

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

**Л.Т. Шкелев, А.Н. Станкевич**

# **ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ**

Конспект лекций  
для иностранных студентов, которые учатся  
по направлению подготовки 6.060101 «Строительство»

Киев 2014

УДК 539.3  
ББК 30.121  
Ш66

Рецензент А.Ф. Корбаков, канд. техн. наук, доцент

*Утверждено на заседании ученого совета строительного факультета, протокол № 2 от 24 октября 2013 года.*

**Шкелев Л.Т.**

Ш66 Теория упругости: конспект лекций / Л.Т. Шкелев, А.Н. Станкевич. – К.: КНУСА, 2013. – 152 с.

Изложены цель и задачи изучения курса теории упругости, рассмотрены основные положения теории упругости. Приведены общие соотношения, а также методики решения плоской задачи теории упругости и задачи изгиба пластин.

Предназначено для иностранных студентов, которые учатся по направлению 6.060101 «Промышленное и гражданское строительство».

УДК 539.3  
ББК 30.121

© Л.Т. Шкелев, А.Н. Станкевич, 2014  
© КНУСА, 2014

## Оглавление

Введение.....	4
Лекция 1. Общие зависимости между напряжениями деформациями и перемещениями.....	5
Лекция 2. Плоская задача в прямоугольных координатах, общие зависимости.....	6
Лекция 3. Граничные условия.....	15
Лекция 4. Методы решения задач.....	22
Лекция 5, 6. Примеры решения задач.....	29
Лекция 7. Плоская задача в полярных координатах.....	45
Лекция 8, 9. Решение плоской задачи в полярных координатах.....	59
Лекции 10, 11. Общие положения расчета пластин на изгиб.....	77
Лекция 12. Расчет пластин в тригонометрических рядах.....	89
Лекции 13, 14. Расчет пластин методом Бубнова-Галеркина.....	96
Лекция 15. Сжато-изогнутая пластина.....	101
Лекции 16, 17. Изгибаемая пластина в цилиндрических координатах.....	107
Лекция 18, 19. Расчет круглых симметричных пластин на изгиб.....	118
Лекция 20. Методика применения ортогональных координат.....	127
Лекция 21. Определение деформаций.....	135
Лекция 22. Определение уравнений равновесия.....	142
Лекция 23. Основные уравнения и зависимости в цилиндрических и сферических координатах.....	147
Рекомендованная литература .....	152

## Введение

Курс сопротивления материалов читается на протяжении трех семестров. В первых двух семестрах излагаются вопросы, связанные с расчетом стержня, третий семестр содержит тематику, посвященную теории упругости. В данном конспекте лекций рассмотрен материал, содержащий необходимые вопросы теории упругости.

Первая часть лекций излагает методы расчета плоского напряженно-деформированного состояния пластин. Описаны все необходимые теоретические вопросы и проиллюстрированы примеры решения задач.

Для решения задач использованы различные методики. Очень важно, что решение плоской задачи рассмотрена в прямоугольных и полярных координатах, что дает возможность рассчитывать пластины различной формы.

Следующая часть лекций связана с рассмотрением изгибаемых пластин. При этом так же как и в предыдущих лекциях использованы прямоугольные и полярные координаты. Содержатся все необходимые теоретические вопросы, а так же рассмотрены конкретные решения задач, с использованием различных методов решения. Описаны вопросы, связанные с учетом влияния на изгиб пластины его плоского напряженного состояния. Это дает возможность определить критические силы, связанные с потерей устойчивости пластин.

В последних двух лекциях изложены вопросы, дающие возможность проводить преобразование прямоугольных координат в различные криволинейные координаты. Это позволяет проводить расчеты пластин различной формы.

**Лекция 1. ОБЩИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ, ДЕФОРМАЦИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ТЕЛЕ**

Общие зависимости между напряжениями, деформациями и перемещениями в пространственном теле подробно изложены в учебнике (4), но они необходимы и при изложении материала в данном конспекте, поэтому с ними необходимо познакомиться. Приведем общие соотношения без доказательств.

Возникающие в пространственном теле напряжения представляют в виде тензора напряжений:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Количество напряжений равно шести.

Деформации так же можно представить в виде тензора:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 1/2 \gamma_{xy} & 1/2 \gamma_{xz} \\ 1/2 \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 1/2 \gamma_{yz} \\ 1/2 \gamma_{xz} & 1/2 \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Деформации тоже определяются шестью величинами.

Перемещения представляют собой вектор:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Существует три системы соотношений между указанными выше величинами:

1. Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Кинематические зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \varepsilon_{xx}, & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \gamma_{xy}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \varepsilon_{yy}, & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \gamma_{xz}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \varepsilon_{zz}, & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

3. Физические зависимости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy} - \mu \sigma_{zz}), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (-\mu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \mu \sigma_{zz}), & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (-\mu \sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Следует подчеркнуть, что все величины, фигурирующие в предыдущих выражениях, являются функциями трех переменных, а именно координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Решение дифференциальных уравнений в частных производных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  задача очень сложная.

Ее можно упростить, перейдя к неизвестным функциям, зависящим от двух переменных. Рассмотрим этот случай.

## **Лекция 2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ, ОБЩИЕ ЗАВИСИМОСТИ**

Рассмотрим прямоугольную пластину, расположенную в плоскости  $XOY$  (рис.1.1).

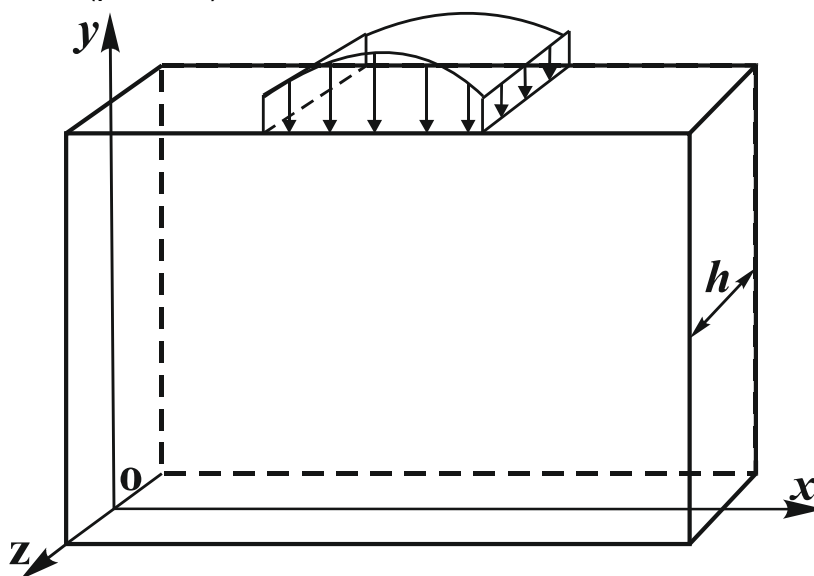


Рис. 1.1

Толщина пластины равняется  $h$ . Нагрузки, действующие на пластину, параллельны плоскости  $XOY$  и равномерно распределены по толщине пластины. Это дает возможность предположить, что напряжения, возникающие внутри пластины, так же параллельны плоскости  $XOY$  и тоже равномерно распределены по толщине пластины. В результате пластину толщиной  $h$  можно заменить плоскостью, совпадающей с  $XOY$ .

