МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**Л. Т. Шкельов, Д. В. Пошивач**

# РОЗРАХУНОК РІЗНИХ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИХ СТАНІВ ПРЯМОЛІНІЙНОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ

*Рекомендовано науково-методичною радою*
*Київського національного університету будівництва і архітектури*
*як навчальний посібник для студентів, які навчаються*
*за напрямом підготовки 6.060101 "Будівництво"*

Київ 2012

УДК 539.3
ББК 30.121
Ш66

Рецензенти: *Ю. І. Немчинов,* д-р техн. наук, проф., перший заступник директора з наукової роботи, ДП "Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій"
*О. П. Кошевий,* канд. техн. наук, доц. кафедри опору матеріалів КНУБА

*Затверджено на засіданні науково-методичної ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 5 від 24 січня 2012 року.*

**Шкельов Л. Т.**
Ш66 Розрахунок різних напружено-деформованих станів прямолінійного стержня методом початкових параметрів: навчальний посібник / Л. Т. Шкельов, Д. В. Пошивач. – К.: КНУБА, 2012. – 68 с.

Викладено загальні положення методу початкових параметрів при розрахунку згинання стержня та кручення тонкостінного стержня. Дано конкретні розрахункові формули для різних напружено-деформованих станів стержня. Наведено приклади розрахунку. Дано вказівки щодо користування комп'ютерними програмами, розробленими для допомоги студентам під час виконання розрахунково-графічних робіт.

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.060101 "Будівництво".

УДК 539.3
ББК 30.121

## Вступ

Метод початкових параметрів є ефективним методом визначення переміщень і внутрішніх зусиль у стержнях, що перебувають у різних напружено-деформованих станах. Попри відмінності в конкретному вигляді розрахункових формул, загальний порядок розрахунку є спільним.

Даний навчальний посібник має на меті запропонувати однакову методику застосування методу початкових параметрів до розрахунку різних напружено-деформованих станів стержня, що значно спростило б засвоєння студентами відповідного навчального матеріалу.

Розроблено комплекс комп'ютерних програм, які здійснюють розрахунок стержня методом початкових параметрів. Використання цих програм студентами дозволить їм уникнути громіздких обчислень під час виконання відповідних розрахунково-графічних робіт. Даний посібник містить вказівки з користування цими програмами.

Навчальний посібник складається з трьох розділів.

У першому розділі викладено загальні положення методу. Наведено диференціальне рівняння, яке описує різні напружено-деформовані стани, й отримано його розв'язок у загальному вигляді. Розглянуто різні варіанти навантажень і граничних умов. Введено систему позначень, яка є спільною при розгляді всіх напружено-деформованих станів. Остаточний вигляд формул переміщень і внутрішніх зусиль зведено до табличної форми.

У другому розділі розглядаються чотири конкретних напружено-деформованих стани стержня: 1) плоске згинання; 2) плоске згинання стержня на пружній основі; 3) розрахунок стиснуто-зігнутого стержня за деформованою схемою; 4) кручення тонкостінного стержня. Наведено приклади розрахунку.

Третій розділ містить вказівки щодо користування програмами, які розраховують вищезгадані напружено-деформовані стани. Наведено приклади комп'ютерного розрахунку, які містять вихідні дані, підготовлені до введення у програму, та результати розрахунку, здійсненого програмою.

# Розділ 1. Загальні положення методу початкових параметрів

Метод початкових параметрів дає можливість знаходити переміщення та зусилля у різних напружено-деформованих станах прямолінійного стержня. Почнемо з розгляду трьох варіантів: стержень, що працює на згинання, стержень на пружній основі, що працює на згинання, а також стиснуто-зігнутий стержень. Особливості розв'язків для вказаних варіантів будуть розглянуті у розд. 2. Але слід підкреслити, що загальна методика їх розрахунку однакова. Почнемо з розгляду загальних положень, що є спільними для всіх перелічених варіантів.

## 1.1. Побудова загального розв'язку диференціального рівняння

Запишемо диференціальне рівняння, яке може бути застосоване до всіх перелічених напружено-деформованих станів стержня:

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_z(x)}{\mathrm{d}x^4}+\alpha_1^2\frac{\mathrm{d}^2 u_z(x)}{\mathrm{d}x^2}+\alpha_2^4 u_z(x)=\frac{1}{EI_y}\left(q_z(x)+\frac{\mathrm{d}m_y(x)}{\mathrm{d}x}\right), \qquad (1.1)$$

де $u_z(x)$ – головна невідома, поперечне переміщення стержня при згинанні;

$\alpha_1$, $\alpha_2$ – сталі коефіцієнти, що залежать від виду напружено-деформованого стану;

$q_z(x)$, $m_y(x)$ – функції зовнішніх розподілених навантажень (поперечного силового та згинального моментного відповідно);

$EI_y$ – згинальна жорсткість стержня.

Розрахунковою моделлю стержня є пряма лінія, що співпадає з повздовжньою віссю стержня (рис. 1.1). Систему координат оберемо таким чином, щоби вісь $Ox$ співпадала з повздовжньою віссю стержня, а осі $Oz$ та $Oy$ були головними осями перерізу. Початок координат розташуємо в лівій кінцевій точці стержня.

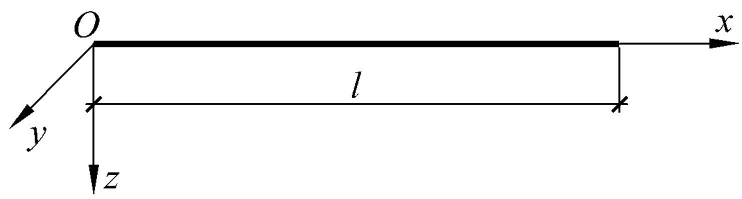



Рис. 1.1

Зазначимо декілька відомих положень розв’язання диференціального рівняння (1.1). Воно є лінійним неоднорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Його розв’язок складається з суми загального розв’язку однорідного рівняння

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_z(x)}{\mathrm{d}x^4} + \alpha_1^2 \frac{\mathrm{d}^2 u_z(x)}{\mathrm{d}x^2} + \alpha_2^4 u_z(x) = 0 \tag{1.2}$$

і часткового розв’язку неоднорідного рівняння. Для отримання загального розв’язку однорідного рівняння необхідно скласти характеристичне рівняння, яке у даному випадку має такий вигляд:

$$\kappa^4 + \alpha_1^2 \kappa^2 + \alpha_2^4 = 0. \tag{1.3}$$

Його чотири корені дорівнюють

$$\kappa_{1,2,3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^4 - 4\alpha_2^4}}\ . \tag{1.4}$$

Їхній характер залежить від значень коефіцієнтів $\alpha_1$ та $\alpha_2$. Корені $\kappa_i$ можуть бути дійсними, уявними та комплексними числами. Також корені можуть бути кратними. Кожному їх значенню відповідає один частковий розв’язок однорідного рівняння. Таким чином отримуються чотири часткових розв’язки $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$. Помноживши кожен з них на довільну константу $C_i$ та склавши ці добутки, отримаємо загальний розв’язок однорідного рівняння, до якого слід додати ще частковий розв’язок неоднорідного рівняння $u_z^*(x)$. Внаслідок цього матимемо

$$u_z(x) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + C_3\psi_3(x) + C_4\psi_4(x) + u_z^*(x).$$

Зробимо перетворення цього виразу з метою заміни констант $C_i$ іншими величинами, які мають певний зміст. Для цього замість функцій $\psi_i(x)$ застосуємо їхні лінійні комбінації, що можливе завдяки лінійному характеру рівняння (1.2). Складемо чотири вирази нових функцій:

$$f_1(x) = B_{11}\psi_1(x) + B_{12}\psi_2(x) + B_{13}\psi_3(x) + B_{14}\psi_4(x);$$

$$f_2(x) = B_{21}\psi_1(x) + B_{22}\psi_2(x) + B_{23}\psi_3(x) + B_{24}\psi_4(x);$$

$$f_3(x) = B_{31}\psi_1(x) + B_{32}\psi_2(x) + B_{33}\psi_3(x) + B_{34}\psi_4(x);$$

$$f_4(x) = B_{41}\psi_1(x) + B_{42}\psi_2(x) + B_{43}\psi_3(x) + B_{44}\psi_4(x).$$

На кожну функцію $f_i(x)$ у початковій точці $x = 0$ накладемо такі чотири умови:

$$\begin{aligned}
&f_1(0) = 1, \quad f_2(0) = 0, \quad f_3(0) = 0, \quad f_4(0) = 0;\\
&f_1'(0) = 0, \quad f_2'(0) = 1, \quad f_3'(0) = 0, \quad f_4'(0) = 0;\\
&f_1''(0) = 0, \quad f_2''(0) = 0, \quad f_3''(0) = 1, \quad f_4''(0) = 0;\\
&f_1'''(0) = 0, \quad f_2'''(0) = 0, \quad f_3'''(0) = 0, \quad f_4'''(0) = 1.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

На підставі цих умов складаються чотири системи рівнянь, з яких можна знайти всі константи $B_{ik}$.

Кожна з функцій $f_i(x)$ є частковим розв’язком однорідного рівняння (1.2), що дає змогу записати його загальний розв’язок у вигляді

$$u_z(x) = u_z(0)\, f_1(x) + u_z'(0)\, f_2(x) + u_z''(0)\, f_3(x) + u_z'''(0)\, f_4(x) + u_z^*(x). \tag{1.6}$$

Зауважимо, що функції $f_i(x)$ матимуть різний характер у різних напружено-деформованих станах стержня, тому визначати їх будемо під час розгляду конкретних напружено-деформованих станів.

Нові константи $u_z(0)$, $u_z'(0)$, $u_z''(0)$, $u_z'''(0)$ мають назву *початкових параметрів*. Початкові параметри дорівнюють переміщенню $u_z(x)$ та його похідним у точці $x = 0$. Впевнитись у цьому можна, якщо у вираз (1.6) підставити $x = 0$ та врахувати залежності (1.5), внаслідок чого отримаємо тотожність $u_z(0) = u_z(0)$.

Аналогічних висновків дійдемо, якщо підставимо $x=0$ у похідні від $u_z(x)$ до третього порядку і також врахуємо залежності (1.5). Але слід зауважити, що при цьому виникають такі вимоги до часткового розв'язку $u_z^*(x)$:

$$u_z^*(0)=0,\quad \left[u_z^*(0)\right]'=0,\quad \left[u_z^*(0)\right]''=0,\quad \left[u_z^*(0)\right]'''=0. \tag{1.7}$$

Початкові параметри знаходяться з алгебраїчних рівнянь, які складаються на підставі *граничних умов*. Два рівняння складаються, виходячи з граничних умов на лівому кінці стержня при $x=0$. Вони безпосередньо виражатимуть рівність двох початкових параметрів певним величинам. Ще два рівняння складаються, виходячи з граничних умов на правому кінці стержня. Детально граничні умови буде розглянуто пізніше.

Вимоги (1.7) задовольнятиме частковий розв'язок

$$u_z^*(x)=\frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4(x-t)\left[q_z(t)+m_y'(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

Підставивши у цей вираз $x=0$, отримаємо

$$u_z^*(x)=\frac{1}{EI_y}\int_0^0 f_4(0-t)\left[q_z(t)+m_y'(t)\right]\mathrm{d}t=0.$$

Таким чином задовольняється перша з вимог (1.7).

Знайдемо похідні від функції (1.8). Для цього застосуємо відому формулу

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\Phi(x-t)F(t)\mathrm{d}t=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\mathrm{d}\Phi(x-t)}{\mathrm{d}x}F(t)\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{\mathrm{d}\varphi_2(x)}{\mathrm{d}x}\left[\Phi(x-t)F(t)\right]\Big|_{t=\varphi_2(x)}-\frac{\mathrm{d}\varphi_1(x)}{\mathrm{d}x}\left[\Phi(x-t)F(t)\right]\Big|_{t=\varphi_1(x)}.$$

У виразі (1.8) $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=x$. Враховуючи це, знайдемо

$$\frac{\mathrm{d}u_z^*(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{EI_y}\int_0^x \frac{\mathrm{d}\,f_4(x-t)}{\mathrm{d}x}\left[q_z(t) + m'_y(t)\right]\mathrm{d}t +$$

$$+\frac{1}{EI_y}\,f_4(x-x)\left[q_z(x) + m'_y(x)\right]\ .$$

Беручи до уваги те, що згідно з умовами (1.5) $f_4(x-x) = f_4(0) = 0$, отримаємо остаточний вираз похідної від $u_z^*(x)$. Аналогічно знайдемо похідні другого, третього та четвертого порядку. Запишемо їхні остаточні вирази:

$$\frac{\mathrm{d}u_z^*(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{EI_y}\int_0^x \frac{\mathrm{d}\,f_4(x-t)}{\mathrm{d}x}\left[q_z(t) + m'_y(t)\right]\mathrm{d}t\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_z^*(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{EI_y}\int_0^x \frac{\mathrm{d}^2\,f_4(x-t)}{\mathrm{d}x^2}\left[q_z(t) + m'_y(t)\right]\mathrm{d}t\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 u_z^*(x)}{\mathrm{d}x^3} = \frac{1}{EI_y}\int_0^x \frac{\mathrm{d}^3\,f_4(x-t)}{\mathrm{d}x^3}\left[q_z(t) + m'_y(t)\right]\mathrm{d}t\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_z^*(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{EI_y}\int_0^x \frac{\mathrm{d}^4\,f_4(x-t)}{\mathrm{d}x^4}\left[q_z(t) + m'_y(t)\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{EI_y}\left[q_z(x) + m'_y(x)\right].$$

Якщо у похідні до третього порядку включно підставити $x = 0$, то отримаємо

$$\left[u_z^*(0)\right]' = 0,\quad \left[u_z^*(0)\right]'' = 0,\quad \left[u_z^*(0)\right]''' = 0\,.$$

Це говорить про те, що частковий розв’язок (1.8) задовольняє вимоги (1.7).

Також доведемо, що він дійсно є частковим розв’язком неоднорідного рівняння (1.1). Для цього підставимо у рівняння (1.1) функцію (1.8) та її похідні:

$$\frac{1}{EI_y}\int_0^x\left(\frac{\mathrm{d}^4\,f_4(x-t)}{\mathrm{d}x^4} + \alpha_1^2\,\frac{\mathrm{d}^2\,f_4(x-t)}{\mathrm{d}x^2} + \alpha_2^4\,f_4(x-t)\right)\left[q_z(t) + m'_y(t)\right]\mathrm{d}t +$$

$$+\frac{1}{EI_y}\left[q_z(x) + m'_y(x)\right] = \frac{1}{EI_y}\left[q_z(x) + m'_y(x)\right].$$

Функція $f_4(x)$ є розв'язком однорідного рівняння (1.2), тому підінтегральний вираз у дужках дорівнює нулю, і це призводить до тотожності:

$$q_z(x) + m'_y(x) = q_z(x) + m'_y(x).$$

Ця тотожність свідчить про те, що функція (1.8) дійсно є частковим розв'язком неоднорідного рівняння (1.1).

Зупинимось на перетворенні загального виразу переміщення (1.6). Напружено-деформований стан стержня характеризується такими переміщеннями та внутрішніми зусиллями:

$u_z(x)$ – поперечне переміщення паралельне осі $z$ (прогин);

$\varphi_y(x)$ – кут повороту поперечного перерізу відносно осі $y$ (кут нахилу);

$M_y(x)$ – згинальний момент;

$Q_z(x)$ – поперечна сила.

Ці величини можна назвати *функціями стану стержня*. Функції стану перебувають у деяких співвідношеннях між собою:

$$\begin{aligned} \varphi_y(x) &= u'_z(x); \\ M_y(x) &= -EI_y u''_z(x); \\ Q_z(x) &= -EI_y u'''_z(x) + m_y(x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

З цих формул випливає, що початкові параметри у формулі (1.6) пов'язані з початковими значеннями функцій стану (тобто їх значеннями у початковій точці стержня, де $x = 0$):

$$u'_z(0) = \varphi_y(0); \quad u''_z(0) = -\frac{M_y(0)}{EI_y}; \quad u'''_z(0) = -\frac{Q_z(0) - m_y(0)}{EI_y}.$$

Врахуємо ці співвідношення у формулі (1.6):

$$\begin{aligned} u_z(x) = u_z(0) f_1(x) + \varphi_y(0) f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y} f_3(x) - \\ - \frac{Q_z(0) - m_y(0)}{EI_y} f_4(x) + u_z^*(x). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Зробимо в цьому виразі деякі перетворення, що стосуються часткового розв’язку $u_z^*(x)$ і члена, який містить $m_y(0)$. Розглянемо формулу (1.8):

$$u_z^*(x) = \frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4(x-t)\left[q_z(t) + m_y'(t)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4(x-t)q_z(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4(x-t)m_y'(t)\mathrm{d}t.$$

Проінтегруємо частинами другий інтеграл:

$$u = f_4(x-t), \quad \mathrm{d}v = m_y'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}u = f_4'(x-t)(-\mathrm{d}t), \quad v = m_y(t).$$

$$\int_0^x f_4(x-t)m_y'(t)\mathrm{d}t = \left[m_y(t)\, f_4(x-t)\right]\Bigg|_{t=0}^{x} + \int_0^x f_4'(x-t)m_y(t)\mathrm{d}t =$$

$$= -m_y(0)\, f_4(x) + \int_0^x f_4'(x-t)m_y(t)\mathrm{d}t.$$

Отже, частковий розв’язок (1.8) набуває вигляду

$$u_z^*(x) = \frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4(x-t)q_z(t)\mathrm{d}t + \frac{-m_y(0)}{EI_y}\, f_4(x) + \frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4'(x-t)m_y(t)\mathrm{d}t\,.$$

Підставимо його у формулу (1.10). При цьому скоротиться величина $m_y(0)$. Отримаємо

$$u_z(x) = u_z(0)\, f_1(x) + \varphi_y(0)\, f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y}\, f_3(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y}\, f_4(x) + \\ + u_z^{**}(x), \tag{1.11}$$

де

$$u_z^{**}(x) = \frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4(x-t)q_z(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{EI_y}\int_0^x f_4'(x-t)m_y(t)\mathrm{d}t \; - \tag{1.12}$$

функція, що також є частковим розв’язком неоднорідного рівняння (1.1). Саме такий вид часткового розв’язку ми й будемо застосовувати надалі.

