0   | 0,25                             | 210                 | 5,0   | 0,50                             | 60                  | 1           |
| 2           | 3,6         | 3,2   | 0,40                             | 220                 | 4,8   | 0,55                             | 70                  | 2           |
| 3           | 3,8         | 3,4   | 0,25                             | 230                 | 4,5   | 0,60                             | 80                  | 3           |
| 4           | 4,0         | 3,6   | 0,30                             | 240                 | 4,6   | 0,65                             | 90                  | 4           |
| 5           | 4,2         | 3,0   | 0,35                             | 250                 | 4,8   | 0,45                             | 100                 | 5           |
| 6           | 4,4         | 3,5   | 0,20                             | 50                  | 3,0   | 0,50                             | 180                 | 6           |
| 7           | 4,6         | 4,0   | 0,30                             | 60                  | 3,2   | 0,55                             | 200                 | 7           |
| 8           | 4,8         | 5,0   | 0,40                             | 70                  | 3,4   | 0,60                             | 230                 | 8           |
| 9           | 5,0         | 4,4   | 0,35                             | 80                  | 3,0   | 0,65                             | 240                 | 9           |

Список літератури

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів. – К.: Вища шк., 1993. – 654 с.
2. Опір матеріалів. У 2-х ч., 5 кн. / За ред. Піскунова В.Г. – К.: Вища шк., 1995.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – 4-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1975. – 653 с.
4. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Будівельник 1982. – 367 с.
5. Миролюбов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. – 4-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1974. – 382 с.

РГР № 1 - Задача № 1 (10)  
Задача № 3  
РГР № 2 - Задача № 4 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9)  
РГР № 3 - Задача № 5, 6.



# Задача 1

Продовження додатку

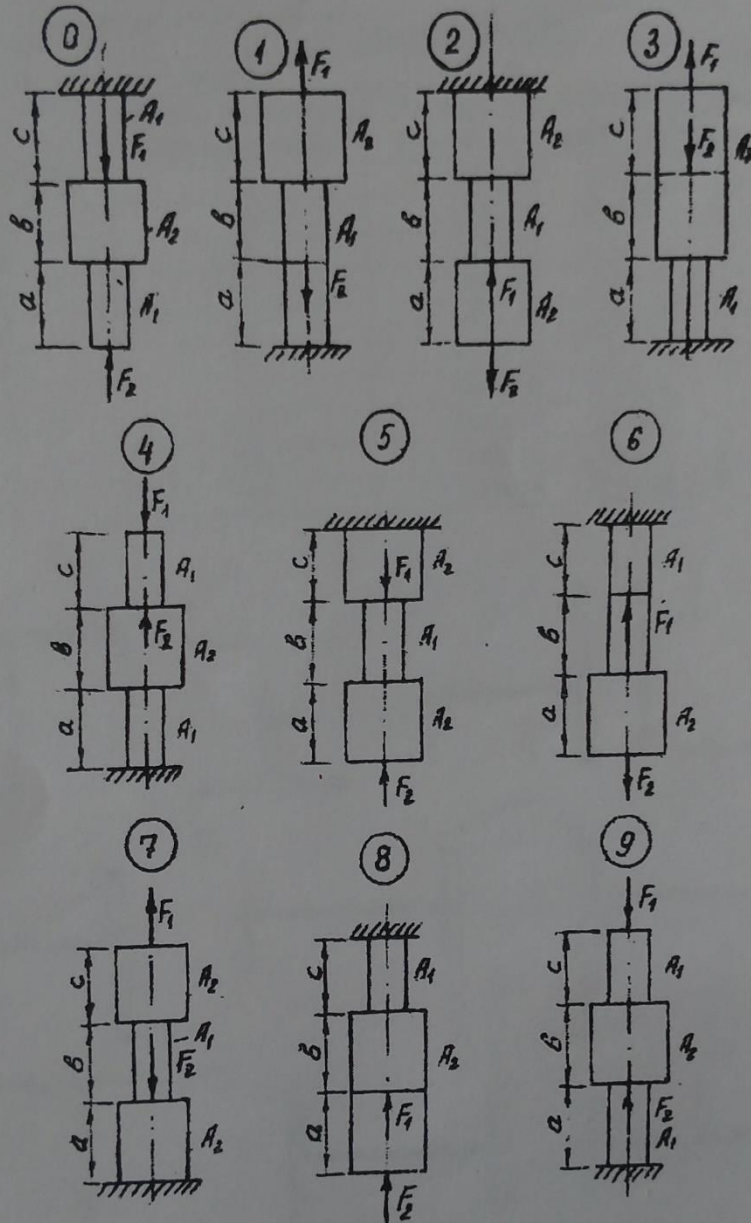


Рис. Д-1

Вихідні дані до задачі № 3

Таблиця 3

| Номер<br>рядка | Цифра шифру                   |                                 |        |                |
|----------------|-------------------------------|---------------------------------|--------|----------------|
|                | перша                         | друга                           | розмір | третья         |
|                | Номер двотавра<br>або швелера | Розміри рівно-<br>бічного кутка | Полози | Номер<br>схеми |
| 0              | 16                            | 100x10                          | 240x8  | 0              |
| 1              | 18                            | 125x14                          | 220x10 | 1              |
| 2              | 20                            | 125x12                          | 260x10 | 2              |
| 3              | 24                            | 140x10                          | 200x12 | 3              |
| 4              | 27                            | 140x12                          | 240x10 | 4              |
| 5              | 30                            | 160x10                          | 260x8  | 5              |
| 6              | 18                            | 160x12                          | 220x10 | 6              |
| 7              | 16                            | 160x14                          | 240x12 | 7              |
| 8              | 22                            | 100x12                          | 200x10 | 8              |
| 9              | 20                            | 100x14                          | 220x12 | 9              |