В этом случае напряжения, деформации и перемещения в направлении оси  $OZ$  можно принять равными нулю. Учитывая это в основных соотношениях пространственной задачи, получим необходимые зависимости для плоской задачи:

– тензор напряжений:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}; \quad (1.7)$$

– тензор деформаций:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}; \quad (1.8)$$

– вектор перемещений:

$$U = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Очень важно, что по толщине пластины (в направлении оси  $OZ$ ) все указанные величины не меняются, а значит, они зависят только от двух переменных координат  $(x, y)$ . Учитывая сказанное, преобразуем три системы уравнений (1.4); (1.5); (1.6) пространственной задачи в систему уравнений для плоской задачи.

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + g_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + g_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Кинематические соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \varepsilon_{xx}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \varepsilon_{yy}; \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Физические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}); \end{aligned}$$



$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy};$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (1.12)$$

Преобразуем физические соотношения, выразив напряжения через деформации:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{xx} + \mu \varepsilon_{yy});$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}); \quad (1.13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}.$$

Если учесть зависимости (1.11), можно напряжения выразить через перемещения:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial U_y}{\partial y} \right);$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \mu \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right); \quad (1.14)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right).$$

Эти зависимости между напряжениями, деформациями и перемещениями дают возможность составить системы уравнений, используя напряжения или перемещения. В первую очередь составим систему уравнений в напряжениях. Два подобных уравнения уже существуют, это (1.10). Однако они имеют три неизвестных, поэтому необходимо составить третье уравнение.

Используем зависимости (1.11), дважды дифференцируя их, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 U_x}{\partial x \partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 U_y}{\partial y \partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 U_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 U_y}{\partial x^2 \partial y}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Вычтем из первых двух равенств третье. При этом правая часть этого выражения будет равна нулю, таким образом имеем:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.\tag{1.16}$$

Это, так называемое, уравнение совместности деформаций.

Выразив входящие в него деформации через напряжения, используя формулу (1.12), получим:

$$\frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right] = 0.\tag{1.17}$$

Касательное напряжение заменим выражениями через нормальные напряжения. Для этого из уравнений (1.10) найдем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_x}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial g_y}{\partial y}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Подставим оба этих выражения в предыдущее и после сокращения на  $E$ , будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + (1 + \mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_x}{\partial x} \right) - \\ - (1 + \mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) = 0.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Выполним простые алгебраические преобразования полученного выражения. В результате придем к следующему соотношению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \mu)\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right). \quad (1.20)$$

Это окончательные уравнения совместности деформаций в напряжениях. Присоединим их к двум уравнениям равновесия (1.10), получим окончательную систему дифференциальных уравнений в напряжениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -g_x; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= -g_y; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= -(1 + \mu)\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Получена система трех уравнений в частных производных с тремя неизвестными.

Далее составим систему уравнений в перемещениях. Для этого в первые два уравнения (1.21) подставим соотношения (1.14):

$$\begin{aligned} \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1 - \mu}{2} \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} \right) \right] &= -q_x; \\ \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{1 - \mu}{2} \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} \right) + \left( \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right) \right] &= -q_y. \end{aligned} \quad (1.22)$$

После простых преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} &= -\frac{1 - \mu^2}{E} q_x; \\ \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} &= -\frac{1 - \mu^2}{E} q_y. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Третье уравнение системы (1.21) обращается в ноль при подстановке перемещений. В этом легко убедиться, если в уравнение (1.16), из которого и получено третье уравнение, подставить зависимости (1.11).

$$\frac{\partial^3 U_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 U_y}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 U_x}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 U_y}{\partial x^2 \partial y} = 0, \Rightarrow 0 = 0. \quad (1.24)$$

Таким образом, система (1.23) представляет собой дифференциальные уравнения в перемещениях. Это есть два уравнения в частных производных с двумя неизвестными. Для решения задач можно использовать любую из этих систем. В основном это связано с граничными условиями и методикой решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим еще один вариант использования неизвестных функций. Он заключается в том, что в качестве неизвестной принимается, так называемая, функция напряжений, которую будем обозначать  $\phi$ . Этот вариант решения был рекомендован английским ученым Эри. Им были приняты такие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Подставим эти выражения в систему (1.21); при этом принимаем нулевые значения нагрузки  $g_x$  и  $g_y$ , т.е. распределенная по плоскости нагрузка принимается равной нулю. Учитывается только нагрузка, приложенная по периметру пластины.

После подстановки соотношений (1.25) в уравнения (1.21) получим:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0, \Rightarrow 0 = 0; \\ 2) \quad & -\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = 0, \Rightarrow 0 = 0; \\ 3) \quad & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Как следует из результата подстановки, первые два уравнения тождественно удовлетворяются. Остается одно, третье уравнение, которое можно записать следующим образом:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0. \quad (1.27)$$

В развернутом виде это будет выглядеть так:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0. \quad (1.28)$$

Полученное уравнение называют *бигармоническим*, и оно имеет два варианта обозначения.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.29)$$

Оно называется *набла два* и является *гармоническим* уравнением.

$$\nabla^4 = \nabla^2 * \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (1.30)$$

Это уравнение имеет название *набла четыре* и представляет бигармоническое уравнение. Учитывая записанные выражения, основное уравнение для функции напряжений можно записать так:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \nabla^4 \phi = 0. \quad (1.31)$$

Это сокращенная запись бигармонического уравнения.

Запишем ранее используемые соотношения через функцию напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = -\frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y},$$

$$K_x = \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + (2+\mu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right],$$

$$K_y = \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + (2+\mu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right].$$

Величины  $K_x$  и  $K_y$  представляют кривизну линий, параллельных осям  $X$  и  $Y$ .

Для функции напряжений установим зависимости в системе координат  $s, n$ , повернутых относительно осей  $X$  и  $Y$  на произвольный угол  $\alpha$  (рис 1.2).