З формули прогину (1.11) виведемо формули інших переміщень та зусиль на підставі залежностей (1.9):

$$
\begin{aligned}
\varphi_y(x) &= u_z(0)\, f_1'(x) + \varphi_y(0)\, f_2'(x) - \\
&\quad - \frac{M_y(0)}{EI_y}\, f_3'(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y}\, f_4'(x) + \left[u_z^{**}(x)\right]'; \\
M_y(x) &= -EI_y u_z(0)\, f_1''(x) - EI_y \varphi_y(0)\, f_2''(x) + \\
&\quad + M_y(0)\, f_3''(x) + Q_z(0)\, f_4''(x) - EI_y \left[u_z^{**}(x)\right]''; \\
Q_z(x) &= -EI_y u_z(0)\, f_1'''(x) - EI_y \varphi_y(0)\, f_2'''(x) + \\
&\quad + M_y(0)\, f_3'''(x) + Q_z(0)\, f_4'''(x) - EI_y \left[u_z^{**}(x)\right]''' + m_y(x).
\end{aligned}
\qquad (1.13)
$$

Задля впорядкування запису формул (1.11) і (1.13) зробимо деякі перетворення. У формулах $u_z(x)$ і $\varphi_y(x)$ помножимо обидві частини на $EI_y$. Після цього введемо нові позначення для функцій стану та часткового розв’язку:

$$
\begin{aligned}
EI_y u_z(x) &= U_1(x); \\
EI_y \varphi_y(x) &= U_2(x); \\
M_y(x) &= U_3(x); \\
Q_z(x) &= U_4(x); \\
EI_y u_z^{**}(x) &= U^*(x).
\end{aligned}
\qquad (1.14)
$$

Перепишемо формули (1.11) і (1.13) з урахуванням нових позначень:

$$
\begin{aligned}
U_1(x) &= U_1(0)\, f_1(x) + U_2(0)\, f_2(x) - U_3(0)\, f_3(x) - U_4(0)\, f_4(x) + U^*(x); \\
U_2(x) &= U_1(0)\, f_1'(x) + U_2(0)\, f_2'(x) - U_3(0)\, f_3'(x) - U_4(0)\, f_4'(x) + \\
&\quad + \left[U^*(x)\right]'; \\
U_3(x) &= -U_1(0)\, f_1''(x) - U_2(0)\, f_2''(x) + U_3(0)\, f_3''(x) + U_4(0)\, f_4''(x) - \\
&\quad - \left[U^*(x)\right]''; \\
U_4(x) &= -U_1(0)\, f_1'''(x) - U_2(0)\, f_2'''(x) + U_3(0)\, f_3'''(x) + U_4(0)\, f_4'''(x) - \\
&\quad - \left[U^*(x)\right]''' + m_y(x).
\end{aligned}
\qquad (1.15)
$$

У подальшому під початковими параметрами будемо розуміти величини $U_i(0)$, тобто початкові значення відповідних функцій стану $U_i(x)$.

Зазначимо, що в отриманих формулах індекси $i$ початкових параметрів $U_i(0)$ збігаються з індексами функцій $f_i(x)$, на які вони множаться.

### 1.2. Визначення часткових розв'язків

Часткові розв'язки враховують вплив на стержень різноманітних зовнішніх факторів, до яких належать силові й моментні навантаження та вимушені лінійні й кутові переміщення. У частковому розв'язку враховуються всі фактори, що діють у точках осі стержня при $0 < x < l$. Фактори, що діють безпосередньо у точках $x = 0$ та $x = l$, у частковому розв'язку не враховуються (вони, натомість, враховуються у граничних умовах).

*Фактори впливу* бувають *зосередженими* в деяких точках осі стержня або *розподіленими* по деяких ділянках осі стержня.

Розглянемо зосереджені фактори впливу. Їх різновиди показано на рис. 1.2. До них належать зосереджене силове навантаження (рис. 1.2, *а*), зосереджене моментне навантаження (рис. 1.2, *б*), кут переламування в шарнірі (рис. 1.2, *в*), зсув у повзунковому шарнірі (рис. 1.2, *г*).

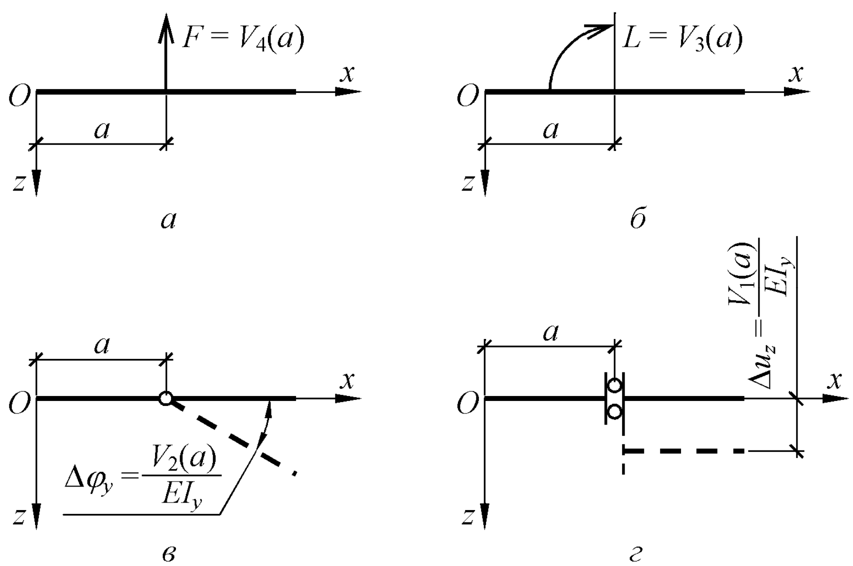



Рис. 1.2

Зазначимо, що зосереджені фактори впливу мають фізичний зміст, аналогічний до початкових параметрів. Тому введемо для них позначення, аналогічні до позначень початкових параметрів:

$$F = V_4(a), \quad L = V_3(a), \quad EI_y \Delta\varphi_y = V_2(a), \quad EI_y \Delta u_z = V_1(a).$$

У цих позначеннях номерні індекси співпадають з індексами в позначеннях аналогічних початкових параметрів $U_4(0)$, …, $U_1(0)$, а величина $a$, вказана у дужках, означає, що відповідний фактор впливу діє в точці з координатою $x = a$.

Частковий розв'язок, що враховує фактор впливу $V_i(a)$, міститиме таку ж функцію $f_i(x)$, яка у формулі загального розв'язку множиться на відповідний початковий параметр $U_i(0)$, але її аргументом замість $x$ буде величина $(x - a)$. Враховуватиметься такий частковий розв'язок лише при $a \le x \le l$.

Наприклад, частковий розв'язок у разі дії сили $F$ у точці $x = a$ матиме такий вигляд:

$$U^*(x) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le x \le a, \\ -Ff_4(x-a) = -V_4(a)\, f_4(x-a), \quad a \le x \le l. \end{cases}$$

У табл. 1.1 наведено формули часткових розв'язків, що враховують зосереджені фактори впливу, показані на рис. 1.2.

*Таблиця 1.1*

**Часткові розв'язки, що враховують зосереджені фактори впливу**

| Номер схеми на рис. 1.2 | Ділянка | Частковий розв'язок |
|---|---|---|
| *а* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = -Ff_4(x-a) = -V_4(a)\, f_4(x-a)$ |
| *б* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = -Lf_3(x-a) = -V_3(a)\, f_3(x-a)$ |
| *в* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = EI_y \Delta\varphi_y\, f_2(x-a) = V_2(a)\, f_2(x-a)$ |
| *г* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = EI_y \Delta u_z\, f_1(x-a) = V_1(a)\, f_1(x-a)$ |

Зазначимо, що у формулах часткових розв'язків індекси $i$ факторів впливу $V_i(a)$ збігаються з індексами функцій $f_i(x-a)$, на які вони множаться.

Початкові параметри $U_i(0)$ можна тлумачити не лише як початкові значення відповідних функцій стану $U_i(x)$, а й як відповідного виду зосереджені фактори впливу $V_i(a)$, прикладені в точці $x=a=0$:

$$U_i(0)=V_i(0).$$

Однак, слід наголосити на тому, що кожен початковий параметр необхідно враховувати лише одним з указаних способів. Якщо в будь-якій з формул (1.15) врахувати будь-який початковий параметр двічі (один раз – як власне початковий параметр $U_i(0)$, другий раз – як зосереджений фактор впливу $V_i(0)$ у складі часткового розв'язку), то це призведе до помилкового розв'язку задачі.

Перейдемо до визначення часткових розв'язків від розподілених факторів впливу, до яких належать розподілені силові й моментні навантаження. Вони представлені у правій частині рівняння (1.1) функціями $q_z(x)$ та $m_y(x)$ відповідно.

Почнемо із силового рівномірно розподіленого навантаження, що розташоване на ділянці між точкою $x=a$ та кінцевою точкою стержня $x=l$ (рис. 1.3).

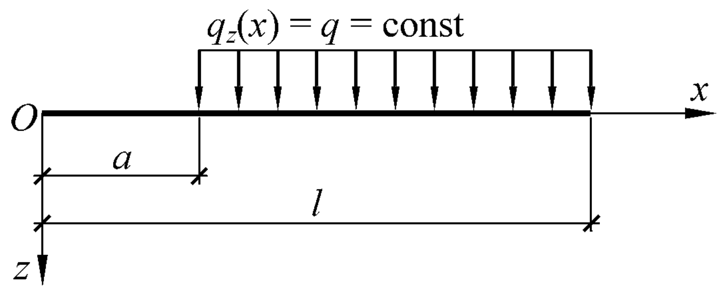



Рис. 1.3

У цьому випадку функція $q_z(x)$ має такий вигляд:

$$q_z(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a,\\ q, & a\le x\le l.\end{cases}$$

Відповідно до формули (1.12) частковий розв’язок дорівнюватиме

$$U^*(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a,\\ q\int\limits_a^x f_4(x-t)\,\mathrm{d}t, & a\le x\le l.\end{cases}$$

Введемо в інтеграл нову змінну $\eta = x-t$. Тоді $\mathrm{d}\eta=-\mathrm{d}t$; $\eta = x-a$, коли $t=a$; $\eta=0$, коли $t=x$. Матимемо

$$\int\limits_a^x f_4(x-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{x-a}^{0} f_4(\eta)(-\mathrm{d}\eta)=\int\limits_0^{x-a} f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

Застосуємо в інтегралі функцію $f_5(x)$, яка задовольняє умови

$$f_5'(x)=f_4(x),\quad f_5(0)=0. \tag{1.16}$$

Тоді інтеграл дорівнюватиме

$$\int\limits_0^{x-a} f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta=\int\limits_0^{x-a} f_5'(\eta)\,\mathrm{d}\eta=f_5(x-a). \tag{1.17}$$

Частковий розв’язок матиме вигляд

$$U^*(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a,\\ qf_5(x-a), & a\le x\le l.\end{cases} \tag{1.18}$$

Далі розглянемо силове навантаження, яке змінюється за лінійним законом (рис. 1.4). Воно виражається такою формулою:

$$q_z(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a,\\ \dfrac{q}{l-a}(x-a), & a\le x\le l.\end{cases}$$

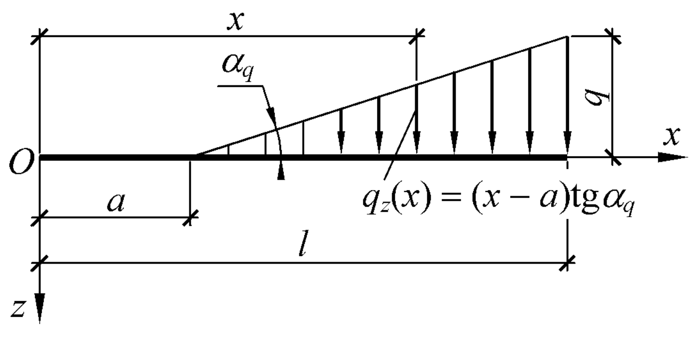



Рис. 1.4

Введемо у формулу тангенс кута нахилу епюри навантаження $\mathrm{tg}\alpha_q = \dfrac{q}{l-a}$. Частковий розв'язок запишемо, застосовуючи формулу (1.12):

$$U^*(x) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le x \le a, \\ \mathrm{tg}\alpha_q \int\limits_a^x f_4(x-a)(t-a)\,\mathrm{d}t, \quad a \le x \le l. \end{cases}$$

Для інтегрування введемо іншу змінну: $\eta = x - t$; $t = x - \eta$. Внаслідок цього отримаємо

$$\int\limits_a^x f_4(x-t)(t-a)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{x-a} f_4(\eta)(x-\eta-a)\,\mathrm{d}\eta \cdot$$

Останній інтеграл можна поділити на дві частини, одночасно враховуючи, що $x$ та $a$ не залежать від змінної $\eta$:

$$\int\limits_0^{x-a} f_4(\eta)(x-\eta-a)\,\mathrm{d}\eta = (x-a)\int\limits_0^{x-a} f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta - \int\limits_0^{x-a} \eta\, f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta \cdot$$

Беручи до уваги формулу (1.17), отримаємо

$$\begin{gathered} \int\limits_a^x f_4(x-t)(t-a)\,\mathrm{d}t = (x-a)\int\limits_0^{x-a} f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta - \int\limits_0^{x-a} \eta\, f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \\ = (x-a)\, f_5(x-a) - \int\limits_0^{x-a} \eta\, f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Інтеграл в отриманому виразі визначимо частинами, при цьому врахуємо, що $f_4(x) = f_5'(x)$. При інтегруванні приймемо

$$u = \eta, \quad \mathrm{d}v = f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta = f_5'(\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\eta, \quad v = f_5(\eta).$$

$$\int\limits_0^{x-a} \eta\, f_4(\eta)\,\mathrm{d}\eta = (x-a)\, f_5(x-a) - \int\limits_0^{x-a} f_5(\eta)\,\mathrm{d}\eta \cdot$$

Підставивши це у формулу (1.19), отримаємо

$$\int\limits_a^x f_4(x-t)(t-a)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{x-a} f_5(\eta)\,\mathrm{d}\eta \cdot \tag{1.20}$$

Введемо нову функцію $f_6(x)$, яка задовольняє умови

$$f_6'(x) = f_5(x), \quad f_6(0) = 0. \tag{1.21}$$

Якщо ці властивості функції $f_6(x)$ врахувати у формулі (1.20), матимемо

$$\int_a^x f_4(x-t)(t-a)\,\mathrm{d}t = f_6(x-a)\cdot$$

Це дає змогу записати остаточний вираз часткового розв'язку:

$$U^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a, \\ \mathrm{tg}\,\alpha_q\, f_6(x-a), & a \le x \le l. \end{cases} \tag{1.22}$$

Перейдемо до визначення часткових розв'язків від розподілених моментних навантажень. Згідно з формулою (1.12) їх загальний вираз матиме такий вигляд:

$$U^*(x) = \int_0^x m_y(t)\, f_4'(x-t)\,\mathrm{d}t\cdot$$

Виконавши перетворення, аналогічні до тих, що були зроблені для розподілених силових навантажень, отримаємо аналогічні розв'язки, з тією відмінністю, що номери $i$ функцій $f_i(x-a)$ будуть у них на одиницю менші.

При рівномірно розподіленому моментному навантаженні (рис. 1.5), що описується формулою

$$m_y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a, \\ m, & a \le x \le l, \end{cases}$$

частковий розв'язок матиме вигляд, подібний до (1.18):

$$U^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a, \\ m f_4(x-a), & a \le x \le l. \end{cases} \tag{1.23}$$

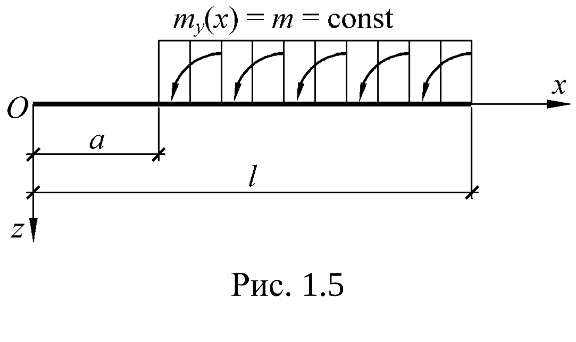



Рис. 1.5

При моментному навантаженні, яке змінюється за лінійним законом (рис. 1.6)

$$m_y(x) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le x \le a, \\ \dfrac{m}{l-a}(x-a) = \mathrm{tg}\alpha_m(x-a), \quad a \le x \le l, \end{cases}$$

частковий розв'язок матиме вигляд, подібний до (1.22):

$$U^*(x) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le x \le a, \\ \mathrm{tg}\alpha_m f_5(x-a), \quad a \le x \le l. \end{cases} \tag{1.24}$$

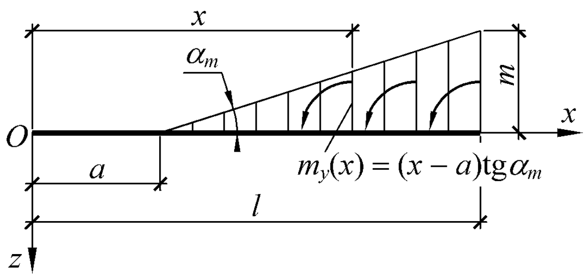



Рис. 1.6

Взагалі, можливі розподілені навантаження, величина яких змінюється по довжині стержня й за іншими функціональними залежностями. Але ми обмежимося розглядом сталих та лінійно-змінюваних розподілених навантажень, як найбільш поширених.

Підсумуємо часткові розв'язки для розглянутих видів розподілених навантажень у вигляді рис. 1.7 і табл. 1.2.