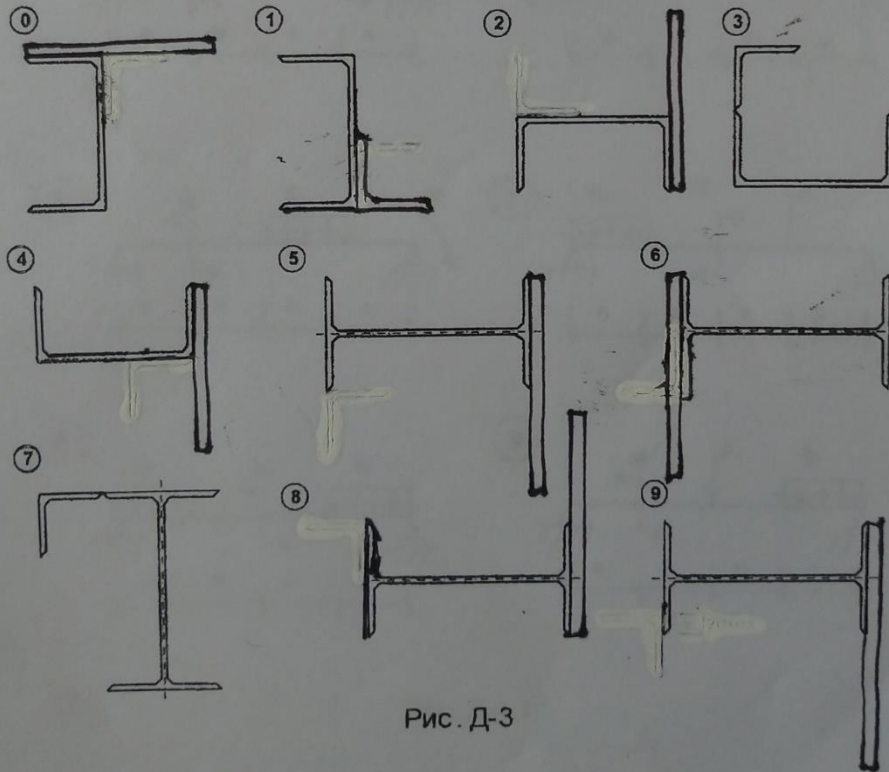


Рис. Д-3

# Задача 4.1

Продовження додатку

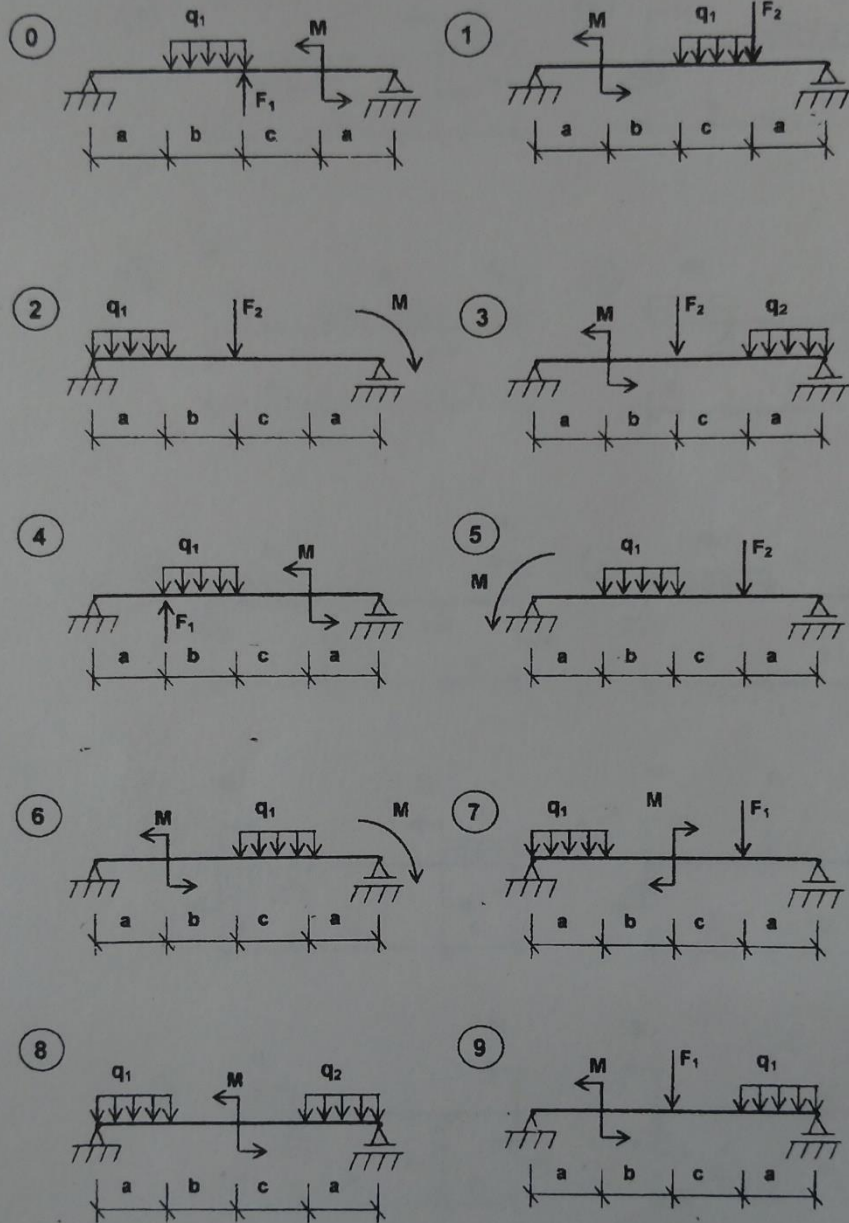


Рис. Д-4,1

# Задача 4.2

Продовження додатку

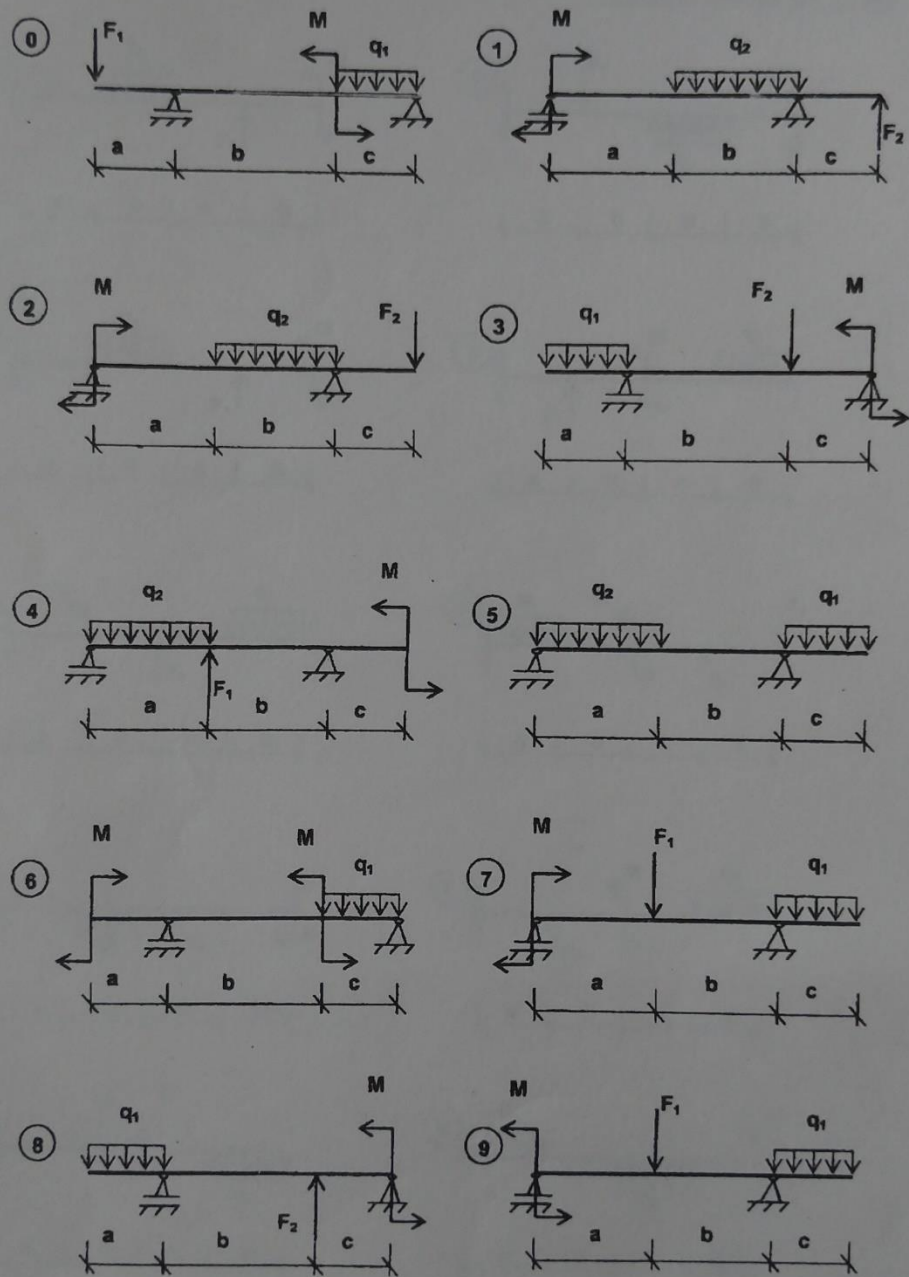


Рис. Д-4,2

# Задача 4.3

Продовження додатку

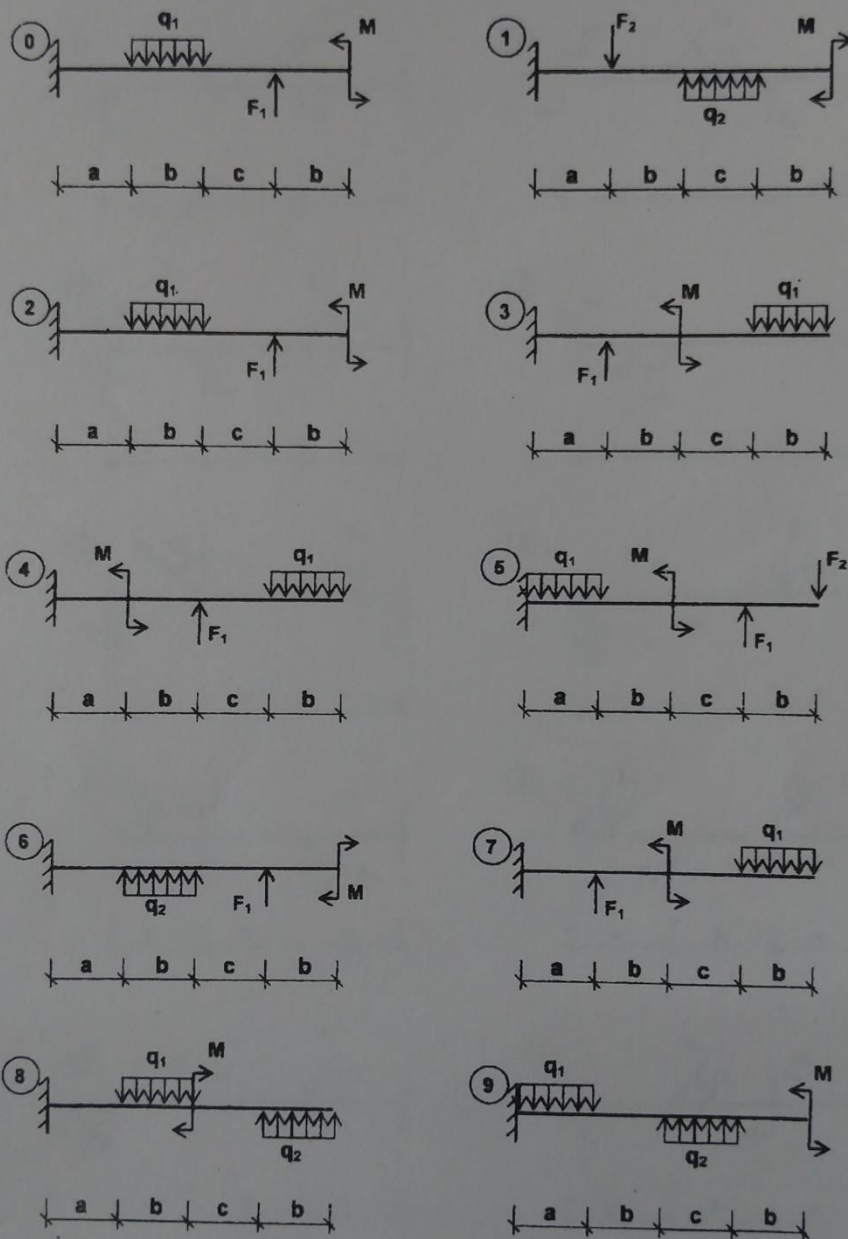


Рис. Д-4,3

# Задача 4.4

Продовження додатку

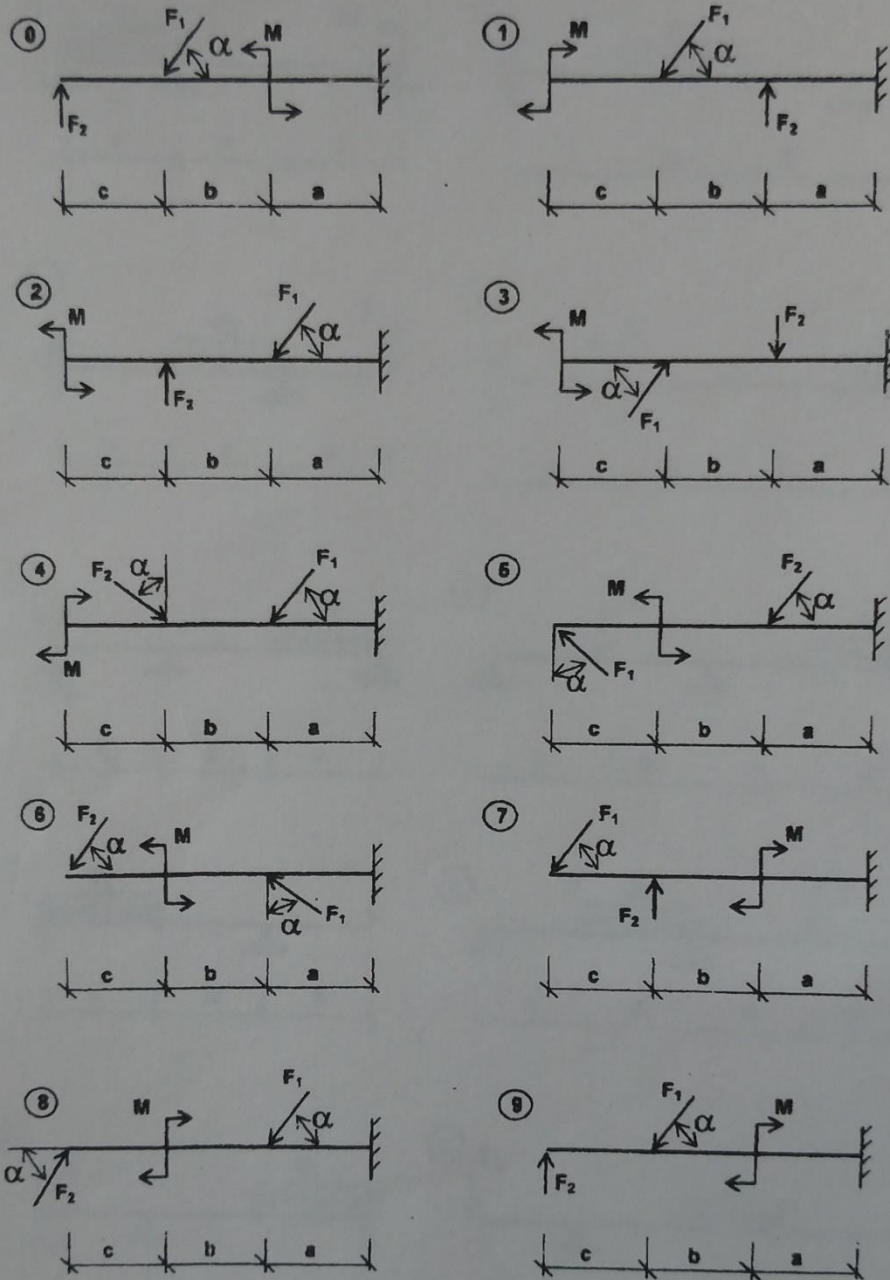


Рис. Д-4.4

# Задача 4.6

Продовження додатку

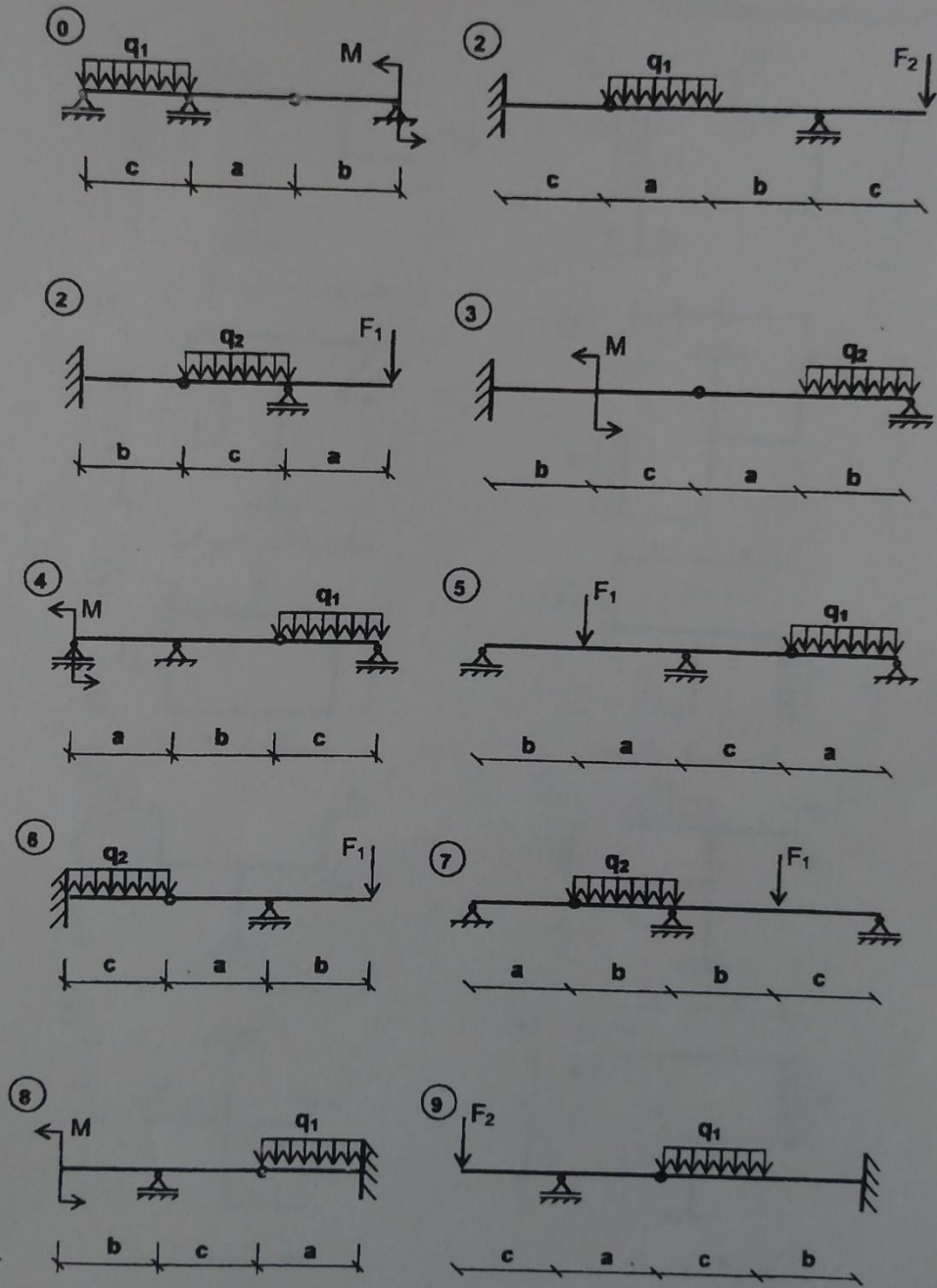


Рис. Д-4,6

# Задача 4.8

Продовження додатку

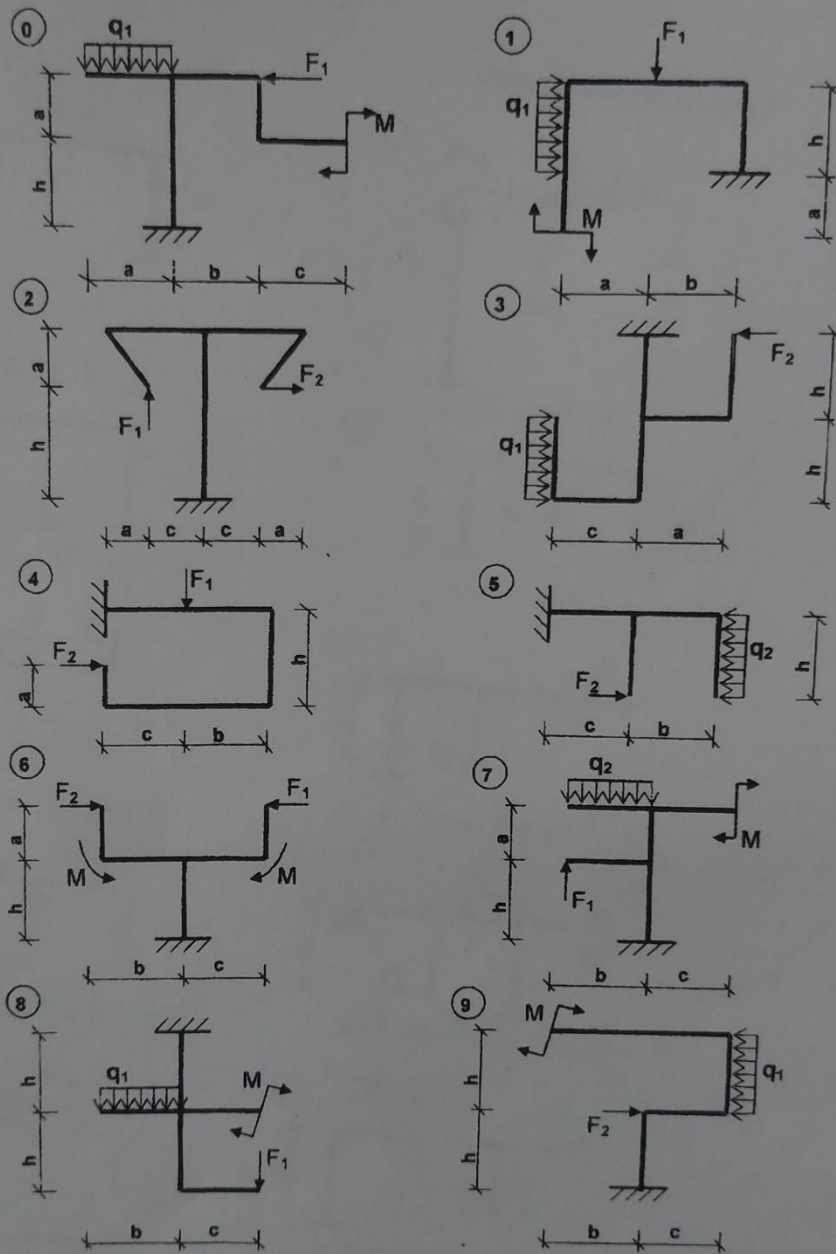


Рис. Д 4,8



# Задача 4.9

Продовження додатку

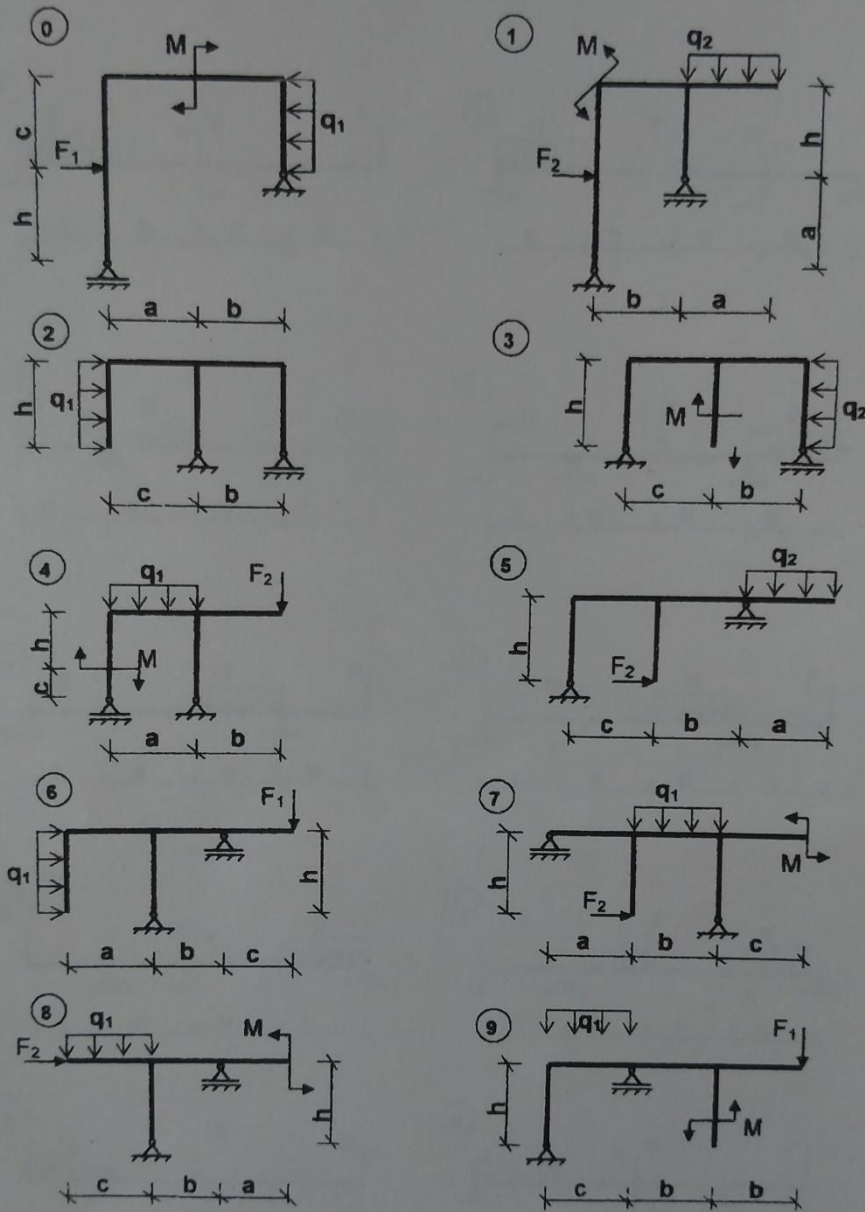


Рис. Д-4,9

# Задача 5

Продовження додатку

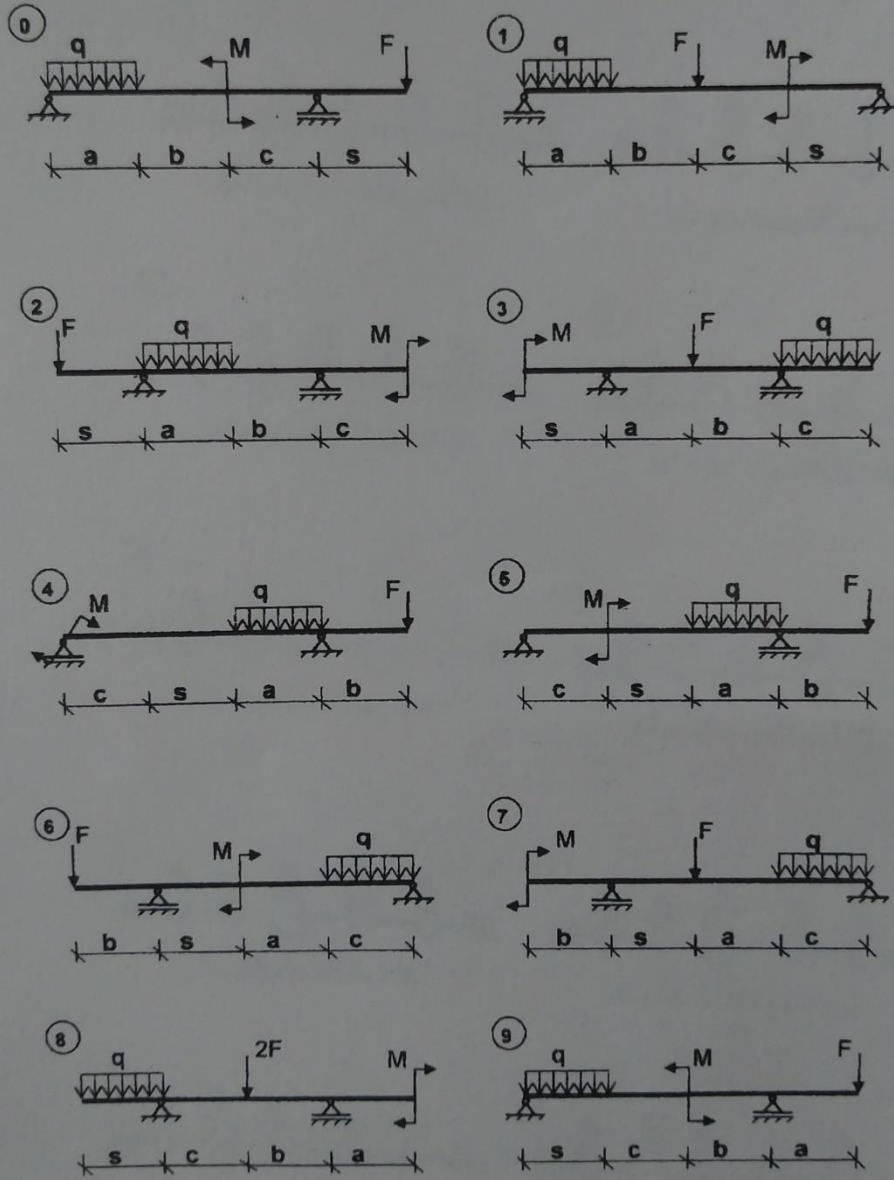


Рис. Д-5

# Задача 6.

Закінчення додатку

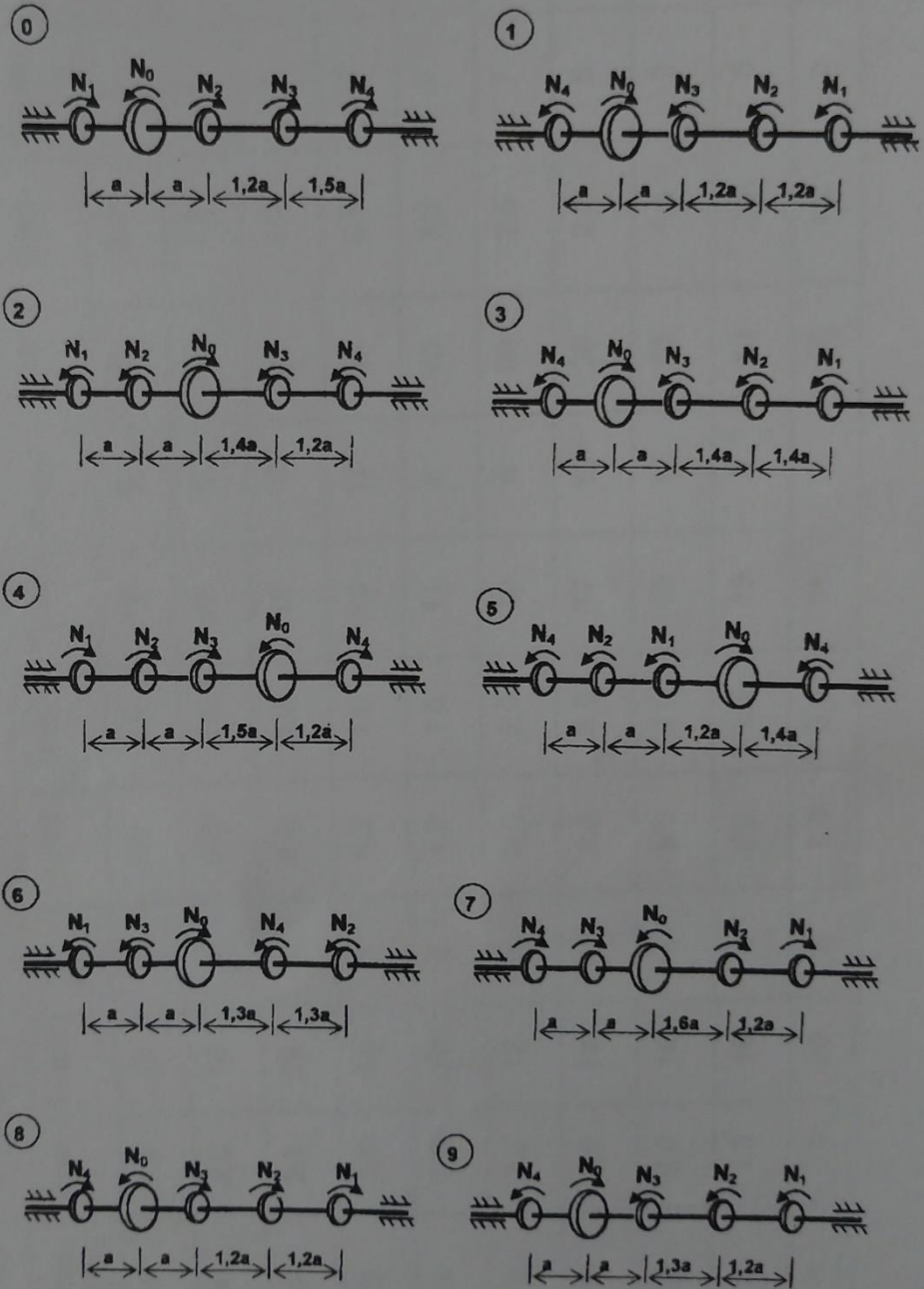


Рис. Д-6

Вихідні дані до задачі № 4

Таблиця 4

| Номер<br>Рядка<br>(цифра<br>шифру) | Перша цифра шифру |                     |                          |       | Друга цифра шифру |                     |         |          | Третя цифра шифру |                       |   | Номер<br>схеми |