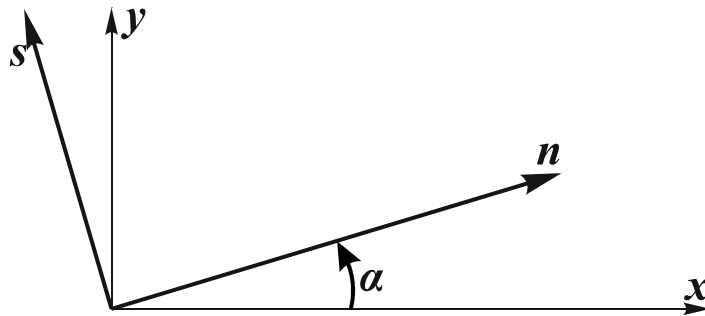


Рис. 1.2

Для этого необходимо в формулах (1.32) координату  $y$  заменить на  $s$ , а  $x$  – на  $n$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}; \\
\varepsilon_{nn} &= \frac{\partial U_n}{\partial n} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right); \\
\sigma_{ss} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2}; \\
\varepsilon_{ss} &= \frac{\partial U_s}{\partial s} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right); \\
\tau_{ns} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n}; \\
\gamma_{sn} &= \frac{\partial U_n}{\partial s} + \frac{\partial U_s}{\partial n} = -\frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n}; \\
K_n &= \frac{\partial^2 U_s}{\partial n^2} = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3} + (2+\mu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^2 \partial s} \right]; \\
K_s &= \frac{\partial^2 U_n}{\partial s^2} = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} + (2+\mu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial n \partial s^2} \right].
\end{aligned} \tag{1.33}$$

### Лекция 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как известно, при решении дифференциальных уравнений используются так называемые граничные условия. При расчете плоской пластины они представляют собой значения функций на контуре пластины. Это могут быть заданные силовые нагрузки, деформации и перемещения. Их количество на каждой стороне контура должно равняться двум, что соответствует четвертому порядку систем и дифференциальных уравнений.

Сначала рассмотрим свободные края пластины. В этом случае никаких закреплений, препятствующих перемещениям, не существует.

Возможно приложение внешних нагрузок, которые совпадают с направлениями нормальных и касательных напряжений:

Для составления граничных уравнений необходимо выделить бесконечно малый элемент, одна сторона которого совпадает со стороной контура пластины (рис.1.3).

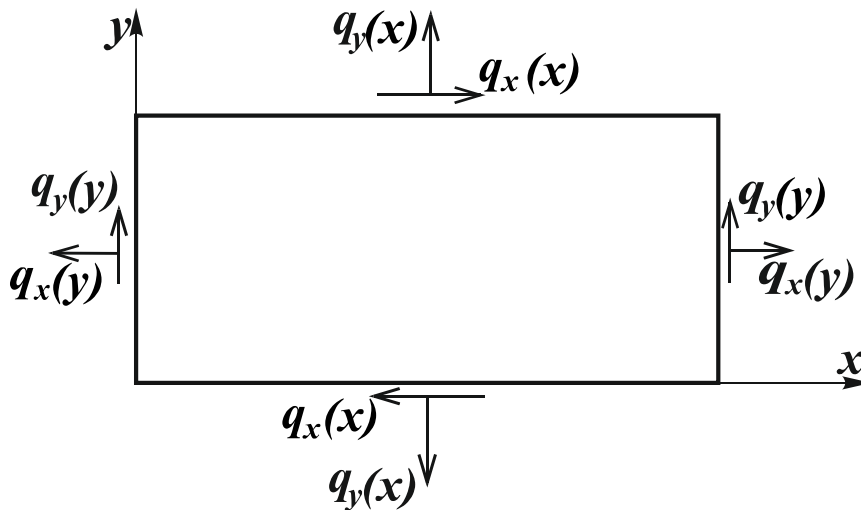


Рис. 1.3

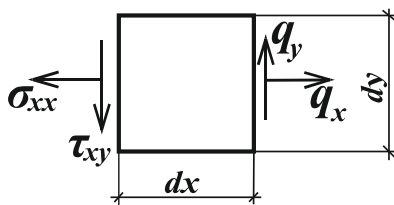


Рис. 1.4

- контур пластины при  $x=const$ .

Граничные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} dy - q_x dy &= 0; \\
 \sigma_{xx} &= q_x; \\
 \tau_{xy} dy - q_y dy &= 0; \\
 \tau_{xy} &= q_y.
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

Аналогично по другим сторонам. В этом случае на контуре пластины неизвестные напряжения совпадают с заданными нагрузками.

Если на контуре пластины заданы перемещения, совпадающие с направлениями искомых перемещений  $U_x$  и  $U_y$ , то условия показаны на (рис.1.5):



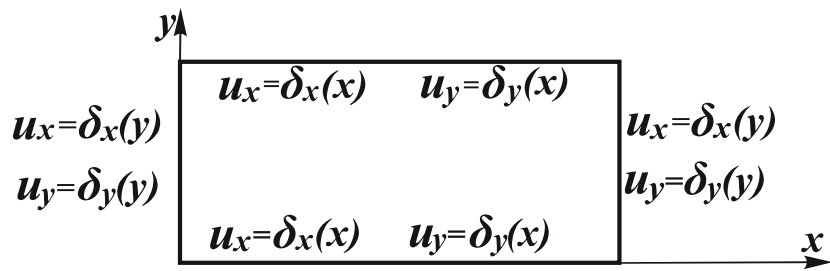


Рис. 1.5

Под  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  подразумеваются заданные, вынужденные перемещения по направлению осей  $x$  и  $y$ . Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} u_x &= \delta_x \\ u_y &= \delta_y. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Составим граничные условия с использованием функции напряжений. Запишем их в напряжениях по наклонному контуру пластины (рис.1.6, а). Рассмотрим сторону пластины (2 - 3):

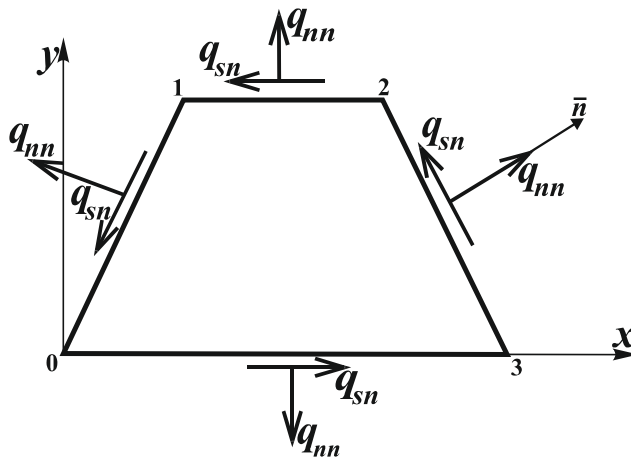


Рис. 1.6, а

Рассмотрим бесконечно малый элемент (рис.1.6, б). Составим его условия равновесия:

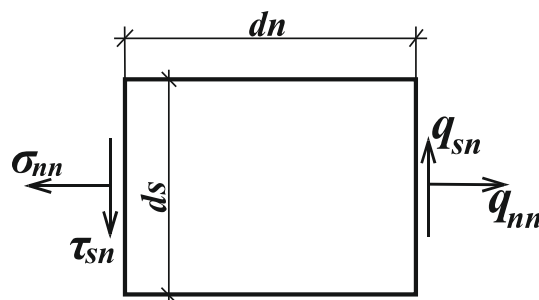


Рис. 1.6, б

Используя зависимости (1.33), получим:

$$q_{nn} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}; \quad q_{sn} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n}. \quad (1.36)$$

Рассмотрим стержень, который совпадает с контуром пластины (рис. 1.7). К нему приложена такая же нагрузка, как и к пластине.

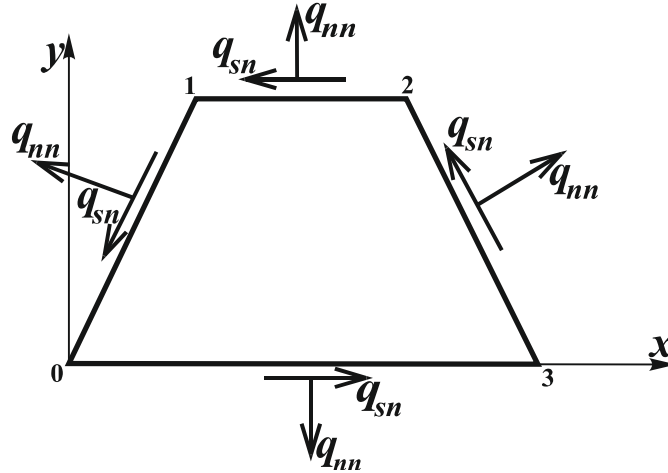


Рис. 1.7

Вспользуемся зависимостями между усилиями в стержне и нагрузкой, а именно - изгибающим моментом  $M$  и продольной силой  $N$ :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = q_{nn};$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} = -q_{sn}.$$

На основании условий (1.36) получим:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial s^2};$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} = \frac{\partial N}{\partial s}.$$

Интегрируя эти выражения по  $s$ , найдем:

$$\phi = M + C_1 s + C_2;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = N + C_3.$$

Значения констант  $C_1; C_2; C_3$  влияют на функцию напряжений, но учитывая, что напряжения это вторые производные от функции

напряжений, можно утверждать, что напряжения не зависят от этих констант, так как при них множители координат не превышают первую степень. Таким образом, при разных константах напряжения меняться не будут, поэтому значения констант можно принять любыми. Наиболее простой вариант - принять их равными нулю, т. е.  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ . Обратим внимание еще на то, что количество констант соответствует степени статической неопределимости рамы. Это дает возможность принять равной нулю степень статической неопределимости рамы, тем самым преобразовать раму в статически определимую. Учитывая сказанное, граничные условия будут иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned}\phi &= M; \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= N.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Таким образом, на контуре пластины функция напряжений и ее производная будут равны изгибающему моменту и продольному усилию в статически определимой раме, которая совпадает с контуром пластины и нагружена той же самой нагрузкой.

Рассмотрим другой вариант граничных условий при использовании функции напряжений. Его суть состоит в том, что сторона пластины в поперечном направлении свободно перемещается и имеет нагрузку, перпендикулярную к ней.

Перемещения в продольном направлении равны нулю, т. е. данная сторона закреплена. Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}1) \sigma_{nn} &= q_{nn}; \\ 2) U_s &= 0.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Рассмотрим их преобразования. Первое условие, как и в предыдущем варианте, может быть заменено первой строчкой (1.37).

$$\phi = M.\tag{1.39}$$

Продольное перемещение  $U_s$  связано с деформацией  $\epsilon_{ss}$ :

$$\frac{\partial U_s}{\partial s} = \epsilon_{ss}.\tag{1.40}$$

Интегрируя, найдем:

$$U_s = \int \epsilon_{ss} ds + C.$$

Константа  $C$  дает постоянное перемещение по всей стороне. По условию сторона закреплена, поэтому  $C = 0$ . Если сторона пластины закреплена во всех точках, то можно принять  $\varepsilon_{ss} = 0$  и использовать это условие вместо перемещения  $U_s$ . Выразим через напряжения:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{E}(\sigma_{ss} - \mu\sigma_{nn}). \quad (1.41)$$

Выразим напряжения через функцию напряжений, а также, учитывая первое граничное условие, получим:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} - \mu q_{nn} \right). \quad (1.42)$$

Учитывая, что  $\varepsilon_{ss} = 0$ , получим:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = \mu q_{nn}. \quad (1.43)$$

После выполненных преобразований, запишем окончательные граничные условия:

$$\begin{aligned} 1) \phi &= M; \\ 2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} &= \mu q. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Оба граничных условия выражаются через функцию напряжений, а значит задачу можно решать, используя ее.

Далее перейдем к определению граничных соотношений при условии, что сторона пластины закреплена в поперечном направлении, следовательно ее перемещения  $U_n = 0$  во всех точках. В продольном она свободна. В этом направлении действует нагрузка  $q_{ss}$ . Это говорит о том, что условия можно записать так:

$$\begin{aligned} 1) \tau_{sn} &= q_{ss}; \\ 2) U_n &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Выразим граничные условия через функцию напряжений. От нагрузки  $q_{ss}$  на грани пластины возникают продольные усилия. Отсюда следует, что первое граничное условие можно записать в таком виде:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = N_s.$$

Второе условие есть нулевое поперечное перемещение грани пластины. При этом будет равна нулю кривизна этой стороны. Кривизну можно выразить через функцию напряжений, она равна:

$$\chi_s = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} + (2 + \mu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial s^2 \partial n} \right].$$

Учтем, что:

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3} = -(2 + \mu) \frac{\partial}{\partial s} q_{sn} = 0.$$

В результате получим:

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3} = -(2 + \mu) \frac{\partial}{\partial s} q_{sn} = 0.$$

С учетом первого граничного условия будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= N_s; \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} &= (2 + \mu) \frac{\partial}{\partial s} q_{sn}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Рассмотрим еще один вариант граничных условий. Сторона пластины совпадает с линией  $s$ . Считаем, что перемещение вдоль этой линии равно нулю, а так же равна нулю кривизна, что соответствует граничным условиям двух предыдущих вариантов.