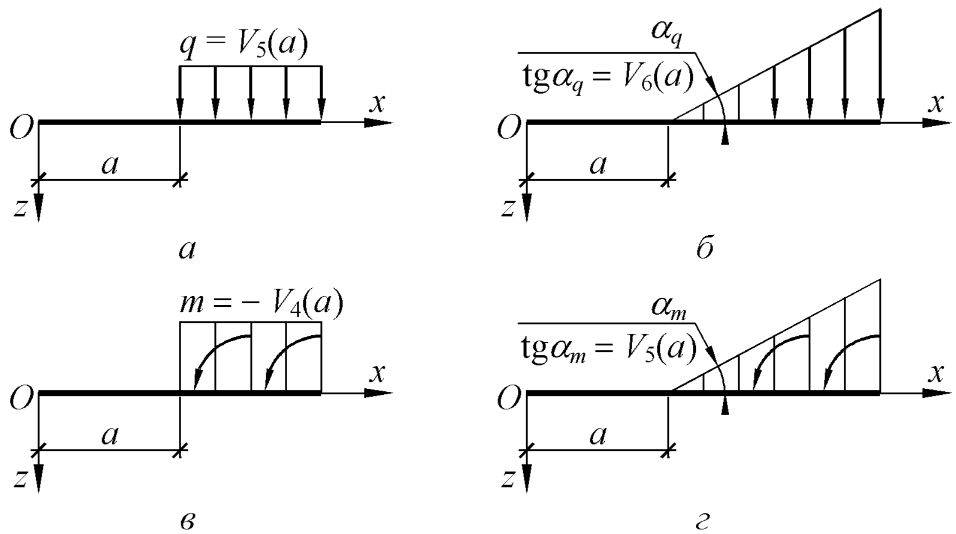



Рис. 1.7

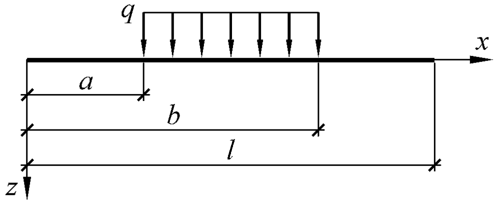
*Таблиця 1.2*

**Часткові розв'язки, що враховують розподілені фактори впливу**

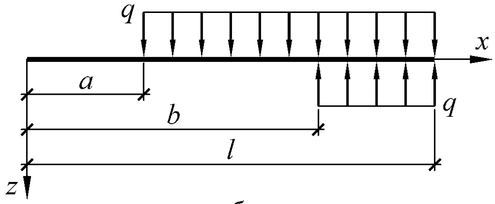
| Номер схеми на рис. 1.7 | Ділянка | Частковий розв'язок |
|---|---|---|
| *а* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = qf_5(x-a) = V_5(a)\, f_5(x-a)$ |
| *б* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = \mathrm{tg}\,\alpha_q\, f_6(x-a) = V_6(a)\, f_6(x-a)$ |
| *в* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = mf_4(x-a) = -V_4(a)\, f_4(x-a)$ |
| *г* | $0 \le x \le a$ | $U^*(x) = 0$ |
| | $a \le x \le l$ | $U^*(x) = \mathrm{tg}\,\alpha_m\, f_5(x-a) = V_5(a)\, f_5(x-a)$ |

На рисунку і в таблиці для величин сталих навантажень та для тангенсів кутів зростання лінійно-змінюваних навантажень введені позначення виду $V_i(a)$ з індексами $i$, відповідними до індексів функцій $f_i(x-a)$, на які вони множаться у формулах. В результаті, наприклад, позначення $V_4(a)$ може бути застосоване не лише для зосередженої сили, що діє в точці $x = a$, але й для рівномірно розподіленого моментного навантаження (зі зворотним знаком), яке діє на ділянці $a \le x \le l$. У цьому немає протиріччя, оскільки обидва ці фактори впливу враховуватимуться у формулах функцій стану однаково.

Наведені в табл. 1.2 часткові розв'язки стосуються навантажень, які прикладені на ділянці від точки $x = a$ й до кінця стержня. Але можливий випадок, коли навантаження починається з точки $x = a$ й закінчується при $x = b$ (рис. 1.8).




*а*




*б*

Рис. 1.8

У цьому випадку необхідно прикласти два навантаження (рис. 1.8, *б*). Одне – від точки $x = a$ й до кінця стержня, а друге – від точки $x = b$ і також до кінця стержня, але у протилежному напрямку. Вказана методика застосовується для будь-якого виду розподіленого навантаження.

У даному пункті були перелічені й отримали позначення всі різновиди факторів впливу, які розглядатимуться надалі. Було зазначено, що початкові параметри можуть бути представлені як фактори впливу, що діють у початковій точці стержня. Перепишемо формули (1.15), зробивши відповідне узагальнення.

Кожен фактор впливу $V_i(a)$ враховується лише при $a \le x \le l$. Для скорочення запису формул застосуємо функції $\tilde{f}_i(x)$, що визначаються таким чином:

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ f_i(x), & x \ge 0, \end{cases}$$

тобто, стосовно розрахунку стержня методом початкових параметрів,

$$\tilde{f}_i(x-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a, \\ f_i(x-a), & a \le x \le l. \end{cases} \tag{1.25}$$

Взагалі, у тій чи іншій конкретній задачі може зустрітися будь-яка кількість факторів впливу кожного виду. Частковий розв’язок буде сумою часткових розв’язків, що враховують кожен фактор впливу.

Враховуючи все вищезазначене, запишемо першу з формул (1.15):

$$\begin{aligned} U_1(x) = {} & \sum_i \left[V_1(a_i)\tilde{f}_1(x-a_i)\right] + \sum_j \left[V_2(b_j)\tilde{f}_2(x-b_j)\right] - \\ & - \sum_k \left[V_3(c_k)\tilde{f}_3(x-c_k)\right] - \sum_n \left[V_4(d_n)\tilde{f}_4(x-d_n)\right] + \\ & + \sum_p \left[V_5(g_p)\tilde{f}_5(x-g_p)\right] + \sum_r \left[V_6(h_r)\tilde{f}_6(x-h_r)\right], \end{aligned} \tag{1.26}$$

де $V_1(a_i)$ – помножені на згинальну жорсткість стержня зсуви, що утворюються в повзункових шарнірах у точках $x = a_i$, а також $V_1(0) = U_1(0) = EI_y u_z(0)$ – прогин початкової точки стержня, помножений на жорсткість;

$V_2(b_j)$ – помножені на жорсткість кути переламування, що утворюються в шарнірах у точках $x = b_j$, а також $V_2(0) = U_2(0) = EI_y \varphi_y(0)$ – кут нахилу початкової точки стержня, помножений на жорсткість;

$V_3(c_k)$ – зосереджені моменти, прикладені в точках $x = c_k$, у т. ч. $V_3(0) = U_3(0) = M_y(0)$ – зосереджений момент, що діє в початковій точці стержня;

$V_4(d_n)$ – зосереджені сили, прикладені в точках $x = d_n$, у т. ч. $V_4(0) = U_4(0) = Q_z(0)$ – зосереджена сила, що діє в початковій точці стержня, а також величини $m_n$ рівномірно розподілених моментних навантажень (взяті зі зворотним знаком), що діють на ділянках $d_n \le x \le l$;

$V_5(g_p)$ – тангенси кутів $\alpha_{mp}$ зростання лінійно-змінюваних розподілених моментних навантажень, що діють на ділянках $g_p \le x \le l$, а також величини $q_p$ силових навантажень, рівномірно розподілених по ділянках $g_p \le x \le l$;

$V_6(h_r)$ – тангенси кутів $\alpha_{qr}$ зростання лінійно-змінюваних розподілених силових навантажень, що діють на ділянках $h_r \le x \le l$.

В аналогічному до (1.26) вигляді можна представити й формули трьох інших функцій стану (1.15). Відобразимо чотири формули (1.15), зведені до вигляду (1.26), у формі табл. 1.3. Ця таблиця показуватиме, на які функції слід множити ті чи інші фактори впливу у складі загальної суми. Позначимо $x - a_i = \chi_i$, $x - b_j = \chi_j$, і т. д.

*Таблиця 1.3*

**Формули зусиль та переміщень стержня в загальному вигляді**

| Величина, що визначається | Функція, що міститься в доданку, який враховує фактор впливу | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V_1(a_i)$ | $V_2(b_j)$ | $V_3(c_k)$ | $V_4(d_n)$ | $V_5(g_p)$ | $V_6(h_r)$ | $m_y(x)$ |
| $U_1(x)$ | $\tilde{f}_1(\chi_i)$ | $\tilde{f}_2(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_n)$ | $\tilde{f}_5(\chi_p)$ | $\tilde{f}_6(\chi_r)$ | 0 |
| $U_2(x)$ | $\tilde{f}_1'(\chi_i)$ | $\tilde{f}_2'(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_3'(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_4'(\chi_n)$ | $\tilde{f}_5'(\chi_p)$ | $\tilde{f}_6'(\chi_r)$ | 0 |
| $U_3(x)$ | $-\tilde{f}_1''(\chi_i)$ | $-\tilde{f}_2''(\chi_j)$ | $\tilde{f}_3''(\chi_k)$ | $\tilde{f}_4''(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_5''(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_6''(\chi_r)$ | 0 |
| $U_4(x)$ | $-\tilde{f}_1'''(\chi_i)$ | $-\tilde{f}_2'''(\chi_j)$ | $\tilde{f}_3'''(\chi_k)$ | $\tilde{f}_4'''(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_5'''(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_6'''(\chi_r)$ | 1 |

В цій таблиці, наприклад, рядок, поіменований $U_1(x)$, показує порядок обчислення цієї функції стану (прогину, помноженого на жорсткість). Кожну з перелічених у рядку функцій слід помножити на відповідний фактор впливу, що ним поіменований відповідний стовпець. Отримані таким чином добутки слід скласти. Результат і буде шуканим значенням $U_1(x)$.

Останній стовпець таблиці, поіменований $m_y(x)$, відображає ту особливість формул (1.15), що при обчисленні поперечної сили $U_4(x)$ до загальної суми слід додати розподілене моментне навантаження $m_y(x)$, чого не робиться при обчисленні інших функцій стану.

Нагадаємо, що функції $\tilde{f}_i(x)$ у загальному вигляді знайти неможливо. Вони мають різний характер у різних напружено-деформованих станах стержня, тому визначатимуться під час розгляду відповідних станів.

Часткові розв’язки мають ще одну особливість. До їх складу можуть входити деякі фактори впливу, що є невідомими. Наприклад, кут переламування в шарнірі (див. рис. 1.2, *в*) та зсув у повзунковому шарнірі (див. рис. 1.2, *г*), як правило, являються невідомими.

Реакції у вигляді зосередженої сили в шарнірній опорі (рис. 1.9, *а*) та зосередженого моменту в повзунковій опорі (рис. 1.9, *б*) у загальному випадку також є невідомими. Звісно, при розрахунку статично визначуваної конструкції такі реакції можуть бути попередньо знайдені. Але розрахунку підлягають також і статично невизначувані конструкції. У загальному випадку при застосуванні методу початкових параметрів немає потреби в попередньому визначенні реакцій опор.

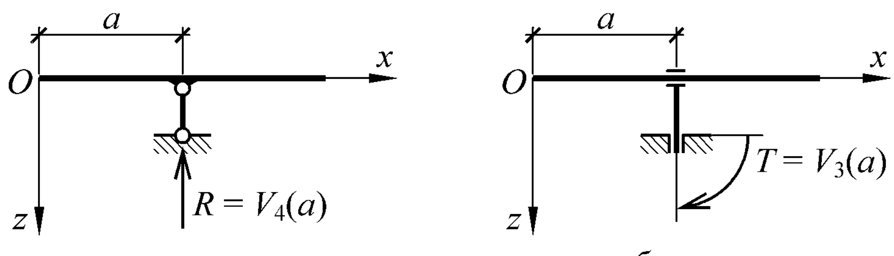



Рис. 1.9

Невідомі фактори впливу приєднуються до числа невідомих величин, до яких також належать початкові параметри. Але опори та з’єднання, де виникають невідомі фактори впливу, дозволяють також скласти *додаткові умови*, що приєднуються до системи рівнянь граничних умов. Таким чином, зростання кількості невідомих відбувається разом із відповідним збільшенням кількості рівнянь, з яких вони визначаються.

### 1.3. Граничні та додаткові умови

Граничні умови застосовуються для визначення невідомих констант, що входять у розв’язок диференціального рівняння. Залежать вони від характеру закріплення лівої та правої крайніх точок стержня. У кожній вказаній точці завжди є можливість скласти два рівняння – таким чином кількість граничних рівнянь відповідає кількості початкових параметрів. Якщо в інших точках стержня існують додаткові невідомі, то в них можна скласти відповідну кількість додаткових рівнянь.

Розглянемо можливі варіанти граничних умов у залежності від закріплення кінців стержня.

**1 варіант:** жорстке закріплення (рис. 1.10).

Лінійні й кутові переміщення $U_1(x)$ та $U_2(x)$ граничних точок дорівнюють нулю (або відомим величинам вимушених переміщень, якщо опори отримують вимушені переміщення, як показано на рисунку).

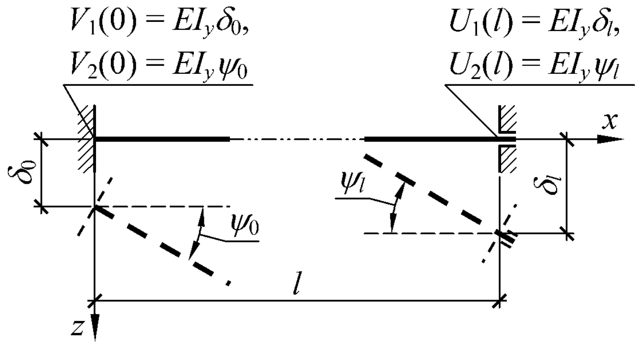



Рис. 1.10

На рис. 1.10 позначення опор на лівому та правому кінцях стержня дещо відрізняється. На лівому показане жорстке затиснення, а на правому – горизонтальний повзун, який відрізняється від затиснення тим, що дозволяє переміщення стержня вздовж його поздовжньої осі $x$. Ця відмінність має значення під час розрахунку стержня на розтяг та стиск, але під час розрахунку стержня на згинання (якому присвячений даний посібник) ці два різновиди закріплень еквівалентні.

**2 варіант:** шарнірне закріплення (рис. 1.11).

У граничних точках прогин $U_1(x)$ дорівнює нулю або відомим вимушеним прогинам. Також згинальний момент $U_3(x)$ дорівнює нулю або відомим зовнішнім зосередженим моментним навантаженням.

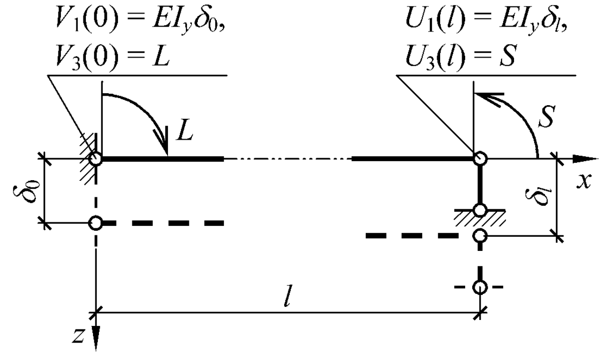



Рис. 1.11

На рис. 1.11 на лівому кінці стержня показана шарнірно-нерухома опора, а на правому – шарнірно-рухома. З точки зору розрахунку стержня на згинання ці різновиди опор еквівалентні.

**3 варіант:** повзункове закріплення (рис. 1.12).

У граничних точках кут нахилу $U_2(x)$ дорівнює нулю або відомим кутам вимушеного нахилу. Також поперечна сила $U_4(x)$ дорівнює нулю або відомим зовнішнім зосередженим силовим навантаженням.

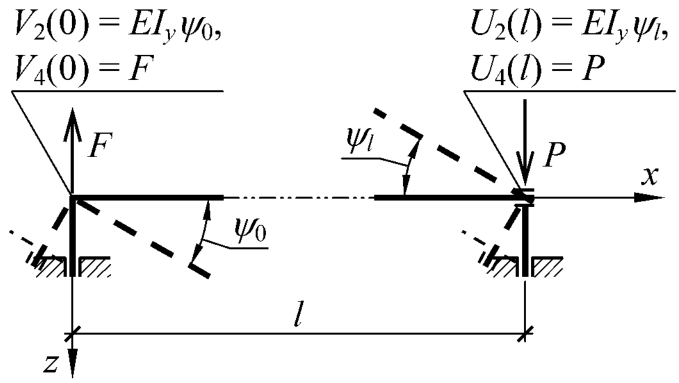



Рис. 1.12

На рис. 1.12 на лівому кінці стержня показана нерухома повзункова опора (вертикальний повзун), а на правому – рухома. З точки зору розрахунку стержня на згинання ці різновиди опор еквівалентні.

**4 варіант:** вільний край (рис. 1.13).

У граничних точках внутрішні зусилля $U_3(x)$ та $U_4(x)$ дорівнюють нулю або відомим зовнішнім зосередженим навантаженням.

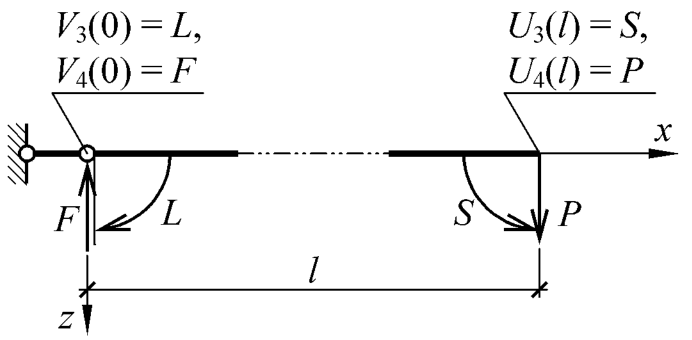



Рис. 1.13

На рис. 1.13 на правий кінець стержня не накладено жодних в’язей, а на лівому кінці стержень закріплений горизонтальною шарнірно-рухомою опорою. Така опора унеможливлює лише поздовжнє переміщення і не впливає на згинальні переміщення стержня (прогин та кут нахилу). Тому під час розрахунку цього стержня на згинання вважається, що його кінці закріплені однаково.

Граничні умови на лівому кінці (у початковій точці) стержня одразу безпосередньо виражають рівність двох початкових параметрів деяким відомим величинам. Ці початкові параметри включаються до числа відомих факторів впливу. Два інших початкових параметри можуть бути визначені з системи двох рівнянь, що виражають граничні умови на правому кінці стержня.

Якщо ж кількість невідомих більша за рахунок деяких невідомих факторів впливу, тоді до цієї системи рівнянь мають бути приєднані додаткові умови. Ті ж особливості схеми стержня (рис. 1.14), що спричиняють появу додаткових невідомих, дозволяють складати додаткові умови.