|------------------------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|-------|-------------------|---------------------|---------|----------|-------------------|-----------------------|---|----------------|
|                                    | a (м)             | F <sub>1</sub> (кН) | Q <sub>1</sub><br>(кН/м) | h (м) | b (м)             | F <sub>2</sub> (кН) | M (кНм) | α (град) | c (м)             | Q <sub>2</sub> (кН/м) |   |                |
| 0                                  | 1,5               | 12                  | 4                        | 4,0   | 2,0               | 19                  | 6       | 30       | 2,5               | 5                     | 0 |                |
| 1                                  | 2,0               | 14                  | 6                        | 5,0   | 2,5               | 17                  | 8       | 45       | 1,5               | 7                     | 1 |                |
| 2                                  | 2,5               | 16                  | 8                        | 6,0   | 3,0               | 15                  | 10      | 60       | 2,0               | 9                     | 2 |                |
| 3                                  | 3,0               | 18                  | 4                        | 5,0   | 1,0               | 13                  | 12      | 30       | 2,5               | 11                    | 3 |                |
| 4                                  | 1,5               | 20                  | 6                        | 4,0   | 1,5               | 11                  | 8       | 45       | 3,0               | 9                     | 4 |                |
| 5                                  | 2,0               | 12                  | 8                        | 3,0   | 2,0               | 19                  | 6       | 60       | 2,5               | 7                     | 5 |                |
| 6                                  | 2,5               | 14                  | 10                       | 4,0   | 2,5               | 17                  | 10      | 30       | 2,0               | 5                     | 6 |                |