Это дает возможность использовать полученные в них условия. Нагрузка по стороне отсутствует, таким образом, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} &= 0; \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Описанные граничные условия покажем на (рис.1.8).

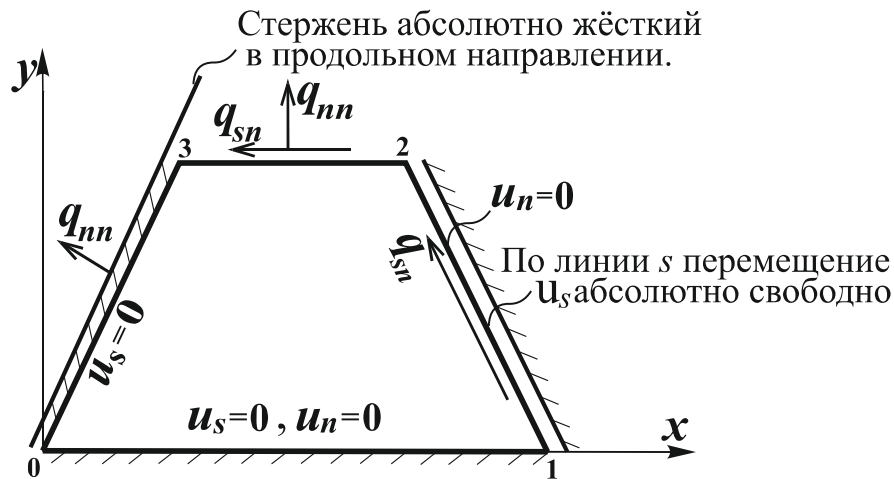


Рис. 1.8

Участок пластины 2-3 имеет возможность абсолютно свободно перемещаться по двум направлениям  $s$  и  $n$ . На нем могут быть приложены две нагрузки. Граничные условия на этом участке можно записать по формулам (1.36) или (1.37).

К участку пластины 0-3 прикреплен абсолютно жесткий стержень в продольном направлении, который не дает возможности перемещаться точкам пластины в этом направлении.

Кроме того, может быть приложена нагрузка  $q_{sn}$ . В этом случае надо использовать граничные условия (1.45).

На участке (1.2) выполнено закрепление перемещений в перпендикулярном направлении. В то же время нет препятствий перемещениям в продольном направлении, в котором может быть приложена нагрузка  $q_{sn}$ . Необходимо использовать условия (1.46).

Сторона пластины 0-1 абсолютно жестко закреплена в двух направлениях. В этом случае ее кривизна и продольная линейная деформация равна нулю. Следует использовать граничные условия (1.47).

#### Лекция 4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Как известно, при расчете конструкций необходимо найти напряжения, деформации и перемещения. Методика определения указанных величин связана с решением дифференциальных уравнений с учетом граничных условий. Отметим, что все полученные дифференциальные уравнения записаны в частных производных. К

сожалению, нет общих точных методов решения подобных задач, поэтому используются различные приближенные подходы. Один - достаточно эффективный приближенный метод, будет рассмотрен далее.

В некоторых случаях есть возможность найти точное решение задачи.

Обычно это основано на самостоятельном подборе необходимых значений искомым величин.

Рассмотрим один подобный вариант решения, в котором используются алгебраические полиномы. На их основе функция напряжений принимается в виде (1.47):

$$\phi = C_1 x^n + C_2 x^{n-1} y + C_3 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n x y^{n-1} + C_{n+1} y^n. \quad (1.47)$$

Необходимо принятую функцию подставить в уравнение (1.28). Для этого найдем производные:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = C_1 n(n-1)(n-2)(n-3) x^{n-4} + \dots + C_{n-3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 y^{n-4};$$

$$2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 2[C_3 (n-2)(n-3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{n-4} + \dots + C_{n-1} 2 \cdot 1 \cdot (n-2)(n-3) y^{n-4}];$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = C_5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 x^{n-4} + \dots + C_{n+1} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3) y^{n-4}.$$

После подстановки в уравнение указанных величин надо объединить все члены с одинаковыми степенями переменных  $x$  и  $y$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} & [C_1 n(n-1)(n-2)(n-3) + 2C_3 (n-2)(n-1) \cdot 2 \cdot 1] + \\ & + [C_5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1] x^{n-4} + \\ & + \dots + [C_{n-3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2C_{n-1} 2 \cdot 1 \cdot (n-2)(n-3)] + \\ & + [C_{n+1} n(n-1)(n-2)(n-3)] y^{n-4} = 0. \end{aligned}$$

Полученное выражение будет равно нулю, если нулевые значения будут иметь множители при разных степенях переменных  $x$  и  $y$ . Таких членов будет  $(n-3)$ , а общее число неизвестных  $C$  равно  $(n+1)$ . Таким образом, приравниваемых нулю соотношений на четыре меньше

общего количества неизвестных констант, в результате чего ( $n = 3$ ) константы можно выразить через четыре величины. В результате чего, в принятой функции  $\phi$  останутся четыре неизвестных, которые используются для выполнения граничных условий.

Для рассмотрения конкретных операций используем полином пятой степени:

$$\phi = C_1 x^5 + C_2 x^4 y + C_3 x^3 y^2 + C_4 x^2 y^3 + C_5 x y^4 + C_6 y^5.$$

Общее количество констант равняется шести, т.е. на единицу больше степени полинома. Подставим полином в дифференциальное уравнение, предварительно определив производные:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 120C_1 x + 24C_2 y;$$

$$2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 2[12C_3 x + 12C_4 y];$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 24C_5 x + 120C_6 y;$$

$$\nabla^4 \phi = (120C_1 + 24C_3 + 24C_5) x + (24C_2 + 24C_4 + 120C_6) y.$$

Как было сказано выше, приравниваем к нулю множители при двух разных степенях  $x$  и  $y$ . Это дает:

$$120C_1 + 24C_3 + 24C_5 = 0;$$

$$24C_2 + 24C_4 + 120C_6 = 0.$$

Отсюда выразим две константы через четыре неизвестных.

Определим значения  $C_3$  и  $C_4$ :

$$C_3 = -5C_1 - C_5,$$

$$C_4 = -C_2 - 5C_6.$$

Учитывая это в полиноме, получим:

$$\phi = C_1 x^5 + C_2 x^4 y - (5C_1 + C_5) x^3 y^2 - (C_2 + 5C_6) x^2 y^3 + C_5 x y^4 + C_6 y^5.$$

В полиноме остались четыре неизвестных. Их можно найти из граничных условий. Конкретный пример будет выполнен дальше.