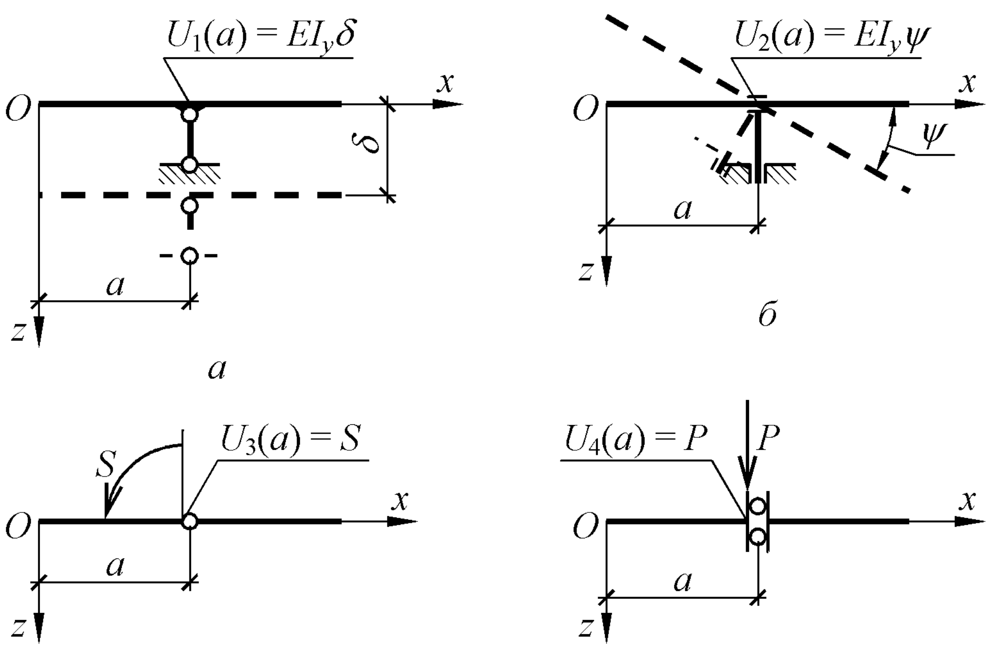



Рис. 1.14

Розглянемо можливі варіанти додаткових умов.

**1 варіант:** шарнірна опора (рис. 1.14, *а*). У точці опори прогин дорівнює нулю або відомій величині вимушеного прогину, як показано на рисунку.

**2 варіант:** повзункова опора (рис. 1.14, *б*). У точці опори кут нахилу дорівнює нулю або відомій величині кута вимушеного нахилу.

**3 варіант:** шарнір (рис. 1.14, *в*). На кінці лівої частини стержня в точці з'єднання згинальний момент дорівнює нулю або відомому зовнішньому зосередженому моментному навантаженню.

**4 варіант:** повзунковий шарнір (рис. 1.14, *г*). На кінці лівої частини стержня в точці з'єднання поперечна сила дорівнює нулю або відомому зовнішньому зосередженому силовому навантаженню.

### 1.4. Приклад застосування загальних положень

Загальний розв'язок задачі здійснюється згідно з табл. 1.3 і полягає у знаходженні значень функцій стану, що ними поіменовані рядки, у будь-яких точках осі стержня. Для підготовки до обчислення таких значень необхідно визначити всі наявні в задачі фактори впливу, що ними поіменовані стовпці таблиці.

Чотири з них є початковими параметрами, два з яких виявляються відомими з граничних умов на лівому кінці стержня. Два інших є невідомими. Крім них у задачі можливі ще деякі відомі та невідомі фактори впливу. Усі невідомі мають визначатися з системи рівнянь граничних та додаткових умов.

Проілюструємо вказані дії на прикладі. Розглянемо стержень, зображений на рис. 1.15.

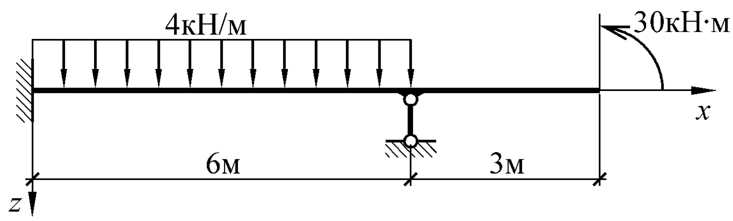



Рис. 1.15

Розподілене силове навантаження потрібно замінити так, як показано на рис. 1.8.

Перелічимо фактори впливу, що мають місце у даній задачі:

$V_1(0)$ – початковий прогин;

$V_2(0)$ – початковий кут нахилу;

$V_3(0)$ – початковий згинальний момент;

$V_4(0)$ – початкова поперечна сила;

$V_4(6)$ – зосереджена сила, прикладена при $x = 6$м (реакція опори);

$V_5(0)$ – рівномірно розподілене силове навантаження, прикладене при $x \geq 0$;

$V_5(6)$ – рівномірно розподілене силове навантаження, прикладене при $x \geq 6$м. Усі ці величини показано на рис. 1.16.

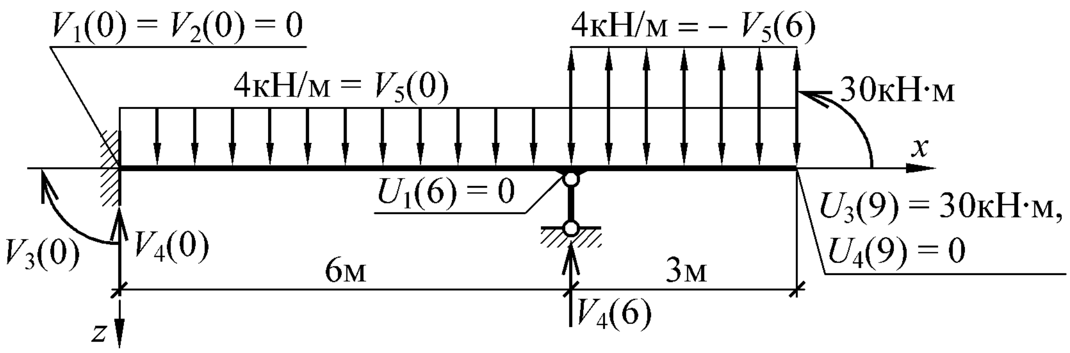



Рис. 1.16

Проаналізуємо ці величини. Дві з них є відомими з умови задачі:

$$V_5(0) = 4\text{кН/м}, \quad V_5(6) = -4\text{кН/м}.$$

Ще дві виявляються відомими з граничних умов на лівому кінці як початкові параметри. При жорсткому закріпленні

$$V_1(0) = 0, \quad V_2(0) = 0.$$

Залишаються невідомими три величини: $V_3(0)$ і $V_4(0)$ – як початкові параметри, та $V_4(6)$ – як реакція в шарнірній опорі. Для їх визначення необхідно скласти систему трьох рівнянь на підставі граничних та додаткових умов. Такими є граничні умови на правому кінці та додаткова умова в точці шарнірної опори.

Правий кінець стержня є вільним краєм, тому

$$U_3(9)=30\,\text{кН}\cdot\text{м},\quad U_4(9)=0.$$

Додаткова умова в шарнірній опорі твердить, що

$$U_1(6)=0.$$

Склавши вирази лівих частин рівнянь згідно з табл. 1.3, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&U_1(6)=0:\quad -V_3(0)\tilde{f}_3(6-0)-V_4(0)\tilde{f}_4(6-0)-V_4(6)\tilde{f}_4(6-6)+\\
&\qquad\qquad +4\tilde{f}_5(6-0)-4\tilde{f}_5(6-6)=0;\\
&U_3(9)=30:\quad V_3(0)\tilde{f}_3''(9-0)+V_4(0)\tilde{f}_4''(9-0)+V_4(6)\tilde{f}_4''(9-6)-\\
&\qquad\qquad -4\tilde{f}_5''(9-0)+4\tilde{f}_5''(9-6)=30;\\
&U_4(9)=0:\quad V_3(0)\tilde{f}_3'''(9-0)+V_4(0)\tilde{f}_4'''(9-0)+V_4(6)\tilde{f}_4'''(9-6)-\\
&\qquad\qquad -4\tilde{f}_5'''(9-0)+4\tilde{f}_5'''(9-6)=0.
\end{aligned}\tag{1.27}$$

Виразимо функції $\tilde{f}_i(x-a)$ через $f_i(x-a)$ згідно з формулою (1.25). Врахуємо також те, що, згідно з формулами (1.5) та (1.16), $f_4(0)=f_5(0)=0$. Отримаємо систему рівнянь у такому вигляді:

$$\begin{cases}
-V_3(0)f_3(6)-V_4(0)f_4(6)+4f_5(6)=0,\\
V_3(0)f_3''(9)+V_4(0)f_4''(9)+V_4(6)f_4''(3)-4f_5''(9)+4f_5''(3)=30,\\
V_3(0)f_3'''(9)+V_4(0)f_4'''(9)+V_4(6)f_4'''(3)-4f_5'''(9)+4f_5'''(3)=0.
\end{cases}$$

Слід підкреслити, що функції $f_i(x)$ застосовані в загальному вигляді. Подальше розв’язання задачі не є можливим, поки не будуть отримані їхні конкретні вирази.

# Розділ 2. Розгляд різних напружено-деформованих станів стержня

У цьому розділі буде викладено методику застосування загальних положень методу початкових параметрів, які наведені у розд. 1, при розгляді різних напружено-деформованих станів стержня. Будуть отримані остаточні вирази потрібних розрахункових формул.

## 2.1. Стержень, що згинається у вертикальній площині

Диференціальне рівняння (1.1) при звичайному згинанні стержня набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_z(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{EI_y}\left[q_z(x) + m'_y(x)\right],$$

тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Підставивши ці значення у формулу (1.4), отримаємо

$$\kappa_{1,2,3,4} = 0\,.$$

Характеристичне рівняння (1.3) має чотирикратний нульовий розв'язок, тому розв'язки однорідного диференціального рівняння (1.2) будуть дорівнювати

$$\psi_1(x) = 1,\quad \psi_2(x) = x,\quad \psi_3(x) = x^2,\quad \psi_4(x) = x^3\,.$$

Складемо з них функції, які задовольняють умови (1.5):

$$f_1(x) = 1;\quad f_2(x) = x;\quad f_3(x) = \frac{x^2}{2};\quad f_4(x) = \frac{x^3}{6}. \tag{2.1}$$

Необхідно знайти ще дві функції $f_5(x)$, $f_6(x)$ з умов (1.16), (1.21). З тих умов випливає, що

$$f_6''(x) = f_5'(x) = f_4(x) = \frac{x^3}{6},\quad f_6(0) = f_5(0) = 0\,\cdot$$

Неважко знайти

$$f_5(x) = \frac{x^4}{24},\quad f_6(x) = \frac{x^5}{120}\,\cdot \tag{2.2}$$

Перепишемо табл. 1.3, враховуючи конкретний вид функцій $f_i(x)$.

*Таблиця 2.1*

**Формули зусиль та переміщень стержня при плоскому згинанні**

| Величина, що визначається | Функція, що міститься в доданку, який враховує фактор впливу | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V_1(a_i)$ | $V_2(b_j)$ | $V_3(c_k)$ | $V_4(d_n)$ | $V_5(g_p)$ | $V_6(h_r)$ | $m_y(x)$ |
| $U_1(x)$ | $\tilde{f}_1(\chi_i)$ | $\tilde{f}_2(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_n)$ | $\tilde{f}_5(\chi_p)$ | $\tilde{f}_6(\chi_r)$ | 0 |
| $U_2(x)$ | 0 | $\tilde{f}_1(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_n)$ | $\tilde{f}_4(\chi_p)$ | $\tilde{f}_5(\chi_r)$ | 0 |
| $U_3(x)$ | 0 | 0 | $\tilde{f}_1(\chi_k)$ | $\tilde{f}_2(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_r)$ | 0 |
| $U_4(x)$ | 0 | 0 | 0 | $\tilde{f}_1(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_r)$ | 1 |

Табл. 2.1, на відміну від табл. 1.3, може бути безпосередньо застосована для обчислень, оскільки містить відомі функції, які визначаються формулами (2.1), (2.2) та (1.25).

Зазначимо, що в табл. 2.1 в діагональному напрямку розташовуються однакові функції.

Розглянемо приклад розрахунку стержня, що згинається. Розрахункову схему стержня зображено на рис. 1.16. У п. 1.4 для цієї задачі вже було виконано визначення складу відомих та невідомих факторів впливу, граничних та додаткових умов.

Складемо систему рівнянь аналогічного до (1.27) змісту, керуючись табл. 2.1:

$$U_1(6)=0: \quad -V_3(0)\,\tilde{f}_3(6-0)-V_4(0)\,\tilde{f}_4(6-0)-V_4(6)\,\tilde{f}_4(6-6)+$$
$$+4\,\tilde{f}_5(6-0)-4\,\tilde{f}_5(6-6)=0;$$

$$U_3(9)=30: \quad V_3(0)\,\tilde{f}_1(9-0)+V_4(0)\,\tilde{f}_2(9-0)+V_4(6)\,\tilde{f}_2(9-6)-$$
$$-4\,\tilde{f}_3(9-0)+4\,\tilde{f}_3(9-6)=30;$$

$$U_4(9)=0: \quad V_4(0)\,\tilde{f}_1(9-0)+V_4(6)\,\tilde{f}_1(9-6)-4\,\tilde{f}_2(9-0)+4\,\tilde{f}_2(9-6)=0.$$

Врахуємо властивість (1.25) і застосуємо формули (2.1) та (2.2) для отримання чисельних значень функцій $f_i(x)$. Матимемо систему рівнянь із числовими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} -18V_3(0) - 36V_4(0) = -216, \\ V_3(0) + 9V_4(0) + 3V_4(6) = 174, \\ V_4(0) + V_4(6) = 24. \end{cases}$$

Розв'язання системи дає $V_3(0) = -33\text{кН}\cdot\text{м}$, $V_4(0) = 22{,}5\text{кН}$, $V_4(6) = 1{,}5\text{кН}$.

Після того, як усі фактори впливу стали відомими, можна за табл. 2.1 записати конкретні формули всіх функцій стану стержня. Запишемо, наприклад, формулу прогину:

$$U_1(x) = 33\tilde{f}_3(x-0) - 22{,}5\tilde{f}_4(x-0) - 1{,}5\tilde{f}_4(x-6) + 4\tilde{f}_5(x-0) - 4\tilde{f}_5(x-6).$$

Нагадаємо, що функції $\tilde{f}_i(x-a)$, згідно з формулою (1.25), не дорівнюють нулю лише при $a \le x \le l$, отже відповідні доданки враховуватимуться лише при $x \ge a$. Проілюструємо це, знайшовши прогин у точках $x = 5\text{м}$ та $x = 9\text{м}$:

$$U_1(5) = 33\tilde{f}_3(5-0) - 22{,}5\tilde{f}_4(5-0) - 1{,}5\tilde{f}_4(5-6) + 4\tilde{f}_5(5-0) - 4\tilde{f}_5(5-6) =$$

$$= 33f_3(5) - 22{,}5f_4(5) + 4f_5(5) = 47{,}92\text{кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$U_1(9) = 33\tilde{f}_3(9-0) - 22{,}5\tilde{f}_4(9-0) - 1{,}5\tilde{f}_4(9-6) + 4\tilde{f}_5(9-0) - 4\tilde{f}_5(9-6) =$$

$$= 33f_3(9) - 22{,}5f_4(9) - 1{,}5f_4(3) + 4f_5(9) - 4f_5(3) = -324\text{кН}\cdot\text{м}^3.$$

Аналогічно можуть обчислюватися будь-які функції стану стержня у будь-яких його точках.

Зауважимо, що у прикладі отримано значення прогину, помноженого на згинальну жорсткість стержня: $U_1(x) = EI_y u_z(x)$. Для визначення дійсних величин прогину необхідно розділити ці значення на $EI_y$.

## 2.2. Стержень на пружній основі

Згинання стержня на пружній основі описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_z(x)}{\mathrm{d}x^4} + 4\beta^4 u_z(x) = \frac{1}{EI_y}\left[q_z(x) + m'_y(x)\right],$$

де $\beta = \sqrt[4]{\dfrac{k_0 b}{4EI_y}}$ ;

$k_0$ – коефіцієнт пружності основи;

$b$ – ширина стержня.

Це рівняння представляє собою рівняння (1.1), в якому $\alpha_1^2 = 0$, $\alpha_2^4 = 4\beta^4$. За формулою (1.4) запишемо загальний вираз розв’язку характеристичного рівняння (1.3):

$$\kappa_{1,2,3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{0 \pm \sqrt{0 - 4\cdot 4\beta^4}} = \pm\sqrt{2}\,\beta\sqrt{\pm\,\mathrm{i}}\,.$$

Визначення квадратних коренів з уявного числа методом Муавра дозволяє отримати значення чотирьох коренів характеристичного рівняння:

$$\kappa_1 = \beta(1+\mathrm{i}),\quad \kappa_2 = \beta(1-\mathrm{i}),\quad \kappa_3 = -\beta(1+\mathrm{i}),\quad \kappa_4 = -\beta(1-\mathrm{i})\,.$$

Цим значенням відповідають такі розв’язки однорідного рівняння (1.2):

$$\psi_1(x) = \cos(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x),\quad \psi_2(x) = \sin(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x),$$

$$\psi_3(x) = \cos(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x),\quad \psi_4(x) = \sin(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x).$$

Складемо з них функції, які задовольняють умови (1.5):

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \cos(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x);\\
f_2(x) &= \frac{1}{2\beta}[\cos(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x) + \sin(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x)];\\
f_3(x) &= \frac{1}{2\beta^2}\sin(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x);\\
f_4(x) &= \frac{1}{4\beta^3}[\sin(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x) - \cos(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x)].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Між цими функціями існують такі залежності:

$$\frac{\mathrm{d}^4 f_4(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{\mathrm{d}^3 f_3(x)}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}^2 f_2(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d} f_1(x)}{\mathrm{d}x} = -4\beta^4 f_4(x). \tag{2.4}$$

Необхідно знайти ще дві функції, які потрібні для визначення часткових розв'язків від розподілених навантажень. З умов (1.16) та (1.21) знайдемо

$$f_5(x) = \frac{1}{4\beta^4}[1 - f_1(x)] = \frac{1}{4\beta^4}[1 - \cos(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x)],$$

$$f_6(x) = \frac{1}{4\beta^4}[x - f_2(x)] = \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{4\beta^4}\left[x - \frac{1}{2\beta}[\sin(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x) + \cos(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x)]\right].$$

Беручи до уваги залежності (2.4), упевнюємося, що функції (2.5) відповідають умовам (1.16) та (1.21).