| 7                                  | 3,0               | 16                  | 4                        | 5,0   | 2,0               | 15                  | 12      | 45       | 1,5               | 3                     | 7 |                |
| 8                                  | 1,5               | 18                  | 6                        | 6,0   | 2,5               | 13                  | 6       | 60       | 2,0               | 5                     | 8 |                |
| 9                                  | 2,0               | 20                  | 8                        | 5,0   | 3,0               | 11                  | 7       | 30       | 1,5               | 7                     | 9 |                |

Продовження додатку

## Вихідні данні до задачі № 5

| Номер рядка | Цифри шифру |        |       |       |       |         |          |             |
|-------------|-------------|--------|-------|-------|-------|---------|----------|-------------|
|             | перша       |        |       |       |       |         |          | третя       |
|             | a (м)       | F (кН) | c (м) | s (м) | b (м) | M (кНм) | q (кН/м) | Номер схеми |
| 0           | 1,0         | 10     | 1,5   | 2,5   | 3,0   | 16      | 12       | 0           |
| 1           | 1,5         | 12     | 2,0   | 2,0   | 2,5   | 18      | 14       | 1           |
| 2           | 2,0         | 14     | 2,5   | 1,5   | 2,0   | 20      | 10       | 2           |
| 3           | 2,5         | 15     | 3,0   | 1,0   | 1,5   | 18      | 16       | 3           |
| 4           | 3,0         | 16     | 1,0   | 3,0   | 1,0   | 16      | 18       | 4           |
| 5           | 1,0         | 18     | 1,5   | 2,5   | 3,0   | 14      | 14       | 5           |
| 6           | 1,5         | 20     | 2,0   | 2,0   | 2,5   | 12      | 12       | 6           |
| 7           | 2,0         | 18     | 2,5   | 1,5   | 2,0   | 10      | 10       | 7           |
| 8           | 2,5         | 16     | 3,0   | 1,0   | 1,5   | 12      | 16       | 8           |
| 9           | 3,0         | 14     | 1,0   | 1,5   | 1,0   | 14      | 14       | 9           |