Рассмотрим приближенный метод решения задачи, который имеет название метода конечных разностей. Этот метод заключается в том, что аналитические выражения искомых функций заменяются их численными значениями в отдельных точках. Для этого на пластину



необходимо нанести сетку, линии которой параллельны координатным осям (рис.1.9).

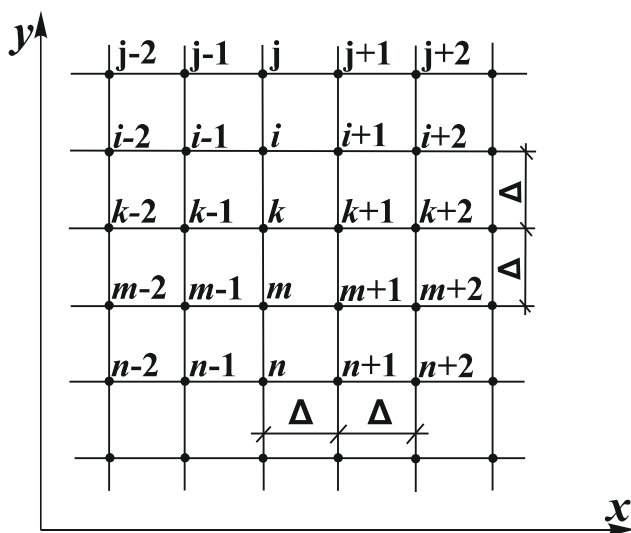


Рис. 1.9

Как показано на рис. 1.9, искомая функция определяется численными значениями в узловых точках сетки. Обычно шаг линий сетки в двух направлениях принимается одинаковым.

Через численные значения функций можно приближенно найти их производные. Для обоснования этого рассмотрим график функции одной переменной (рис.1.10).

Известно, что производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции. Рассмотрим график в точке  $K$ .



Рис. 1.10

Если в ней провести касательную к графику функции в левом направлении, то тангенс ее наклона будет, в определенной степени,

близок к углу наклона прямой линии, соединяющей точки, и тангенс угла этой линии будет равен:

$$\operatorname{tg}(\phi_k, \phi_{k+1}) = \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta}.$$

Это выражение дает приближенное значение производной в точке, что позволяет записать:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_{k, \text{левое}}} = \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta}.$$

Аналогично можно получить производную, рассматривая линию между точками. В этом случае будем иметь:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_{k, \text{правое}}} = \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta}.$$

Более точный результат дает средняя производная, которую дает линия. В этом случае производная будет равна:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_{k, \text{среднее}}} = \frac{\phi_{k+1} - \phi_{k-1}}{2\Delta}.$$

Для получения производных более высокого порядка надо рассматривать график не функции, а предыдущей производной.

Это дает возможность найти производные более высокого порядка, как разность производных предыдущего порядка. Например, вторая производная может быть найдена следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right).$$

В конечных разностях вторую производную можно записать как разность правой и левой производных; выполняя это, найдем:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2_k} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_{k, \text{правое}}} - \frac{\partial \phi}{\partial x_{k, \text{левое}}} \right].$$

Учитывая выражения первых производных, получим:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2_k} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta} - \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta} \right] = \frac{\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}}{\Delta^2}.$$

При вычислении производных от функций двух переменных по разным координатам требуется использование значений функций в направлении разных координат.

Рассмотрим вторую производную по  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y_k} &= \frac{1}{2\Delta} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_{i,cp}} - \frac{\partial \phi}{\partial x_{m,cp}} \right] = \frac{1}{2\Delta} \left[ \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta} - \frac{\phi_{m+1} - \phi_{m-1}}{2\Delta} \right] = \\ &= \frac{(\phi_{i+1} + \phi_{m-1}) - (\phi_{i-1} + \phi_{m+1})}{4\Delta^2}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно определить другие производные.

Все необходимые значения записаны в формулах (1.48):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_k} &= \frac{\phi_{k+1} - \phi_{k-1}}{2\Delta}; \\ \frac{\partial \phi}{\partial y_k} &= \frac{\phi_i - \phi_m}{2\Delta}; \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2_k} &= \frac{\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}}{\Delta^2}; \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2_k} &= \frac{\phi_i - 2\phi_k + \phi_m}{\Delta^2};\end{aligned}\tag{1.48}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y_k} = \frac{(\phi_{i+1} + \phi_{m+1}) - (\phi_{i-1} + \phi_{m-1})}{4\Delta^2};$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3_k} = \frac{\phi_{k+2} - 2\phi_{k+1} + 2\phi_{k-1} - \phi_{k-2}}{2\Delta^3};$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3_k} = \frac{\phi_j - 2\phi_i + 2\phi_m - \phi_n}{2\Delta^3};$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4_k} = \frac{\phi_{k+2} - 4\phi_{k+1} + 6\phi_k - 4\phi_{k-1} + \phi_{k-2}}{\Delta^4};\tag{1.48}$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4_k} = \frac{\phi_j - 4\phi_i + 6\phi_k - 4\phi_{m-1} + \phi_n}{\Delta^4};$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2_k} = \frac{(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) - 2(\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}) + (\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1})}{\Delta^4}.$$

Безусловно, формулы конечных элементов дают значения приближенные. Их точность возрастает, если расстояние между узлами сетки уменьшается.

На основании формул (1.48) можно получить выражение бигармонического уравнения в конечных элементах. Нарисуем часть сетки, в которой фигурируют функции, входящие в дифференциальное уравнение (1.10).

В кружочках записаны коэффициенты, на которые умножаются функции, входящие в бигармоническое уравнение, записанные для точки К (рис. 1.11). Эти коэффициенты получим, если запишем бигармоническое уравнение, подставляя в него выражения (1.48).