Перепишемо табл. 1.3, враховуючи конкретний вигляд функцій (2.3), (2.5) та залежності (2.4).

*Таблиця 2.2*

**Формули зусиль та переміщень стержня на пружній основі**

| Величина, що визначається | Функція, що міститься в доданку, який враховує фактор впливу | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V_1(a_i)$ | $V_2(b_j)$ | $V_3(c_k)$ | $V_4(d_n)$ | $V_5(g_p)$ | $V_6(h_r)$ | $m_y(x)$ |
| $U_1(x)$ | $\tilde{f}_1(\chi_i)$ | $\tilde{f}_2(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_n)$ | $\tilde{f}_5(\chi_p)$ | $\tilde{f}_6(\chi_r)$ | 0 |
| $U_2(x)$ | $\tilde{f}_7(\chi_i)$ | $\tilde{f}_1(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_n)$ | $\tilde{f}_4(\chi_p)$ | $\tilde{f}_5(\chi_r)$ | 0 |
| $U_3(x)$ | $-\tilde{f}_8(\chi_i)$ | $-\tilde{f}_7(\chi_j)$ | $\tilde{f}_1(\chi_k)$ | $\tilde{f}_2(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_r)$ | 0 |
| $U_4(x)$ | $-\tilde{f}_9(\chi_i)$ | $-\tilde{f}_8(\chi_j)$ | $\tilde{f}_7(\chi_k)$ | $\tilde{f}_1(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_r)$ | 1 |

Під час заповнення другого, третього та четвертого рядків таблиці виникли деякі функції, яким були дані нові позначення:

$$f_1'(x) = -4\beta^4 f_4(x) =$$
$$= -\beta[\sin(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x) - \cos(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x)] = f_7(x);$$
$$f_1''(x) = -4\beta^4 f_3(x) =$$
$$= -2\beta^2 \sin(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x) = f_8(x); \qquad (2.6)$$
$$f_1'''(x) = -4\beta^4 f_2(x) =$$
$$= -2\beta^3[\sin(\beta x)\,\mathrm{ch}(\beta x) + \cos(\beta x)\,\mathrm{sh}(\beta x)] = f_9(x).$$

Відповідні позначення $\tilde{f}_7(x)$, $\tilde{f}_8(x)$ та $\tilde{f}_9(x)$ слід розуміти згідно з формулою (1.25).

Зазначимо, що в таблиці в діагональному напрямку розташовуються однакові функції.

Розглянемо приклад розрахунку стержня на пружній основі (рис. 2.1). Приймемо $\beta = 0{,}2\,\text{м}^{-1}$.

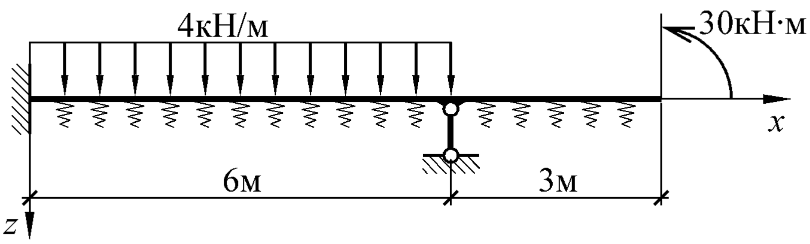



Рис. 2.1

Оскільки, за винятком пружної основи, усі особливості схеми стержня збігаються з такими на рис. 1.15, можна скористатися зробленим у п. 1.4 вибором відомих та невідомих факторів впливу, граничних і додаткових умов.

Запишемо систему рівнянь аналогічного до (1.27) змісту, керуючись табл. 2.2:

$$U_1(6) = 0: \quad -V_3(0)\,\tilde{f}_3(6-0) - V_4(0)\,\tilde{f}_4(6-0) - V_4(6)\,\tilde{f}_4(6-6) +$$
$$+ 4\,\tilde{f}_5(6-0) - 4\,\tilde{f}_5(6-6) = 0;$$

$$U_3(9)=30: \quad V_3(0)\,\tilde{f}_1(9-0)+V_4(0)\,\tilde{f}_2(9-0)+V_4(6)\,\tilde{f}_2(9-6)-$$

$$-4\,\tilde{f}_3(9-0)+4\,\tilde{f}_3(9-6)=30;$$

$$U_4(9)=0: \quad V_3(0)\,\tilde{f}_7(9-0)+V_4(0)\,\tilde{f}_1(9-0)+V_4(6)\,\tilde{f}_1(9-6)-$$

$$-4\,\tilde{f}_2(9-0)+4\,\tilde{f}_2(9-6)=0.$$

Врахувавши властивість (1.25) і обчисливши значення функцій $f_i(x)$ за формулами (2.3), (2.5) і (2.6), отримаємо систему рівнянь із числовими коефіцієнтами:

$$\begin{cases}-17{,}59V_3(0)-35{,}64V_4(0)=-214{,}93,\\ -0{,}706V_3(0)+5{,}891V_4(0)+2{,}982V_4(6)=155{,}29,\\ -0{,}739V_3(0)-0{,}706V_4(0)+0{,}978V_4(6)=11{,}629.\end{cases}$$

Розв’язання системи рівнянь дає $V_3(0)=-29{,}42\,\text{кН}\cdot\text{м}$, $V_4(0)=20{,}54\,\text{кН}$, $V_4(6)=4{,}49\,\text{кН}$.

Маючи відомі значення усіх факторів впливу, можна за табл. 2.2 визначити будь-які функції стану стержня в будь-яких його точках.

Запишемо формулу прогину й обчислимо деякі його значення:

$$U_1(x)=29{,}42\,\tilde{f}_3(x-0)-20{,}54\,\tilde{f}_4(x-0)-4{,}49\,\tilde{f}_4(x-6)+4\,\tilde{f}_5(x-0)-$$

$$-4\,\tilde{f}_5(x-6);$$

$$U_1(5)=29{,}42\,\tilde{f}_3(5-0)-20{,}54\,\tilde{f}_4(5-0)-4{,}49\,\tilde{f}_4(5-6)+4\,\tilde{f}_5(5-0)-$$

$$-4\,\tilde{f}_5(5-6)=29{,}42\,f_3(5)-20{,}54\,f_4(5)+4\,f_5(5)=41{,}61\,\text{кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$U_1(9)=29{,}42\,\tilde{f}_3(9-0)-20{,}54\,\tilde{f}_4(9-0)-4{,}49\,\tilde{f}_4(9-6)+4\,\tilde{f}_5(9-0)-$$

$$-4\,\tilde{f}_5(9-6)=$$

$$=29{,}42\,f_3(9)-20{,}54\,f_4(9)-4{,}49\,f_4(3)+4\,f_5(9)-4\,f_5(3)=-285{,}82\,\text{кН}\cdot\text{м}^3.$$

## 2.3. Стиснуто-зігнутий стержень

При розрахунку стержня за деформованою схемою, коли враховується вплив стиску на згинання, диференціальне рівняння (1.1) набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_z(x)}{\mathrm{d}x^4} + \beta^2 \frac{\mathrm{d}^2 u_z(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{EI_y}\left[q_z(x) + m'_y(x)\right],$$

тобто $\alpha_1^2 = \beta^2$, $\alpha_2^4 = 0$,

де $\beta = \sqrt{\dfrac{|N_x|}{EI_y}}$ ,

$N_x$ – поздовжня сила у стержні, стала по всій його довжині.

Підставивши $\alpha_1^2$ та $\alpha_2^4$ у формулу (1.4), знайдемо корені характеристичного рівняння (1.3):

$$\kappa_{1,2} = 0, \quad \kappa_{3,4} = \pm\beta\mathrm{i}.$$

Цим значенням відповідають такі розв'язки однорідного рівняння (1.2):

$$\psi_1(x) = 1, \quad \psi_2(x) = x, \quad \psi_3(x) = \sin(\beta x), \quad \psi_4(x) = \cos(\beta x).$$

Складемо з їх лінійних комбінацій інші функції, які задовольняють умови (1.5):

$$\begin{gathered} F_1(x) = 1; \quad F_2(x) = x; \quad F_3(x) = \frac{1}{\beta^2}[1 - \cos(\beta x)]; \\ F_4(x) = \frac{1}{\beta^2}\left(x - \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)\right). \end{gathered} \tag{2.7}$$

У формулах (2.7) функції $F_i(x)$ означають те саме, що $f_i(x)$ у формулах (1.5).

При розрахунку стиснуто-зігнутого стержня за деформованою схемою виникає важливе питання, яку саме величину розуміти під поперечною силою: складову головного вектора внутрішніх зусиль, перпендикулярну до деформованої осі стержня (назвемо її *похилою* *поперечною силою* і позначимо $Q_s(x)$), чи складову, перпендикулярну до недеформованої осі (назвемо її *вертикальною поперечною силою* і позначимо $Q_z(x)$).

Похила поперечна сила пов'язана з прогином такою ж залежністю

$$Q_s(x) = -EI_y u_z'''(x) + m_y(x), \tag{2.8}$$

як і поперечна сила при звичайному згинанні. Тому збережемо за нею позначення, застосоване для поперечної сили в раніше розглянутих напружено-деформованих станах стержня: $Q_s(x) = U_4(x)$.

Вертикальна поперечна сила пов'язана з прогином іншою залежністю:

$$Q_z(x) = -EI_y\left[u_z'''(x) + \beta^2 u_z'(x)\right] + m_y(x). \tag{2.9}$$

Дамо їй нове позначення: $Q_z(x) = U_7(x)$.

Запишемо загальний вираз прогину за формулою (1.6):

$$u_z(x) = u_z(0)F_1(x) + u_z'(0)F_2(x) + u_z''(0)F_3(x) + u_z'''(0)F_4(x) + u_z^*(x). \tag{2.10}$$

У цьому виразі $u_z'(0) = \varphi_y(0)$, $u_z''(0) = -\dfrac{M_y(0)}{EI_y}$. А початковий параметр $u_z'''(0)$ може бути виражений як через похилу, так і через вертикальну поперечну силу.

Виходячи з формули (2.8),

$$u_z'''(0) = -\frac{1}{EI_y}\left[Q_s(0) - m_y(0)\right]. \tag{2.11}$$

Виходячи з формули (2.9),

$$u_z'''(0) = -\beta^2 u_z'(0) - \frac{1}{EI_y}\left[Q_z(0) - m_y(0)\right]. \tag{2.12}$$

Підставимо вираз (2.11) у формулу (2.10). Підставимо також значення інших початкових параметрів і функції (2.7). Виконавши деякі перетворення, як це було зроблено під час виведення формули (1.11), отримаємо

$$u_z(x) = u_z(0) + \varphi_y(0)x - \frac{M_y(0)}{EI_y\beta^2}[1-\cos(\beta x)] -$$
$$- \frac{Q_s(0)}{EI_y\beta^2}\left(x - \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)\right) + u_z^{**}(x). \tag{2.13}$$

Якщо ж підставити у формулу (2.10) вираз (2.12) і виконати аналогічні перетворення, матимемо

$$u_z(x) = u_z(0) + \varphi_y(0)\frac{1}{\beta}\sin(\beta x) - \frac{M_y(0)}{EI_y\beta^2}[1-\cos(\beta x)] -$$
$$- \frac{Q_z(0)}{EI_y\beta^2}\left(x - \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)\right) + u_z^{**}(x). \tag{2.14}$$

Обидві формули (2.13) і (2.14) можуть застосовуватися для обчислення прогину. Однак, зауважимо, що зовнішні навантаження у вигляді зосереджених сил задаються, як правило, в системі координат, пов'язаній з недеформованою віссю стержня. Такі навантаження будемо позначати $V_4(a)$, як це робилося й для раніше розглянутих напружено-деформованих станів стержня. Отже, граничні умови за поперечною силою (рис. 2.2) показують значення саме вертикальної поперечної сили $Q_z(x)$, а не похилої $Q_s(x)$.

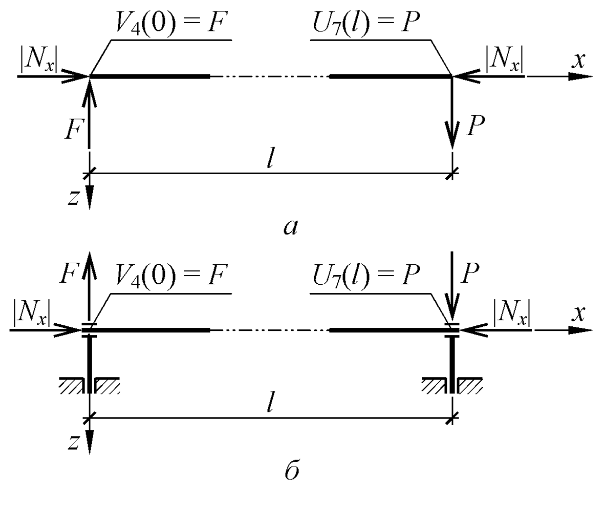



Рис. 2.2

Гранична умова за поперечною силою на лівому кінці стержня одразу виражає рівність відомій величині початкового параметра $Q_z(0)$, який після цього може розглядатися як відомий фактор впливу $V_4(0)$. А для визначення початкового параметра $Q_s(0)$ потрібно було би скласти відповідне рівняння й долучити його до системи рівнянь граничних і додаткових умов.

Тому доцільнішим є використання формули (2.14), яка залежить саме від початкового параметра $Q_z(0)$. Перепишемо її, давши нові позначення застосованим у ній функціям:

$$u_z(x) = u_z(0)\,f_1(x) + \varphi_y(0)\,f_2(x) - \frac{M_y(0)}{EI_y}\,f_3(x) - \frac{Q_z(0)}{EI_y}\,f_4(x) + \\ + u_z^{**}(x), \tag{2.15}$$

де

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \frac{1}{\beta}\sin(\beta x), \quad f_3(x) = \frac{1}{\beta^2}[1 - \cos(\beta x)], \\ f_4(x) = \frac{1}{\beta^2}\left(x - \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)\right). \tag{2.16}$$

Система функцій $f_i(x)$ співпадає з $F_i(x)$ у формулах (2.7) за винятком другої функції.

Для визначення часткових розв’язків від розподілених навантажень потрібні ще дві функції, які задовольняють умови (1.16) та (1.21):

$$f_5(x) = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\beta^2}[1 - \cos(\beta x)]\right]; \\ f_6(x) = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{\beta^2}\left(x - \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)\right)\right]. \tag{2.17}$$

Складемо таблицю, аналогічну табл. 1.3.

*Таблиця 2.3*

**Формули зусиль та переміщень стиснуто-зігнутого стержня**

| Величина, що визначається | Функція, що міститься в доданку, який враховує фактор впливу | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V_1(a_i)$ | $V_2(b_j)$ | $V_3(c_k)$ | $V_4(d_n)$ | $V_5(g_p)$ | $V_6(h_r)$ | $m_y(x)$ |
| $U_1(x)$ | $\tilde{f}_1(\chi_i)$ | $\tilde{f}_2(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_n)$ | $\tilde{f}_5(\chi_p)$ | $\tilde{f}_6(\chi_r)$ | 0 |
| $U_2(x)$ | 0 | $\tilde{f}_7(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_k)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_n)$ | $\tilde{f}_4(\chi_p)$ | $\tilde{f}_5(\chi_r)$ | 0 |
| $U_3(x)$ | 0 | $\tilde{f}_8(\chi_j)$ | $\tilde{f}_7(\chi_k)$ | $\tilde{f}_2(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_r)$ | 0 |
| $U_4(x)$ | 0 | $\tilde{f}_9(\chi_j)$ | $-\tilde{f}_8(\chi_k)$ | $\tilde{f}_7(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_3(\chi_r)$ | 1 |
| $U_7(x)$ | 0 | 0 | 0 | $\tilde{f}_1(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_{10}(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_{11}(\chi_r)$ | 1 |

Під час заповнення другого, третього, четвертого і п’ятого рядків таблиці виникли деякі функції, яким були дані нові позначення:

$$\begin{gathered} f_2'(x)=\cos(\beta x)=f_7(x); \\ -f_2''(x)=\beta\sin(\beta x)=f_8(x); \\ -f_2'''(x)=\beta^2\cos(\beta x)=f_9(x); \\ f_5'''(x)+\beta^2 f_5'(x)=x=f_{10}(x); \\ f_6'''(x)+\beta^2 f_6'(x)=\frac{x^2}{2}=f_{11}(x). \end{gathered} \qquad (2.18)$$

Відповідні позначення $\tilde{f}_7(x)$, $\tilde{f}_8(x)$, $\tilde{f}_9(x)$, $\tilde{f}_{10}(x)$ та $\tilde{f}_{11}(x)$ слід розуміти згідно з формулою (1.25).

Розглянемо приклад розрахунку стиснуто-зігнутого стержня (рис. 2.3). Приймемо $\beta=0{,}2\,\text{м}^{-1}$.

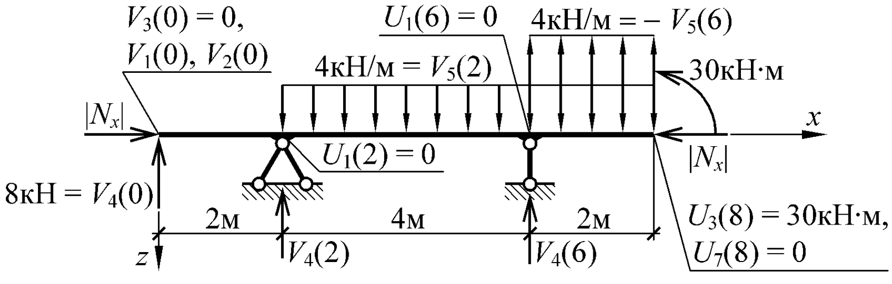



Рис. 2.3

Перелічимо фактори впливу, які мають місце у даній задачі:

$V_1(0)$ – початковий прогин;

$V_2(0)$ – початковий кут нахилу;

$V_3(0)$ – початковий згинальний момент;

$V_4(0)$ – початкова вертикальна поперечна сила;

$V_4(2)$ – зосереджена сила, прикладена при $x = 2$м (реакція опори);

$V_5(2)$ – рівномірно розподілене силове навантаження, прикладене при $x \geq 2$м;

$V_4(6)$ – зосереджена сила, прикладена при $x = 6$м (реакція опори);

$V_5(6)$ – рівномірно розподілене силове навантаження, прикладене при $x \geq 6$м.