## Вихідні данні до задачі № 6

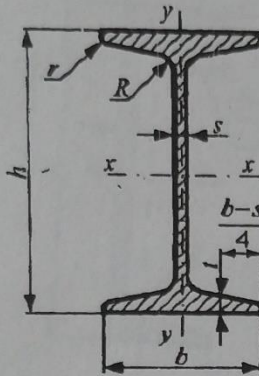
| Номер рядка | Цифри шифру          |                      |                      |                      |                  |       |                    |             |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------|-------|--------------------|-------------|
|             | перша                |                      |                      | друга                |                  |       |                    | третя       |
|             | N <sub>1</sub> (кВт) | N <sub>2</sub> (кВт) | N <sub>3</sub> (кВт) | N <sub>4</sub> (кВт) | $\omega$ (рад/с) | a (м) | $\tau_{adm}$ (МПа) | Номер схеми |
| 0           | 45                   | 60                   | 45                   | 30                   | 45               | 0,4   | 40                 | 0           |
| 1           | 50                   | 80                   | 40                   | 40                   | 50               | 0,6   | 40                 | 1           |
| 2           | 55                   | 70                   | 35                   | 50                   | 55               | 0,8   | 50                 | 2           |
| 3           | 60                   | 50                   | 30                   | 40                   | 60               | 1,0   | 50                 | 3           |
| 4           | 65                   | 40                   | 20                   | 30                   | 65               | 0,8   | 60                 | 4           |
| 5           | 70                   | 30                   | 40                   | 20                   | 70               | 0,6   | 60                 | 5           |
| 6           | 75                   | 20                   | 35                   | 60                   | 75               | 0,4   | 70                 | 6           |
| 7           | 80                   | 30                   | 20                   | 50                   | 60               | 0,6   | 70                 | 7           |
| 8           | 85                   | 40                   | 30                   | 55                   | 55               | 0,8   | 60                 | 8           |
| 9           | 90                   | 20                   | 40                   | 60                   | 50               | 1,0   | 60                 | 9           |

## ДОДАТКИ

Додаток 1

### Сортамент прокатної сталі:

#### 1. Двотаври (ГОСТ 8239-89)



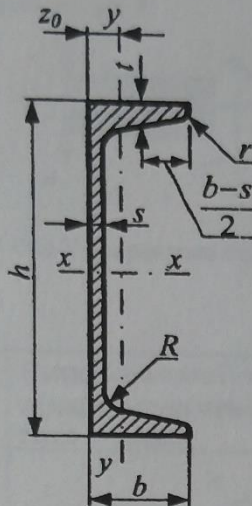
**Позначення:**

- $h$  — висота двотавра;
- $b$  — ширина полиці;
- $s$  — товщина стінки;
- $t$  — середня товщина полиці;
- $R$  — радіус внутрішнього закруглення;
- $r$  — радіус закруглення полиці;
- $J$  — момент інерції;
- $W$  — момент опору;
- $S$  — статичний момент півперерізу;
- $i$  — радіус інерції

| № двотавра | Розміри, мм |     |      |      |      |     | Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup> | Маса 1 м, кг | Довідкові значення для осей |                         |                         |            |                         |                         |                         |
|------------|-------------|-----|------|------|------|-----|---|--------------|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|            | $h$         | $b$ | $s$  | $t$  | $R$  | $r$ |   |              | $x-x$                       |                         |                         |            | $y-y$                   |                         |                         |
|            |             |     |      |      |      |     |   |              | Не більше                   | $J_x$ , см <sup>4</sup> | $W_x$ , см <sup>3</sup> | $i_x$ , см | $S_x$ , см <sup>3</sup> | $J_y$ , см <sup>4</sup> | $W_y$ , см <sup>3</sup> |
| 10         | 100         | 55  | 4,5  | 7,2  | 7,0  | 2,5 | 12,0  | 9,46         | 198                         | 39,7                    | 4,06                    | 23,0       | 17,9                    | 6,49                    | 1,22                    |
| 12         | 120         | 64  | 4,8  | 7,3  | 7,5  | 3,0 | 14,7  | 11,5         | 350                         | 58,4                    | 4,88                    | 33,7       | 27,9                    | 8,72                    | 1,38                    |
| 14         | 140         | 73  | 4,9  | 7,5  | 8,0  | 3,0 | 17,4  | 13,7         | 572                         | 81,7                    | 5,73                    | 46,8       | 41,9                    | 11,5                    | 1,55                    |
| 16         | 160         | 81  | 5,0  | 7,8  | 8,5  | 3,5 | 20,2  | 15,9         | 873                         | 109                     | 6,57                    | 62,3       | 58,6                    | 14,5                    | 1,70                    |
| 18         | 180         | 90  | 5,1  | 8,1  | 9,0  | 3,5 | 23,4  | 18,4         | 1290                        | 143                     | 7,42                    | 81,4       | 82,6                    | 18,4                    | 1,88                    |
| 20         | 200         | 100 | 5,2  | 8,4  | 9,5  | 4,0 | 26,8  | 21,0         | 1840                        | 184                     | 8,28                    | 104        | 115                     | 23,1                    | 2,07                    |
| 22         | 220         | 110 | 5,4  | 8,7  | 10,0 | 4,0 | 30,6  | 24,0         | 2550                        | 232                     | 9,13                    | 131        | 157                     | 28,6                    | 2,27                    |
| 24         | 240         | 115 | 5,6  | 9,5  | 10,5 | 4,0 | 34,8  | 27,3         | 3460                        | 289                     | 9,97                    | 163        | 198                     | 34,5                    | 2,37                    |
| 27         | 270         | 125 | 6,0  | 9,8  | 11,0 | 4,5 | 40,2  | 31,5         | 5010                        | 371                     | 11,2                    | 210        | 260                     | 41,5                    | 2,54                    |
| 30         | 300         | 135 | 6,5  | 10,2 | 12,0 | 5,0 | 46,5  | 36,5         | 7080                        | 472                     | 12,3                    | 268        | 337                     | 49,9                    | 2,69                    |
| 33         | 330         | 140 | 7,0  | 11,2 | 13,0 | 5,0 | 53,8  | 42,2         | 9840                        | 597                     | 13,5                    | 339        | 419                     | 59,9                    | 2,79                    |
| 36         | 360         | 145 | 7,5  | 12,3 | 14,0 | 6,0 | 61,9  | 48,6         | 13380                       | 743                     | 14,7                    | 423        | 516                     | 71,1                    | 2,89                    |
| 40         | 400         | 155 | 8,3  | 13,0 | 15,0 | 6,0 | 72,6  | 57,0         | 19062                       | 953                     | 16,2                    | 545        | 667                     | 86,1                    | 3,03                    |
| 45         | 450         | 160 | 9,0  | 14,2 | 16,0 | 7,0 | 84,7  | 66,5         | 27696                       | 1231                    | 18,1                    | 708        | 808                     | 101                     | 3,09                    |
| 50         | 500         | 170 | 10,0 | 15,2 | 17,0 | 7,0 | 100   | 78,5         | 39727                       | 1589                    | 19,9                    | 919        | 1043                    | 123                     | 3,23                    |
| 55         | 550         | 180 | 11,0 | 16,5 | 18,0 | 7,0 | 118   | 92,6         | 55962                       | 2035                    | 21,8                    | 1181       | 1356                    | 151                     | 3,39                    |
| 60         | 600         | 190 | 12,0 | 17,8 | 20,0 | 8,0 | 138   | 108          | 76806                       | 2560                    | 23,6                    | 1491       | 1725                    | 182                     | 3,54                    |

175  
**53**

## 2. Швелери (ГОСТ 8240-89)



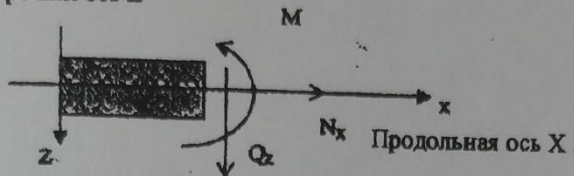
## Позначення:

- $h$  — висота швелера;  
 $b$  — ширина полиці;  
 $s$  — товщина стінки;  
 $t$  — товщина полиці;  
 $R$  — радіус внутрішнього закруглення;  
 $z_0$  — відстань від осі  $y$ — $y$  до зовнішньої грані стінки;  
 $r$  — радіус закруглення полки;  
 $J$  — момент інерції;  
 $W$  — момент опору;  
 $S$  — статичний момент півперерізу;  
 $i$  — радіус інерції.

| № швелера | Розміри, мм |     |     |      |           |     | Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup> | Маса 1 м, кг | Довідкові значення для осей |                            |               |                            |                            |                            |               |      | $z_0$ , см |
|-----------|-------------|-----|-----|------|-----------|-----|---|--------------|-----------------------------|----------------------------|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------|------|------------|
|           | $h$         | $b$ | $s$ | $t$  | $R$       | $r$ |   |              | $x-x$                       |                            |               |                            | $y-y$                      |                            |               |      |            |
|           |             |     |     |      | Не більше |     |   |              | $J_{xx}$ , см <sup>4</sup>  | $W_{xx}$ , см <sup>3</sup> | $i_{xx}$ , см | $S_{xx}$ , см <sup>3</sup> | $J_{yy}$ , см <sup>4</sup> | $W_{yy}$ , см <sup>3</sup> | $i_{yy}$ , см |      |            |
| 5         | 50          | 32  | 4,4 | 7,0  | 6,0       | 2,5 | 6,16  | 4,84         | 22,8                        | 9,1                        | 1,92          | 5,59                       | 5,61                       | 2,75                       | 0,95          | 1,16 |            |
| 6,5       | 65          | 36  | 4,4 | 7,2  | 6,0       | 2,5 | 7,51  | 5,90         | 48,6                        | 15,0                       | 2,54          | 9,00                       | 8,70                       | 3,68                       | 1,08          | 1,24 |            |
| 8         | 80          | 40  | 4,5 | 7,4  | 6,5       | 2,5 | 8,98  | 7,05         | 89,4                        | 22,4                       | 3,16          | 23,3                       | 12,8                       | 4,75                       | 1,19          | 1,31 |            |
| 10        | 100         | 46  | 4,5 | 7,6  | 7,0       | 3,0 | 10,90                                       | 8,59         | 174                         | 34,8                       | 3,99          | 20,4                       | 20,4                       | 6,46                       | 1,37          | 1,44 |            |
| 12        | 120         | 52  | 4,8 | 7,8  | 7,5       | 3,0 | 13,30                                       | 10,4         | 304                         | 50,6                       | 4,78          | 29,6                       | 31,2                       | 8,52                       | 1,53          | 1,54 |            |
| 14        | 140         | 58  | 4,9 | 8,1  | 8,0       | 3,0 | 15,60                                       | 12,3         | 491                         | 70,2                       | 5,60          | 40,8                       | 45,0                       | 11,0                       | 1,70          | 1,67 |            |
| 16        | 160         | 64  | 5,0 | 8,4  | 8,5       | 3,5 | 18,10                                       | 14,2         | 747                         | 93,4                       | 6,42          | 54,1                       | 63,3                       | 13,8                       | 1,87          | 1,80 |            |
| 16a       | 160         | 68  | 5,0 | 9,0  | 8,5       | 3,5 | 19,50                                       | 15,3         | 823                         | 103                        | 6,49          | 59,4                       | 78,8                       | 16,4                       | 2,01          | 2,00 |            |
| 18        | 180         | 70  | 5,1 | 8,7  | 9,0       | 3,5 | 20,70                                       | 16,3         | 1090                        | 121                        | 7,24          | 69,8                       | 86,0                       | 17,0                       | 2,04          | 1,94 |            |
| 18a       | 180         | 74  | 5,1 | 9,3  | 9,0       | 3,5 | 22,20                                       | 17,4         | 1190                        | 132                        | 7,32          | 76,1                       | 105                        | 20,0                       | 2,18          | 2,13 |            |
| 20        | 200         | 76  | 5,2 | 9,0  | 9,5       | 4,0 | 23,40                                       | 18,4         | 1520                        | 152                        | 8,07          | 87,8                       | 113                        | 20,5                       | 2,20          | 2,07 |            |
| 22        | 220         | 82  | 5,4 | 9,5  | 10,0      | 4,0 | 26,70                                       | 21,0         | 2110                        | 192                        | 8,89          | 110                        | 151                        | 25,1                       | 2,37          | 2,21 |            |
| 24        | 240         | 90  | 5,6 | 10,0 | 10,5      | 4,0 | 30,60                                       | 24,0         | 2900                        | 242                        | 9,73          | 139                        | 208                        | 31,6                       | 2,60          | 2,42 |            |
| 27        | 270         | 95  | 6,0 | 10,5 | 11,0      | 4,5 | 35,20                                       | 27,7         | 4160                        | 308                        | 10,9          | 178                        | 262                        | 37,3                       | 2,73          | 2,47 |            |
| 30        | 300         | 100 | 6,5 | 11,0 | 12,0      | 5,0 | 40,50                                       | 31,8         | 5810                        | 387                        | 12,0          | 224                        | 327                        | 43,6                       | 2,84          | 2,52 |            |
| 33        | 330         | 105 | 7,0 | 11,7 | 13,0      | 5,0 | 46,50                                       | 36,5         | 7980                        | 484                        | 13,1          | 281                        | 410                        | 51,8                       | 2,97          | 2,59 |            |
| 36        | 360         | 110 | 7,5 | 12,6 | 14,0      | 6,0 | 53,40                                       | 41,9         | 10820                       | 601                        | 14,2          | 350                        | 513                        | 61,7                       | 3,10          | 2,68 |            |
| 40        | 400         | 115 | 8,0 | 13,5 | 15,0      | 6,0 | 61,50                                       | 48,3         | 15220                       | 761                        | 15,7          | 444                        | 642                        | 73,4                       | 3,23          | 2,75 |            |

## Внутренние усилия в стержне

Поперечная ось Z



- $N_x$  - продольная сила, Н или кН
- $Q$  - поперечная сила, Н или кН
- $M$  - изгибающий момент, Нм или кНм

Ось Y направлена перпендикулярно плоскости ZoX

|          |   |
|----------|---|
| <b>N</b> | <p>Продольная сила <math>N</math> в любом сечении стержня численно равна <b>сумме проекций на продольную ось</b> стержня всех сил, которые находятся с одной (любой) стороны от этого сечения</p> |
|          |   |
|          | <p>Положительная продольная сила направлена от сечения (растягивает стержень), отрицательная – направлена к сечению (сжимает стержень)</p>  |

|          |   |
|----------|---|
| <b>Q</b> | <p>Поперечная сила <math>Q</math> в любом сечении стержня численно равна <b>сумме проекций на поперечную ось</b> стержня всех сил, которые находятся с одной (любой) стороны от этого сечения</p> |
|          |   |
|          | <p>Положительная поперечная сила вращает отсеченную часть стержня вокруг сечения по часовой стрелке, а отрицательная – против часовой стрелки</p>   |

|          |  |
|----------|--|
| <b>M</b> | <p>Изгибающий момент <math>M</math> в любом сечении стержня численно равен <b>сумме моментов</b> всех внешних сил (включая реакции), которые находятся с одной (любой) стороны от этого сечения, <b>относительно этого сечения</b>.<br/>         Момент силы равен произведению силы на плече.<br/>         Плечо – это (<math>\perp</math>) расстояние от сечения до линии действия силы.</p> |
|          |  |
|          | <p>Положительный изгибающий момент растягивает нижние волокна стержня, отрицательный – верхние.</p>  |