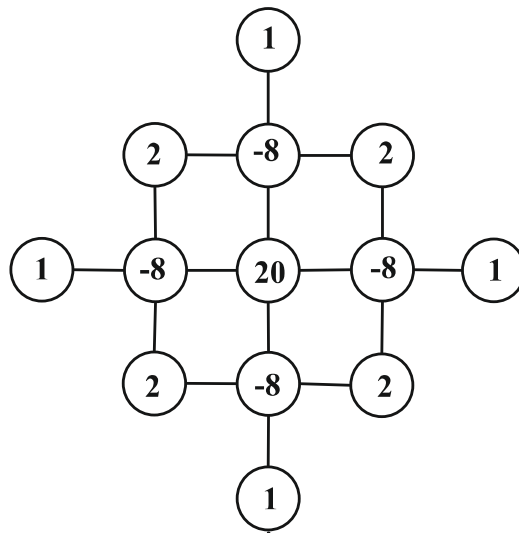


Рис. 1.11

$$\nabla^4 \phi_k = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta^4} (\phi_{k+2} - 4\phi_{k+1} + 6\phi_k - 4\phi_{k-1} + \phi_{k-2}) + \\ & + 2 [(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) - 2(\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}) + \\ & + (\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1})] + (\phi_j - 4\phi_i + 6\phi_k - 4\phi_{m-1} + \phi_n) = 0. \end{aligned}$$

Сокращая на  $\nabla^4$  и суммируя одинаковые члены, получим:

$$\begin{aligned} & 20\phi_k - 8(\phi_{k-1} + \phi_{k+1} + \phi_i + \phi_m) + 2(\phi_{i-1} + \phi_{i+1} + \phi_{m-1} + \phi_{m+1}) + \\ & + (\phi_{k-2} + \phi_{k+2} + \phi_j + \phi_n) = 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Запишем общий порядок решения задач и расчета прямоугольных пластин с использованием метода конечных разностей.

1 Делаем рисунок пластины и наносим на нее сетку. При этом следует учитывать характер граничных условий. Во всех случаях сетку необходимо наносить внутри пластины, на ее контуре и за ее пределами. На какие расстояния необходимо выносить за пределы пластины зависит от граничных условий. Если в них нет производных, то за контуром сетку располагать не следует. При наличии первых и вторых производных вдоль этих сторон следует вынести сетку на один шаг за предел пластины. В том случае, когда есть третьи производные, то сетку следует вынести на два шага за соответствующий контур пластины.

2 Записываем уравнения (1.49) во всех внутренних точках пластины. На контуре пластины основные уравнения (1.49) надо составлять только в том случае, когда в соответствии с граничными условиями сетка вынесена за контур пластины на два шага.

3 Используя граничные условия, можно найти значения функции напряжений за пределами контура и на контуре пластины. Однако, только в тех случаях, когда на грани пластины не записаны основные уравнения (1.49).

4 Найденные из граничных условий записанные на основании формулы (1.49) значения функции напряжений, подставляем в основные уравнения, в них учитываются требования, указанные в предыдущих пунктах. В результате получим алгебраическую систему уравнений, количество которых будет соответствовать числу неизвестных.

5 В результате решения системы уравнений будут найдены все необходимые неизвестные. По ним можно определить во всех точках сетки, нанесенной на пластину, все необходимые для решения задачи величины, а именно, напряжения, деформации и перемещения. Какие величины следует находить, зависит от условия задачи.

Конкретный пример решения будет рассмотрен ниже в примере 2 лекций 5,6.

## *Лекции 5, 6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

**Пример 1.** Рассмотрим расчет прямоугольной пластины с помощью алгебраических полиномов. Решаем задачу, применяя функцию напряжений. Используемая методика требует самостоятельного

подбора искомой функции напряжений, а так же проверки удовлетворения ее дифференциальному уравнению и граничным условиям.

В решаемой задаче целесообразно искомую функцию напряжений принять в виде суммы двух величин, каждая из которых удовлетворяет определенным условиям, их сумма полностью соответствует требованиям решаемой задачи. Примем искомую функцию в виде:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2.$$

Начнем с подбора первой функции. При ее нахождении будем рассматривать действие на пластину нагрузки, показанной на рис. 1.12.

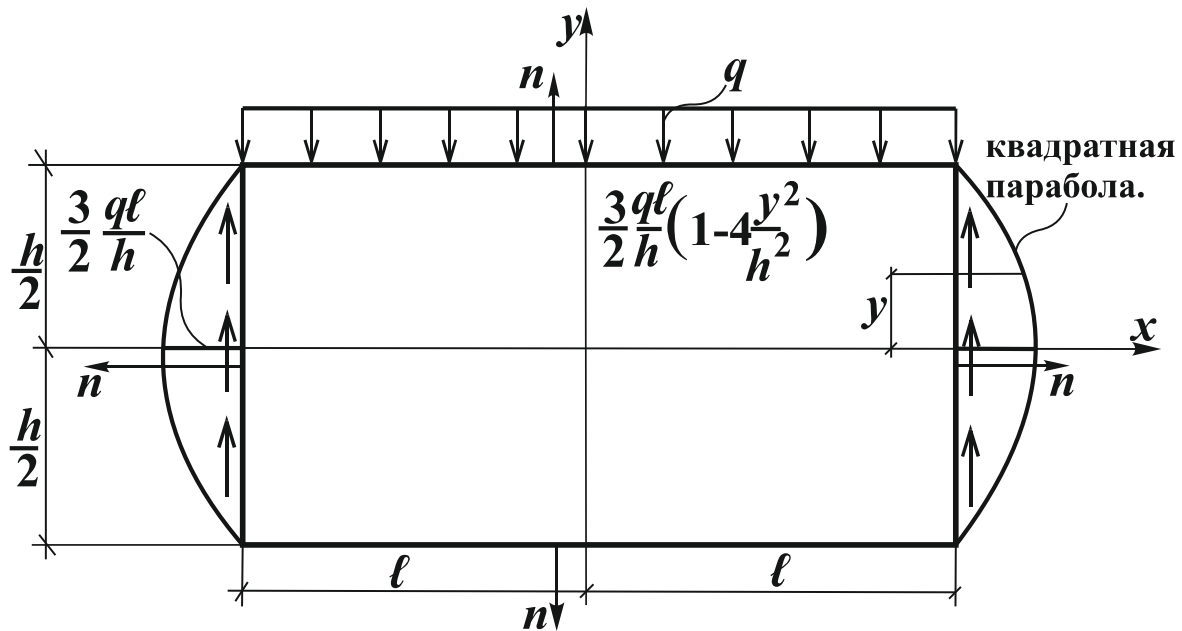


Рис. 1.12

Заданная нагрузка должна удовлетворять условиям равновесия пластины. Выполним проверку этого условия. Составим сумму проекций на ось  $Y$ :

$$2 \frac{2}{3} \left( \frac{3ql}{2h} h \right) = q2l; \quad 2ql = 2ql.$$

Граничные условия составим по формуле (1.37):

- 1)  $\phi = M;$
- 2)  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = N.$

Для их записи необходимо рассмотреть раму, совпадающую с контуром пластины и нагруженную той же нагрузкой. Раму необходимо преобразовать в статически определимую (рис. 1.13):