Дві з цих величин відомі з умови задачі:

$$V_5(2) = 4\text{кН/м}, \quad V_5(6) = -4\text{кН/м}.$$

Ще дві виявляються відомими з граничних умов на лівому кінці стержня. При вільному краї

$$V_3(0) = 0, \quad V_4(0) = 8\text{кН}.$$

Залишаються невідомими чотири величини: початкові параметри $V_1(0)$ і $V_2(0)$ та реакції в шарнірних опорах $V_4(2)$ і $V_4(6)$. Для їх визначення потребується система чотирьох рівнянь, які можна скласти на підставі граничних умов на правому кінці та додаткових умов у шарнірних опорах.

Правий кінець стержня є вільним краєм, тому

$$U_3(8) = 30\text{кН}\cdot\text{м}, \quad U_7(8) = 0.$$

Додаткові умови в шарнірних опорах мають такий вигляд:

$$U_1(2) = 0, \quad U_1(6) = 0.$$

Склавши вирази лівих частин рівнянь згідно з табл. 2.3, отримаємо таку систему рівнянь:

$$U_1(2)=0: \quad V_1(0)\tilde{f}_1(2-0)+V_2(0)\tilde{f}_2(2-0)-8\tilde{f}_4(2-0)-$$

$$-V_4(2)\tilde{f}_4(2-2)+4\tilde{f}_5(2-2)-V_4(6)\tilde{f}_4(2-6)-4\tilde{f}_5(2-6)=0;$$

$$U_1(6)=0: \quad V_1(0)\tilde{f}_1(6-0)+V_2(0)\tilde{f}_2(6-0)-8\tilde{f}_4(6-0)-V_4(2)\tilde{f}_4(6-2)+$$

$$+4\tilde{f}_5(6-2)-V_4(6)\tilde{f}_4(6-6)-4\tilde{f}_5(6-6)=0;$$

$$U_3(8)=30: \quad V_2(0)\tilde{f}_8(8-0)+8\tilde{f}_2(8-0)+V_4(2)\tilde{f}_2(8-2)-4\tilde{f}_3(8-2)+$$

$$+V_4(6)\tilde{f}_2(8-6)+4\tilde{f}_3(8-6)=30;$$

$$U_7(8)=0: \quad 8\tilde{f}_1(8-0)+V_4(2)\tilde{f}_1(8-2)+V_4(6)\tilde{f}_1(8-6)-4\tilde{f}_{10}(8-2)+$$

$$+4\tilde{f}_{10}(8-6)=0.$$

Врахуємо властивість (1.25) функцій $\tilde{f}_i(x)$. Обчислимо за формулами (2.16), (2.17) і (2.18) значення функцій $f_i(x)$. Отримаємо систему рівнянь із числовими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} V_1(0)+1{,}95V_2(0)=10{,}58, \\ V_1(0)+4{,}66V_2(0)-10{,}33V_4(2)=226{,}19, \\ 0{,}20V_2(0)+4{,}66V_4(2)+1{,}95V_4(6)=45{,}89, \\ V_4(2)+V_4(6)=8. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, отримаємо $V_1(0)=-174{,}93\,\text{кН}\cdot\text{м}^3$, $V_2(0)=95{,}28\,\text{кН}\cdot\text{м}^2$, $V_4(2)=4{,}15\,\text{кН}$, $V_4(6)=3{,}85\,\text{кН}$.

Маючи відомі значення усіх факторів впливу, можна за табл. 2.3 визначити будь-які функції стану стержня в будь-яких його точках.

Запишемо формулу прогину:

$$U_1(x)=-174{,}93\tilde{f}_1(x-0)+95{,}28\tilde{f}_2(x-0)-8\tilde{f}_4(x-0)-4{,}15\tilde{f}_4(x-2)+$$

$$+4\tilde{f}_5(x-2)-3{,}85\tilde{f}_4(x-6)-4\tilde{f}_5(x-6).$$

Його значення в точці $x=4\,\text{м}$

$$U_1(4) = -174{,}93\tilde{f}_1(4-0) + 95{,}28\tilde{f}_2(4-0) - 8\tilde{f}_4(4-0) - 4{,}15\tilde{f}_4(4-2) +$$

$$+ 4\tilde{f}_5(4-2) - 3{,}85\tilde{f}_4(4-6) - 4\tilde{f}_5(4-6) =$$

$$= -174{,}93 f_1(4) + 95{,}28 f_2(4) - 8 f_4(4) - 4{,}15 f_4(2) + 4 f_5(2) = 81{,}33\text{кН}\cdot\text{м}^3.$$

Запишемо формулу згинального моменту:

$$U_3(x) = 95{,}28\tilde{f}_8(x-0) + 8\tilde{f}_2(x-0) + 4{,}15\tilde{f}_2(x-2) - 4\tilde{f}_3(x-2) +$$

$$+ 3{,}85\tilde{f}_2(x-6) + 4\tilde{f}_3(x-6).$$

Його значення в точці $x = 7\,\text{м}$

$$U_3(7) = 95{,}28\tilde{f}_8(7-0) + 8\tilde{f}_2(7-0) + 4{,}15\tilde{f}_2(7-2) - 4\tilde{f}_3(7-2) +$$

$$+ 3{,}85\tilde{f}_2(7-6) + 4\tilde{f}_3(7-6) = 95{,}28 f_8(7) +$$

$$+ 8 f_2(7) + 4{,}15 f_2(5) - 4 f_3(5) + 3{,}85 f_2(1) + 4 f_3(1) = 35{,}51\text{кН}\cdot\text{м}.$$

## 2.4. Кручення тонкостінного стержня

Кручення тонкостінного стержня описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{\mathrm{d}^4 \varphi_x(x)}{\mathrm{d}x^4} - \beta^2 \frac{\mathrm{d}^2 \varphi_x(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{EI_\omega} m_x(x), \qquad (2.19)$$

де $\varphi_x(x)$ – невідома функція, кут повороту поперечного перерізу відносно осі $x$ (кут кручення);

$m_x(x)$ – розподілене крутне моментне навантаження;

$EI_\omega$ – секторна жорсткість стержня;

$\beta = \sqrt{\dfrac{GI_{\text{кр}}}{EI_\omega}}$;

$GI_{\text{кр}}$ – крутильна жорсткість стержня.

Існує аналогія між залежностями, що описують кручення тонкостінного стержня, і розглянутими у розд. 1 залежностями, що описують згинання. Рівняння (2.19) може бути представлене як рівняння (1.1), в якому прогин $u_z(x)$ замінений на кут кручення $\varphi_x(x)$, розподілене поперечне силове навантаження $q_z(x)$ замінене аналогічною величиною розподіленого крутного моментного навантаження $m_x(x)$, розподілене згинальне моментне навантаження $m_y(x)$, яке не має свого відповідника у процесі кручення, замінене нульовою величиною, згинальна жорсткість $EI_y$ замінена секторною жорсткістю $EI_\omega$, а сталі коефіцієнти прийняті рівними $\alpha_1^2 = -\beta^2$, $\alpha_2^4 = 0$.

Ця аналогія дозволяє методику розрахунку стержня на згинання поширити на розрахунок тонкостінного стержня на кручення.

Напружено-деформований стан тонкостінного стержня характеризується такими переміщеннями та внутрішніми зусиллями (функціями стану стержня):

$\varphi_x(x)$ – кут кручення;

$\varphi_x'(x)$ – міра депланації поперечного перерізу (дорівнює похідній від кута кручення);

$B(x)$ – бімомент;

$M_\omega(x)$ – згинально-крутний момент;

$M_{\text{кр}}(x)$ – момент чистого кручення;

$M_x(x) = M_\omega(x) + M_{\text{кр}}(x)$ – повний крутний момент.

Функції стану перебувають у деяких співвідношеннях між собою:

$$\begin{aligned} B(x) &= -EI_\omega \varphi_x''(x); \\ M_\omega(x) &= -EI_\omega \varphi_x'''(x); \\ M_{\text{кр}}(x) &= GI_{\text{кр}} \varphi_x'(x) = \beta^2 EI_\omega \varphi_x'(x); \\ M_x(x) &= -EI_\omega \left[\varphi_x'''(x) - \beta^2 \varphi_x'(x)\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Для функцій стану будемо застосовувати такі позначення:

$$EI_\omega \varphi_x(x) = U_1(x);$$

$$EI_\omega \varphi'_x(x) = U_2(x);$$

$$B(x) = U_3(x);$$

$$M_\omega(x) = U_4(x);$$

$$M_x(x) = U_7(x).$$

Для факторів впливу також застосуємо систему позначень, аналогічну до застосованої раніше, під час розгляду згинання стержня. Деякі можливі різновиди факторів впливу на тонкостінний стержень показано на рис. 2.4. Розглядатимемо, як найбільш поширені, зосереджене бімоментне навантаження (рис. 2.4, *а*), зосереджене моментне навантаження (рис. 2.4, *б*), рівномірно розподілене моментне навантаження (рис. 2.4, *в*) і лінійно-змінюване розподілене моментне навантаження (рис. 2.4, *г*).

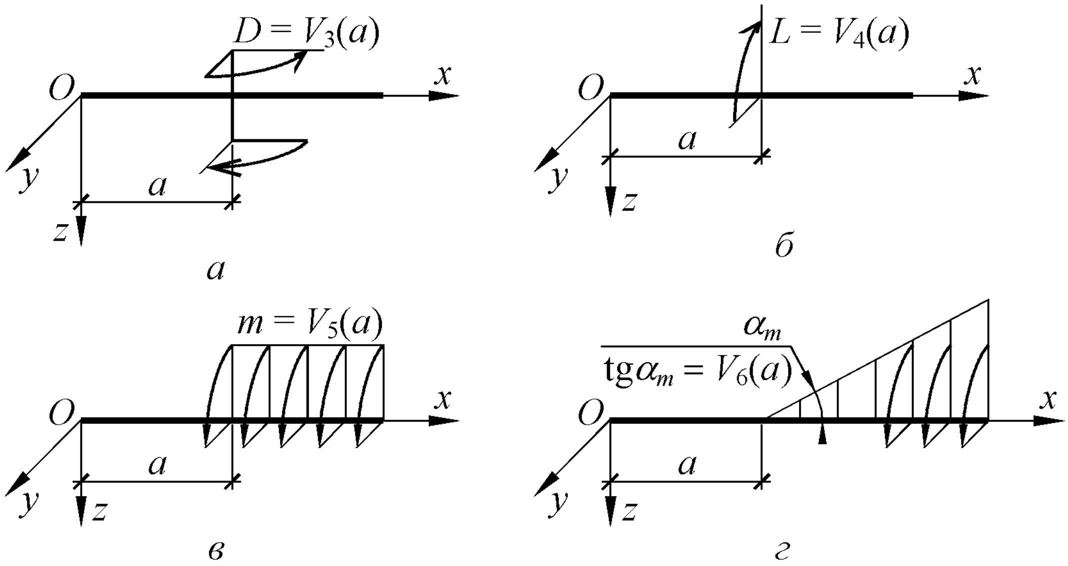



Рис. 2.4

Розв'яжемо рівняння (2.19), покладаючись на вищезгадану його аналогію з рівнянням (1.1). Врахувавши значення $\alpha_1^2$, $\alpha_2^4$ у формулі (1.4), знайдемо корені характеристичного рівняння (1.3):

$$\kappa_{1,2} = 0, \quad \kappa_{3,4} = \pm\beta.$$

Цим значенням відповідають такі розв’язки однорідного диференціального рівняння (1.2):

$$\psi_1(x) = 1, \quad \psi_2(x) = x, \quad \psi_3(x) = \mathrm{ch}(\beta x), \quad \psi_4(x) = \mathrm{sh}(\beta x).$$

З цих функцій складемо інші, які задовольняють умови (1.5):

$$F_1(x) = 1; \quad F_2(x) = x; \quad F_3(x) = -\frac{1}{\beta^2}[1 - \mathrm{ch}(\beta x)];$$
$$F_4(x) = -\frac{1}{\beta^2}\left( x - \frac{1}{\beta}\mathrm{sh}(\beta x) \right). \qquad (2.21)$$

У формулах (2.21) функції $F_i(x)$ означають те саме, що $f_i(x)$ у формулах (1.5).

Запишемо загальний вираз кута кручення за формулою (1.6):

$$\varphi_x(x) = \varphi_x(0)F_1(x) + \varphi'_x(0)F_2(x) + \varphi''_x(0)F_3(x) + \varphi'''_x(0)F_4(x) + \varphi^*_x(x), \qquad (2.22)$$

де

$$\varphi^*_x(x) = \frac{1}{EI_\omega}\int_0^x F_4(x-t)m_x(t)\,\mathrm{d}t \ -$$

частковий розв’язок рівняння (2.19). Його вираз є аналогічним до формули (1.8).

Початкові параметри у формулі (2.22), виходячи з залежностей (2.20), дорівнюють

$$\varphi''_x(0) = -\frac{B(0)}{EI_\omega}, \quad \varphi'''_x(0) = -\frac{M_\omega(0)}{EI_\omega}.$$

Підставимо їх та функції (2.21) у формулу (2.22):

$$\varphi_x(x) = \varphi_x(0) + \varphi'_x(0)x +$$
$$+\frac{B(0)}{EI_\omega\beta^2}[1 - \mathrm{ch}(\beta x)] + \frac{M_\omega(0)}{EI_\omega\beta^2}\left( x - \frac{1}{\beta}\mathrm{sh}(\beta x) \right) + \varphi^*_x(x). \qquad (2.23)$$

Початковий параметр $\varphi'''_x(0)$ також може бути виражений іншим чином. За останньою з формул (2.20) виразимо його через повний крутний момент:

$$\varphi_x'''(0) = -\frac{M_x(0)}{EI_\omega} + \beta^2 \varphi_x'(0).$$

Підставимо цей вираз у формулу (2.22):

$$\varphi_x(x) = \varphi_x(0) + \varphi_x'(0)\frac{1}{\beta}\mathrm{sh}(\beta x) + \\ + \frac{B(0)}{EI_\omega \beta^2}[1 - \mathrm{ch}(\beta x)] + \frac{M_x(0)}{EI_\omega \beta^2}\left(x - \frac{1}{\beta}\mathrm{sh}(\beta x)\right) + \varphi_x^*(x). \tag{2.24}$$

Обидві формули (2.23) й (2.24) можуть застосовуватися для обчислення кута кручення. Однак застосування другої є доцільнішим з огляду на використання граничних умов за крутним моментом (рис. 2.5, *а*), оскільки зосереджене моментне навантаження $V_4(0)$, прикладене у початковій точці стержня, дорівнює саме повному крутному моменту $M_x(0)$, а не його складовим $M_\omega(0)$ чи $M_{\text{кр}}(0)$.

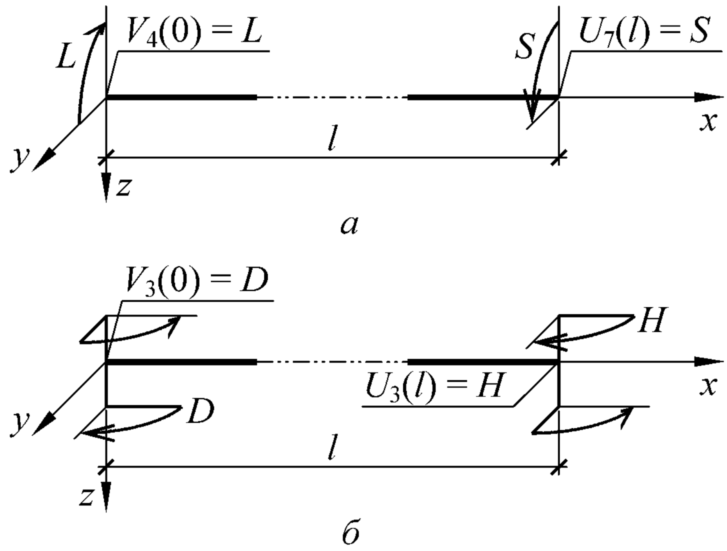



Рис. 2.5

Перепишемо формулу (2.24), давши нові позначення функціям, які в ній зустрічаються:

$$\varphi_x(x) = \varphi_x(0) f_1(x) + \varphi_x'(0) f_2(x) + \\ + \frac{B(0)}{EI_\omega} f_3(x) + \frac{M_x(0)}{EI_\omega} f_4(x) + \varphi_x^*(x), \tag{2.25}$$

де

$$f_1(x)=1, \quad f_2(x)=\frac{1}{\beta}\mathrm{sh}(\beta x), \quad f_3(x)=\frac{1}{\beta^2}[1-\mathrm{ch}(\beta x)],$$

$$f_4(x)=\frac{1}{\beta^2}\left(x-\frac{1}{\beta}\mathrm{sh}(\beta x)\right). \tag{2.26}$$

Знайдемо ще дві функції, що потрібні для визначення часткових розв’язків від розподілених навантажень. Вони мають задовольняти умови (1.16) та (1.21):

$$f_6''(x)=f_5'(x)=F_4(x), \quad f_6(0)=f_5(0)=0\,.$$

Таким умовам відповідають функції

$$f_5(x)=-\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\beta^2}[1-\mathrm{ch}(\beta x)]\right],$$

$$f_6(x)=-\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{x^3}{6}+\frac{1}{\beta^2}\left(x-\frac{1}{\beta}\mathrm{sh}(\beta x)\right)\right]. \tag{2.27}$$

Складемо таблицю, аналогічну табл. 1.3.

*Таблиця 2.4*

**Формули зусиль та переміщень тонкостінного стержня**

| Величина, що визначається | Функція, що міститься в доданку, який враховує фактор впливу | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V_1(0)$ | $V_2(0)$ | $V_3(c_k)$ | $V_4(d_n)$ | $V_5(g_p)$ | $V_6(h_r)$ |
| $U_1(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $\tilde{f}_3(\chi_k)$ | $\tilde{f}_4(\chi_n)$ | $\tilde{f}_5(\chi_p)$ | $\tilde{f}_6(\chi_r)$ |
| $U_2(x)$ | 0 | $f_7(x)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_k)$ | $\tilde{f}_3(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_4(\chi_p)$ | $\tilde{f}_5(\chi_r)$ |
| $U_3(x)$ | 0 | $-f_8(x)$ | $\tilde{f}_7(\chi_k)$ | $\tilde{f}_2(\chi_n)$ | $\tilde{f}_3(\chi_p)$ | $\tilde{f}_4(\chi_r)$ |
| $U_4(x)$ | 0 | $-f_9(x)$ | $\tilde{f}_8(\chi_k)$ | $\tilde{f}_7(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_2(\chi_p)$ | $\tilde{f}_3(\chi_r)$ |
| $U_7(x)$ | 0 | 0 | 0 | $\tilde{f}_1(\chi_n)$ | $-\tilde{f}_{10}(\chi_p)$ | $-\tilde{f}_{11}(\chi_r)$ |

У таблиці $V_1(0) = EI_\omega \varphi_x(0)$ – кут кручення в початковій точці стержня, помножений на секторну жорсткість;

$V_2(0) = EI_\omega \varphi'_x(0)$ – міра депланації початкового перерізу, помножена на секторну жорсткість.

Під час заповнення другого, третього, четвертого і п’ятого рядків таблиці виникли деякі функції, яким були дані нові позначення:

$$
\begin{aligned}
f'_2(x) &= \mathrm{ch}(\beta x) = f_7(x); \\
f''_2(x) &= \beta\,\mathrm{sh}(\beta x) = f_8(x); \\
f'''_2(x) &= \beta^2\,\mathrm{ch}(\beta x) = f_9(x); \qquad (2.28) \\
f'''_5(x) - \beta^2 f'_5(x) &= x = f_{10}(x); \\
f'''_6(x) - \beta^2 f'_6(x) &= \frac{x^2}{2} = f_{11}(x).
\end{aligned}
$$

Відповідні позначення $\tilde{f}_7(x)$, $\tilde{f}_8(x)$, $\tilde{f}_{10}(x)$ та $\tilde{f}_{11}(x)$ слід розуміти згідно з формулою (1.25).

Розглянемо приклад розрахунку тонкостінного стержня (рис. 2.6). Приймемо $\beta = 0{,}2\,\text{м}^{-1}$. Шарнірні опори, на які спирається стержень, перешкоджають повороту відносно осі $x$. При цьому вони створюють реакції у вигляді зосереджених моментів відносно осі $x$.

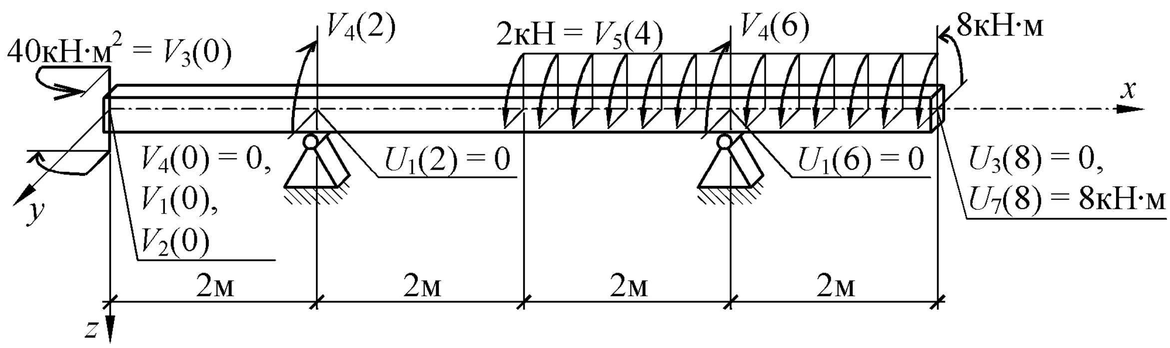



Рис. 2.6

Перелічимо фактори впливу, які мають місце у даній задачі:

$V_1(0)$ – початковий кут кручення;

$V_2(0)$ – початкова міра депланації;

$V_3(0)$ – початковий бімомент;

$V_4(0)$ – початковий повний крутний момент;

$V_4(2)$ – зосереджений момент, прикладений при $x = 2$м (реакція опори);

$V_5(4)$ – рівномірно розподілене моментне навантаження, прикладене при $x \geq 4$м;

$V_4(6)$ – зосереджений момент, прикладений при $x = 6$м (реакція опори).

Одна з цих величин відома з умови задачі:

$$V_5(4) = 2\,\text{кН}.$$

Ще дві виявляються відомими з граничних умов на лівому кінці стержня. Оскільки кінець не закріплений, внутрішні зусилля дорівнюють нулю або відомим зовнішнім навантаженням:

$$V_3(0) = 40\,\text{кН}\cdot\text{м}^2, \quad V_4(0) = 0.$$

Залишаються невідомими чотири величини: початкові параметри $V_1(0)$ і $V_2(0)$ та реакції в шарнірних опорах $V_4(2)$ і $V_4(6)$. Для їх визначення потрібна система чотирьох рівнянь, які можна скласти на підставі граничних умов на правому кінці та додаткових умов у шарнірних опорах.

Оскільки правий кінець стержня не закріплений, граничні умови виражатимуть рівність внутрішніх зусиль нулю або відомим зовнішнім навантаженням:

$$U_3(8) = 0, \quad U_7(8) = 8\,\text{кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки шарнірні опори перешкоджають повороту відносно осі $x$, додаткові умови виражатимуть рівність нулю кута кручення в точках опор:

$$U_1(2) = 0, \quad U_1(6) = 0.$$

Склавши вирази лівих частин рівнянь згідно з табл. 2.4, отримаємо таку систему рівнянь:

$$U_1(2)=0: \quad V_1(0)\,f_1(2)+V_2(0)\,f_2(2)+40\,\tilde{f}_3(2-0)+V_4(2)\,\tilde{f}_4(2-2)+$$

$$+\,2\,\tilde{f}_5(2-4)+V_4(6)\,\tilde{f}_4(2-6)=0;$$

$$U_1(6)=0: \quad V_1(0)\,f_1(6)+V_2(0)\,f_2(6)+40\,\tilde{f}_3(6-0)+V_4(2)\,\tilde{f}_4(6-2)+$$

$$+\,2\,\tilde{f}_5(6-4)+V_4(6)\,\tilde{f}_4(6-6)=0;$$

$$U_3(8)=0: \quad -V_2(0)\,f_8(8)+40\,\tilde{f}_7(8-0)+V_4(2)\,\tilde{f}_2(8-2)+$$

$$+\,2\,\tilde{f}_3(8-4)+V_4(6)\,\tilde{f}_2(8-6)=0;$$

$$U_7(8)=8: \quad V_4(2)\,\tilde{f}_1(8-2)-2\,\tilde{f}_{10}(8-4)+V_4(6)\,\tilde{f}_1(8-6)=8\,.$$

Врахуємо властивість (1.25) функцій $\tilde{f}_i(x)$. Обчислимо за формулами (2.26), (2.27) і (2.28) значення функцій $f_i(x)$. Отримаємо систему рівнянь із числовими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} V_1(0)+2{,}054V_2(0)=81{,}07, \\ V_1(0)+7{,}547V_2(0)-11{,}013V_4(2)=809{,}36, \\ -0{,}475V_2(0)+7{,}547V_4(2)+2{,}054V_4(6)=-86{,}23, \\ V_4(2)+V_4(6)=16. \end{cases}$$

Розв’язання системи рівнянь дає $V_1(0)=-140{,}21\text{кН}\cdot\text{м}^4$, $V_2(0)=107{,}8\text{кН}\cdot\text{м}^3$, $V_4(2)=-12{,}355\text{кН}\cdot\text{м}$, $V_4(6)=28{,}355\text{кН}\cdot\text{м}$.

Маючи відомі значення усіх факторів впливу, можна за табл. 2.4 визначити будь-які функції стану стержня в будь-яких його точках.

Запишемо формулу кута кручення:

$$U_1(x)=-140{,}21\,f_1(x)+107{,}8\,f_2(x)+40\,\tilde{f}_3(x-0)-12{,}355\,\tilde{f}_4(x-2)+$$

$$+\,2\,\tilde{f}_5(x-4)+28{,}355\,\tilde{f}_4(x-6).$$

Його значення в точці $x=4\text{м}$

$$U_1(4) = -140{,}21 f_1(4) + 107{,}8 f_2(4) + 40 \tilde{f}_3(4-0) - 12{,}355 \tilde{f}_4(4-2) +$$

$$+ 2 \tilde{f}_5(4-4) + 28{,}355 \tilde{f}_4(4-6) =$$

$$= -140{,}21 f_1(4) + 107{,}8 f_2(4) + 40 f_3(4) - 12{,}355 f_4(2) = 17{,}524 \text{кН} \cdot \text{м}^4 .$$

Запишемо формулу бімоменту:

$$U_3(x) = -107{,}8 f_8(x) + 40 \tilde{f}_7(x-0) - 12{,}355 \tilde{f}_2(x-2) + 2 \tilde{f}_3(x-4) +$$

$$+ 28{,}355 \tilde{f}_2(x-6).$$

Його значення в точці $x = 4\text{м}$

$$U_3(4) = -107{,}8 f_8(4) + 40 \tilde{f}_7(4-0) - 12{,}355 \tilde{f}_2(4-2) + 2 \tilde{f}_3(4-4) +$$

$$+ 28{,}355 \tilde{f}_2(4-6) =$$

$$= -107{,}8 f_8(4) + 40 f_7(4) - 12{,}355 f_2(2) = 8{,}977 \text{кН} \cdot \text{м}^2 .$$

# Розділ 3. Застосування комп'ютерної програми з розрахунку методом початкових параметрів

## 3.1. Загальні вказівки

Розроблено комплекс комп'ютерних програм, які здійснюють розрахунок стержня методом початкових параметрів у кожному з напружено-деформованих станів, що згадувалися у розд. 2. Програми рекомендуються для використання студентами під час виконання розрахунково-графічних робіт відповідного змісту. У програмах реалізовано формули, наведені у розд. 2. Детальніше на структурі програм зупинятися не будемо.

Інтерфейс усіх програм дуже подібний і передбачає введення даних у вигляді файлів, збережених на диску комп'ютера, що містить програму. Створення файлів вихідних даних може виконуватися, наприклад, за допомогою програми "Блокнот" ("Notepad").

Слід звернути увагу на те, що інтерпретація розрахункової схеми стержня, який розглядається в задачі, покладається не на програму, а на користувача. Тобто користувач під час підготовки вихідних даних повинен вирішити питання, які фактори впливу на стержень мають місце в задачі, в яких точках стержня вони діють, які з них є відомими та невідомими, які початкові параметри є одразу відомими, а які підлягають визначенню з системи рівнянь, які на стержень накладаються граничні та додаткові умови. Під час інтерпретації схеми доцільно виконати рисунок на зразок тих, що наведені у прикладах даного розділу.

У програмі реалізовано такі ж правила знаків факторів впливу й функцій стану, які застосовувалися в тексті даного навчального посібника. Ці правила знаків відображено на рис. 1.2, 1.7, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 2.4, 2.5.

Відомі фактори впливу слід записати у файл "TABL1.TXT". До їх числа входять два початкових параметри, які виявляються одразу відомими з граничних умов. Для деяких різновидів розрахунку в цьому файлі також потрібно вказати параметр $\beta$ (див. п. 2.2, 2.3, 2.4).

Решту граничних умов та додаткові умови слід записати у файл "TABL2.TXT".

Невідомі фактори впливу слід перелічити у файлі "TABL3.TXT".

У файлі "TABL4.TXT" користувач має перелічити точки осі стержня, в яких він бажає отримати значення переміщень та внутрішніх зусиль (функцій стану стержня). Якщо в яких-небудь точках передбачаються стрибки в епюрах яких-небудь функцій стану (як стрибок в епюрі поперечної сили в точці прикладення зовнішньої зосередженої сили), слід координати таких точок записати двічі підряд. Для програми це слугуватиме вказівкою, що в цій точці потрібно обчислити значення функцій стану двічі – до стрибка й після стрибка. У цьому файлі також слід вказати значення інтенсивності розподіленого навантаження $m_y(x)$ в усіх перелічених точках (під час розрахунку тонкостінного стержня цього робити не потрібно).

Записавши вихідні дані, слід запустити файл "PROGRAM1.EXE" для розрахунку плоского згинання, або "PROGRAM2.EXE" – для стержня на пружній основі, "PROGRAM3.EXE" – для стиснуто-зігнутого стержня, "PROGRAM4.EXE" – для тонкостінного стержня. Після спрацювання програми утворюється файл "RESULT.TXT", який містить результати розрахунку. Переглянути або роздрукувати його вміст можна за допомогою програми "Блокнот".

## 3.2. Приклад комп’ютерного розрахунку стержня на плоске згинання

Розглянемо приклад з п. 1.4 розрахунку стержня на плоске згинання. Схему стержня, інтерпретовану в термінах методу початкових параметрів, показано на рис. 3.1.

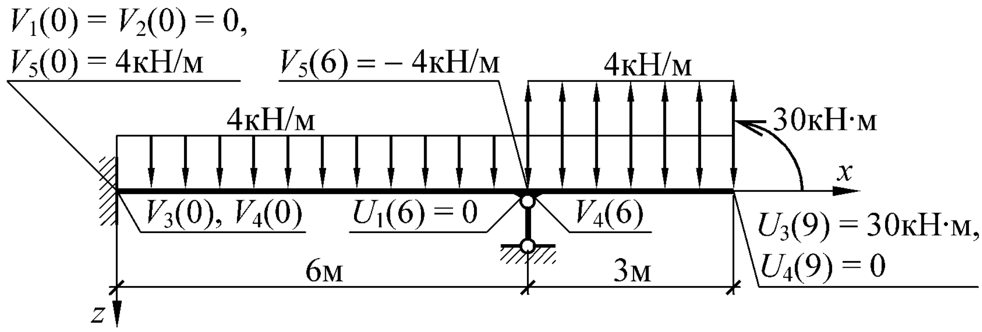



Рис. 3.1

Відомі фактори впливу $V_1(0)$, $V_2(0)$, $V_5(0)$ і $V_5(6)$ записуємо у файл "TABL1.TXT". Вміст файла повинен мати вигляд, показаний у табл. 3.1.

*Таблиця 3.1*

**Вміст файла "TABL1.TXT"**

```
4
1        0.00        0.00
2        0.00        0.00
5        0.00        4.00
5        6.00       -4.00
```

У першому рядку вказана кількість наступних рядків. У кожному з наступних чотирьох рядків міститься запис про один з факторів впливу $V_i(a_j)$. Запис складається з індексу $i$, координати $a_j$ і власне величини фактора впливу $V_i(a_j)$.

Для правильного розпізнавання вихідних даних програмою важливо дотримуватися такого формату запису:

– для запису числа $i$ відведено 1 символ;

– для запису $a_j$ – 12 символів (крім цифр, у разі потреби, можуть застосовуватися знак "мінус", десяткова крапка та символ експоненти);

– для запису $V_i(a_j)$ – також 12 символів;

– невикористані позиції для символів (якщо число коротше, ніж 12 символів) заповнюються пробілами;

– розділових знаків між числами не передбачено.

Система граничних і додаткових умов має складатися на тій підставі, що відомими є $U_1(6)$, $U_3(9)$ і $U_4(9)$. Ці величини записуємо у файл "TABL2.TXT" (табл. 3.2).

У першому рядку вказуємо кількість наступних рядків. У кожному з наступних трьох рядків, стосовно величини $U_i(a_j)$, записуємо $i$, $a_j$, $U_i(a_j)$. При цьому дотримуємося того ж формату, що й у файлі "TABL1.TXT".

*Таблиця 3.2*

**Вміст файла "TABL2.TXT"**

```
3
1        6.00        0.00
3        9.00       30.00
4        9.00        0.00
```

Невідомими залишаються фактори впливу $V_3(0)$, $V_4(0)$ і $V_4(6)$. Відомості про це записуємо у файл "TABL3.TXT" (табл. 3.3). У кожному рядку, який стосується величини $V_i(a_j)$, записуємо $i$ та $a_j$. Для їх запису відведено 1 та 12 символів відповідно.

Нагадаємо, що кількість невідомих повинна збігатися з кількістю рівнянь. Тому кількість рядків у файлі "TABL3.TXT" не вказується: вона має збігатися з тією, що була вказана у файлі "TABL2.TXT".

*Таблиця 3.3*

**Вміст файла "TABL3.TXT"**

```
3         0.00
4         0.00
4         6.00
```

Бажаючи отримати в результаті розрахунку значення переміщень та зусиль у точках з кроком 1м, перелічуємо координати відповідних точок у файлі "TABL4.TXT" (табл. 3.4). В епюрі $Q_z(x)$ матиме місце стрибок при $x = 6\text{м}$. Дублюємо запис, який стосується цієї точки. Також дублюємо запис щодо початкової точки. Записи розташовуємо в порядку зростання координати.

*Таблиця 3.4*

**Вміст файла "TABL4.TXT"**

```
12
          0.00        0.00
          0.00        0.00
          1.00        0.00
          2.00        0.00
          3.00        0.00
          4.00        0.00
          5.00        0.00
          6.00        0.00
          6.00        0.00
          7.00        0.00
          8.00        0.00
          9.00        0.00
```

У першому рядку вказана кількість наступних рядків. У кожному з дванадцяти наступних рядків записані координата $x$ чергової точки та інтенсивність навантаження $m_y(x)$ у цій точці. Для їх запису відведено по 12 символів.

Запускаємо файл "PROGRAM1.EXE". Утворюється файл "RESULT.TXT" з результатами розрахунку. Його вміст наведений у табл. 3.5.

*Таблиця 3.5*

**Вміст файла "RESULT.TXT"**

```
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00 -3.30000E+01  2.25000E+01
1.00000E+00  1.29167E+01  2.24167E+01 -1.25000E+01  1.85000E+01
2.00000E+00  3.86667E+01  2.63333E+01  4.00000E+00  1.45000E+01
3.00000E+00  6.07500E+01  1.57500E+01  1.65000E+01  1.05000E+01
4.00000E+00  6.66667E+01 -5.33333E+00  2.50000E+01  6.50000E+00
5.00000E+00  4.79167E+01 -3.29167E+01  2.95000E+01  2.50000E+00
6.00000E+00  0.00000E+00 -6.30000E+01  3.00000E+01 -1.50000E+00
6.00000E+00  0.00000E+00 -6.30000E+01  3.00000E+01  0.00000E+00
7.00000E+00 -7.80000E+01 -9.30000E+01  3.00000E+01  0.00000E+00
8.00000E+00 -1.86000E+02 -1.23000E+02  3.00000E+01  0.00000E+00
9.00000E+00 -3.24000E+02 -1.53000E+02  3.00000E+01  0.00000E+00
```

Кожен рядок містить координату точки $x$ і відповідні величини $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$, $U_4(x)$. Оскільки вихідні дані, введені у програму, виражалися в метрах і кілоньютонах, отримані результати також слід розуміти як виражені в метрах, кілоньютонах та відповідних комбінаціях цих одиниць.

## 3.3. Приклад комп’ютерного розрахунку стержня на пружній основі

Розглянемо приклад розрахунку стержня на пружній основі. Схему стержня, інтерпретовану в термінах методу початкових параметрів, показано на рис. 3.2. Задача характеризується параметром $\beta = 0{,}2\,\text{м}^{-1}$.

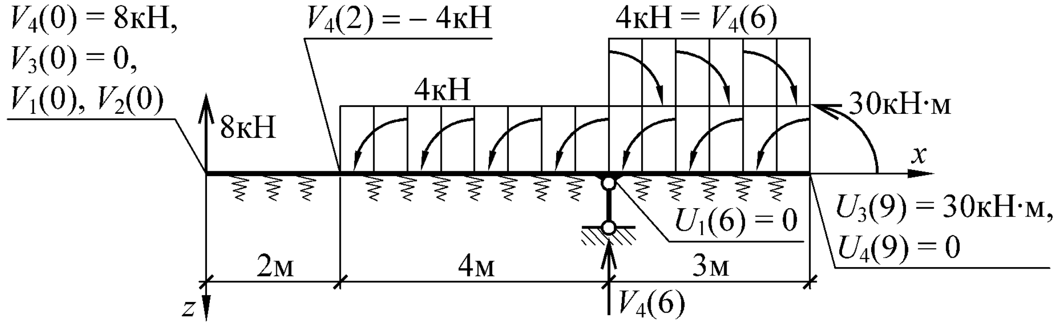



Рис. 3.2

Величину $\beta$ і відомі фактори впливу $V_3(0)$, $V_4(0)$, $V_4(2)$ і $V_4(6)$ записуємо у файл "TABL1.TXT". Вміст файла повинен мати вигляд, показаний у табл. 3.6.

*Таблиця 3.6*

**Вміст файла "TABL1.TXT"**

```
0.2
4
3        0.00        0.00
4        0.00        8.00
4        2.00       -4.00
4        6.00        4.00
```

У першому рядку в довільному форматі вказане значення $\beta$. У другому – кількість наступних рядків, що описують відомі фактори впливу. Кожен з наступних чотирьох рядків містить запис про один з відомих факторів впливу в такому ж форматі, який був означений у попередньому пункті.

Зауважимо, що, оскільки всі вихідні дані виражені в метрах і кілоньютонах, то і значення $\beta$ необхідно було ввести у відповідних одиницях, тобто в $м^{-1}$.

Система граничних і додаткових умов складатиметься на тій підставі, що відомими є величини $U_1(6)$, $U_3(9)$ і $U_4(9)$. Записуємо їх у файл "TABL2.TXT" (табл. 3.7). При цьому дотримуємося того ж формату, що й у попередньому пункті.

*Таблиця 3.7*

**Вміст файла "TABL2.TXT"**

```
3
1        6.00        0.00
3        9.00       30.00
4        9.00        0.00
```

Невідомими залишаються фактори впливу $V_1(0)$, $V_2(0)$ і $V_4(6)$. Відомості про це записуємо у файл "TABL3.TXT" (табл. 3.8), дотримуючись того ж формату, що й у попередньому пункті.

*Таблиця 3.8*

**Вміст файла "TABL3.TXT"**

```
1        0.00
2        0.00
4        6.00
```

Точки, в яких ми бажаємо отримати значення зусиль та переміщень, перелічуємо у файлі "TABL4.TXT" (табл. 3.9). Вказуємо також значення навантаження $m_y(x)$ у відповідних точках. При цьому дотримуємося того ж формату, що й у попередньому пункті.

В епюрі $Q_z(x)$ матиме місце стрибок при $x = 6$м. Дублюємо запис щодо цієї точки. Також дублюємо запис щодо початкової точки. При $x = 2$м стрибків в епюрах функцій стану не буде, але там відбувається стрибок в епюрі $m_y(x)$. Дублюємо запис щодо цієї точки.

У подвійних записах щодо точок $x = 2$м та $x = 6$м відображаємо стрибки величини $m_y(x)$, які там відбуваються. В одному рядку вказуємо значення $m_y(x)$ до стрибка, а в наступному – після стрибка.

*Таблиця 3.9*

**Вміст файла "TABL4.TXT"**

```
13
        0.00        0.00
        0.00        0.00
        1.00        0.00
        2.00        0.00
        2.00        4.00
        3.00        4.00
        4.00        4.00
        5.00        4.00
        6.00        4.00
        6.00        0.00
        7.00        0.00
        8.00        0.00
        9.00        0.00
```

Запускаємо файл "PROGRAM2.EXE". Утворюється файл "RESULT.TXT" з результатами розрахунку (табл. 3.10). Кожен його рядок містить значення $x$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ і $U_4(x)$.

*Таблиця 3.10*

**Вміст файла "RESULT.TXT"**

```
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
0.00000E+00 -1.47368E+02  6.07303E+01  0.00000E+00  8.00000E+00
1.00000E+00 -8.79348E+01  5.68713E+01  7.59278E+00  7.24910E+00
2.00000E+00 -3.60476E+01  4.57331E+01  1.46187E+01  6.85830E+00
2.00000E+00 -3.60476E+01  4.57331E+01  1.46187E+01  6.85830E+00
3.00000E+00  1.90705E+00  2.97123E+01  1.74064E+01  6.75759E+00
4.00000E+00  2.24546E+01  1.09180E+01  2.01970E+01  6.84557E+00
5.00000E+00  2.27934E+01 -1.07275E+01  2.31206E+01  7.00191E+00
6.00000E+00  0.00000E+00 -3.53692E+01  2.61776E+01  7.08799E+00
6.00000E+00  0.00000E+00 -3.53692E+01  2.61776E+01  1.80970E+00
7.00000E+00 -4.87576E+01 -6.24409E+01  2.79425E+01  1.66811E+00
8.00000E+00 -1.25431E+02 -9.11473E+01  2.93805E+01  1.12602E+00
9.00000E+00 -2.31418E+02 -1.20931E+02  3.00000E+01  0.00000E+00
```

## 3.4. Приклад комп’ютерного розрахунку стиснуто-зігнутого стержня

Розглянемо приклад розрахунку стиснуто-зігнутого стержня. Схему стержня, інтерпретовану в термінах методу початкових параметрів, показано на рис. 3.3. Задача характеризується параметром $\beta = 0{,}2\,\text{м}^{-1}$.

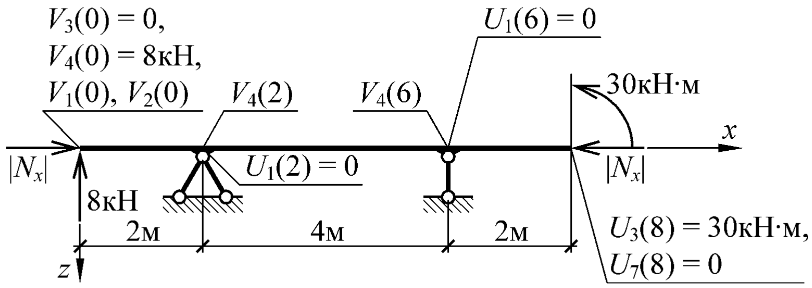



Рис. 3.3

Величину $\beta$ і відомі фактори впливу $V_3(0)$ і $V_4(0)$ записуємо у файл "TABL1.TXT" (табл. 3.11) у такому ж форматі, що й у попередньому пункті.

*Таблиця 3.11*

**Вміст файла "TABL1.TXT"**

```
0.2
2
3         0.00         0.00
4         0.00         8.00
```

Система граничних і додаткових умов складатиметься на тій підставі, що відомими є $U_1(2)$, $U_1(6)$, $U_3(8)$ і $U_7(8)$. Записуємо їх величини у файл "TABL2.TXT" (табл. 3.12) у такому ж форматі, що й у попередніх прикладах.

*Таблиця 3.12*

**Вміст файла "TABL2.TXT"**

```
4
1         2.00         0.00
1         6.00         0.00
3         8.00        30.00
7         8.00         0.00
```

Невідомими залишаються фактори впливу $V_1(0)$, $V_2(0)$, $V_4(2)$ і $V_4(6)$. Перелічуємо їх у файлі "TABL3.TXT" (табл. 3.13) у такому ж форматі, що й у попередніх прикладах.

*Таблиця 3.13*

**Вміст файла "TABL3.TXT"**

```
1         0.00
2         0.00
4         2.00
4         6.00
```

Точки, в яких ми бажаємо отримати значення зусиль та переміщень, перелічуємо у файлі "TABL4.TXT" (табл. 3.14). Вказуємо також значення навантаження $m_y(x)$ у цих точках. При цьому дотримуємося такого ж формату, що й у попередніх прикладах.

Дублюємо записи щодо початкової точки, а також точок $x = 2$м та $x = 6$м, де відбуватимуться стрибки в епюрі $Q_z(x)$.

*Таблиця 3.14*

**Вміст файла "TABL4.TXT"**

```
12
          0.00         0.00
          0.00         0.00
          1.00         0.00
          2.00         0.00
          2.00         0.00
          3.00         0.00
          4.00         0.00
          5.00         0.00
          6.00         0.00
          6.00         0.00
          7.00         0.00
          8.00         0.00
```

Запускаємо файл "PROGRAM3.EXE". Утворюється файл "RESULT.TXT" з результатами розрахунку (табл. 3.15). Кожен його рядок містить значення $x$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$, $U_4(x)$ і $U_7(x)$.

*Таблиця 3.15*

**Вміст файла "RESULT.TXT"**

```
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
0.00000E+00 -1.45597E+02  8.02113E+01  0.00000E+00  1.12085E+01  8.00000E+00
1.00000E+00 -6.72501E+01  7.46257E+01  1.11339E+01  1.09850E+01  8.00000E+00
2.00000E+00 -2.84217E-14  5.80917E+01  2.18239E+01  1.03237E+01  8.00000E+00
2.00000E+00 -2.84217E-14  5.80917E+01  2.18239E+01  6.47508E+00  4.15141E+00
3.00000E+00  4.61390E+01  3.31862E+01  2.78209E+01  5.47886E+00  4.15141E+00
4.00000E+00  6.45498E+01  2.82016E+00  3.27087E+01  4.26422E+00  4.15141E+00
5.00000E+00  5.03608E+01 -3.17959E+01  3.62925E+01  2.87957E+00  4.15141E+00
6.00000E+00  0.00000E+00 -6.92820E+01  3.84295E+01  1.38013E+00  4.15141E+00
6.00000E+00  0.00000E+00 -6.92820E+01  3.84295E+01 -2.77128E+00  0.00000E+00
7.00000E+00 -8.79718E+01 -1.06075E+02  3.49107E+01 -4.24299E+00  0.00000E+00
8.00000E+00 -2.10738E+02 -1.38639E+02  3.00000E+01 -5.54555E+00  0.00000E+00
```

## 3.5. Приклад комп’ютерного розрахунку тонкостінного стержня

Розглянемо приклад з п. 2.4 розрахунку тонкостінного стержня. Схему стержня, інтерпретовану в термінах методу початкових параметрів, показано на рис. 3.4. Задача характеризується параметром $\beta = 0{,}2\,\text{м}^{-1}$.

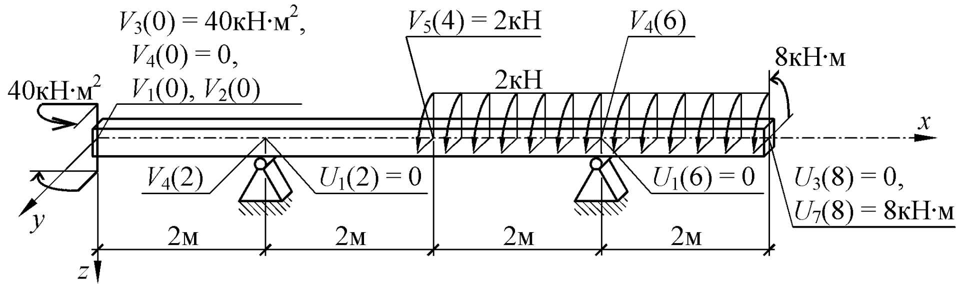



Рис. 3.4

Величину $\beta$ і відомі фактори впливу $V_3(0)$, $V_4(0)$ і $V_5(4)$ записуємо у файл "TABL1.TXT" (табл. 3.16) у такому ж форматі, що й у попередніх прикладах.

*Таблиця 3.16*

**Вміст файла "TABL1.TXT"**

```
0.2
3
3         0.00        40.00
4         0.00         0.00
5         4.00         2.00
```

Система граничних і додаткових умов складатиметься на тій підставі, що відомими є величини $U_1(2)$, $U_1(6)$, $U_3(8)$ і $U_7(8)$. Записуємо їх у файл "TABL2.TXT" (табл. 3.17) у такому ж форматі, що й у попередніх прикладах.

*Таблиця 3.17*

**Вміст файла "TABL2.TXT"**

```
4
1        2.00         0.00
1        6.00         0.00
3        8.00         0.00
7        8.00         8.00
```

Невідомими залишаються фактори впливу $V_1(0)$, $V_2(0)$, $V_4(2)$ і $V_4(6)$. Перелічуємо їх у файлі "TABL3.TXT" (табл. 3.18) у такому ж форматі, що й у попередніх прикладах.

*Таблиця 3.18*

**Вміст файла "TABL3.TXT"**

```
1        0.00
2        0.00
4        2.00
4        6.00
```

Точки, в яких ми бажаємо отримати значення зусиль та переміщень, перелічуємо у файлі "TABL4.TXT" (табл. 3.19). Дублюємо записи щодо початкової точки, а також точок $x = 2$м та $x = 6$м, де відбуватимуться стрибки в епюрі $M_x(x)$.

*Таблиця 3.19*

**Вміст файла "TABL4.TXT"**

```
12
        0.00
        0.00
        1.00
        2.00
        2.00
        3.00
        4.00
        5.00
        6.00
        6.00
        7.00
        8.00
```

У першому рядку вказана кількість наступних рядків. У кожному з дванадцяти наступних рядків записана координата $x$ чергової точки. Для її запису відведено 12 символів.

Запускаємо файл "PROGRAM4.EXE". Утворюється файл "RESULT.TXT" з результатами розрахунку (табл. 3.20). Кожен його рядок містить значення $x$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$, $U_4(x)$ і $U_7(x)$.

*Таблиця 3.20*

**Вміст файла "RESULT.TXT"**

```
 0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
 0.00000E+00 -1.40312E+02  1.07795E+02  4.00000E+01 -4.31179E+00  0.00000E+00
 1.00000E+00 -5.18642E+01  6.96906E+01  3.64621E+01 -2.78762E+00  0.00000E+00
 2.00000E+00 -2.84217E-14  3.43834E+01  3.43875E+01 -1.37534E+00  0.00000E+00
 2.00000E+00 -2.84217E-14  3.43834E+01  3.43875E+01 -1.37303E+01 -1.23549E+01
 3.00000E+00  1.94252E+01  6.65421E+00  2.12556E+01 -1.26211E+01 -1.23549E+01
 4.00000E+00  1.75239E+01 -8.41176E+00  8.97672E+00 -1.20184E+01 -1.23549E+01
 5.00000E+00  6.69930E+00 -1.10852E+01 -3.94521E+00 -1.39115E+01 -1.43549E+01
 6.00000E+00 -1.58318E-13  1.99379E-01 -1.90322E+01 -1.63629E+01 -1.63549E+01
 6.00000E+00 -1.58318E-13  1.99379E-01 -1.90322E+01  1.19920E+01  1.20000E+01
 7.00000E+00  7.82799E+00  1.36766E+01 -8.34528E+00  9.45293E+00  1.00000E+01
 8.00000E+00  2.41960E+01  1.76694E+01 -7.81597E-14  7.29322E+00  8.00000E+00
```

## Контрольні запитання

1. Що таке початкові параметри?
2. Чому початкові параметри мають таку назву?
3. Для розв'язання яких задач може бути застосований метод початкових параметрів?
4. У чому особливість розв'язання диференціальних рівнянь при застосуванні методу початкових параметрів?
5. Який зміст мають величини, що входять до початкових параметрів?
6. З яких умов знаходяться початкові параметри?
7. Що таке частковий розв'язок і від чого він залежить?
8. Які умови мають задовольняти функції, що входять у формули методу початкових параметрів?
9. Для чого потрібні файли "TABL1.TXT", "TABL2.TXT", "TABL3.TXT", "TABL4.TXT" під час розв'язання задачі на комп'ютері?
10. Які саме величини містяться в кожному з файлів "TABL1.TXT", "TABL2.TXT", "TABL3.TXT", "TABL4.TXT"?

## Список рекомендованої літератури


1. *Писаренко Г. С.*, Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів: підручник / За ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид., доп. і перероб. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
2. *Опір* матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: у 2 ч., 5 кн. / За ред. В. Г. Піскунова. – К.: Вища школа, 1994-1995.
3. *Шкельов Л. Т.*, Станкевич А. М., Пошивач Д. В. Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. – К.: ЗАТ "Віпол", 2011. – 456 с.

**Зміст**

Навчальне видання

**ШКЕЛЬОВ** Леонід Тихонович
**ПОШИВАЧ** Дмитро Володимирович

# РОЗРАХУНОК РІЗНИХ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИХ СТАНІВ ПРЯМОЛІНІЙНОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ

Навчальний посібник

Редагування та коректура *В. С. Ясінської*
Комп'ютерне верстання *А. П. Морозюк*

Підписано до друку 2012. Формат 60x84
Ум. друк. арк. 3,95. Обл..-вид. арк. 4,25,
Тираж 75 прим. Вид. № 2/І-12 Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mai: red_isdat@ua fm

Видруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
ДК № 808 від 13.02.2002р.