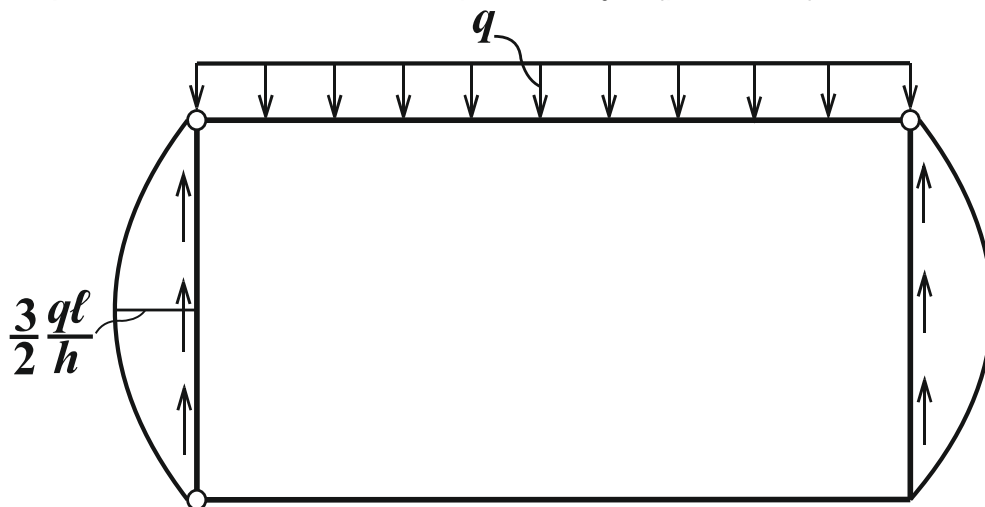


Рис. 1.13

Эпюры моментов и продольных усилий имеют вид (рис. 1.14):

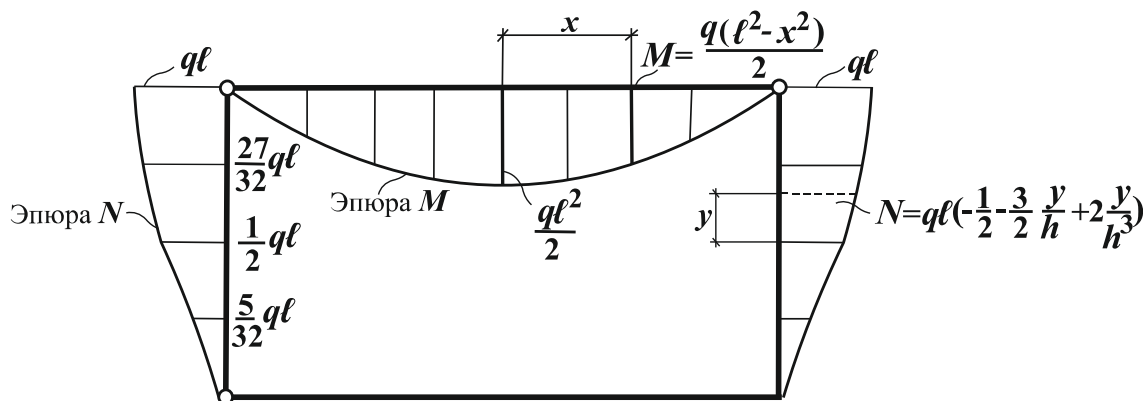


Рис. 1.14

Объясним построение эпюры N (рис.1.15):

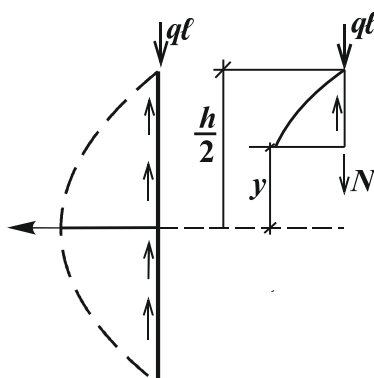


Рис. 1.15

$$N + ql - \int \frac{3ql}{2h} \left( 1 - 4 \frac{\xi^2}{h^2} \right) d\xi = 0.$$

$$N = ql \left( -\frac{1}{2} - \frac{3y}{2h} + 2 \frac{y^3}{h^3} \right).$$

Чтобы выполнялись граничные условия, необходимо принять:

$$\phi_1 = \frac{q}{2} \left( -\frac{1}{2} - \frac{3y}{2h} + 2 \frac{y^3}{h^3} \right) (x^2 - l^2).$$

Для составления граничных условий необходимо определить:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{q}{2} \left( -\frac{3}{2} \frac{1}{h} + 6 \frac{y^2}{h^3} \right) (x^2 - l^2);$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = q \left( -\frac{1}{2} - \frac{3y}{2h} + 2 \frac{y^3}{h^3} \right) x.$$

Выполним проверку граничных условий. Предварительно дадим некоторые пояснения. В основном это касается второго условия, в котором фигурирует производная  $\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = N$ . На (рис. 1.12) показаны линии нормалей  $n$ . По двум сторонам  $x = l$  и  $y = 0,5h$  их направления совпадают с осями  $x$  и  $y$ . В этом случае координаты  $n$  равны с положительным знаком  $x$  и  $y$ . По двум другим сторонам  $n$  имеет противоположное направление. Следовательно по этим сторонам  $n = -x$  или  $n = -y$ , что необходимо учитывать при составлении граничных условий.

При  $y = \frac{h}{2}$ :

$$1) \quad \phi_1 = \frac{q(l^2 - x^2)}{2};$$

$$2) \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0.$$

Полученные результаты совпадают с заданными.



При  $y = -\frac{h}{2}$ ,

$$1) \phi_1 = 0;$$

$$2) \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0.$$

Условия выполняются.

Далее рассмотрим граничные условия по сторонам  $x = 1$  и  $x = -1$ .

Тут следует:

при  $x = 1$ ,

$$1) \phi_1 = 0;$$

$$2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = ql \left( -\frac{1}{2} - \frac{3y}{2h} + 2\frac{y^3}{h^3} \right).$$

Результат соответствует условиям.

При  $x = -1$ :

$$1) \phi_1 = 0,$$

$$2) \frac{\partial \phi_1}{(-\partial x)} = q(-l) \left( -\frac{1}{2} - \frac{3y}{2h} + 2\frac{y^3}{h^3} \right).$$

Учитывая, что во втором условии левая и правая части имеют знак минус, можно на него сократить, после чего получим:

$$2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = ql \left( -\frac{1}{2} - \frac{3y}{2h} + 2\frac{y^3}{h^3} \right).$$

Полученные результаты подтверждают, что принятая функция удовлетворяет всем граничным условиям. Необходимо проверить, является ли она решением дифференциального уравнения. Для этого ее надо подставить в уравнение  $\nabla^4 \phi_1 = 0$ . От принятой функции найдем четвертые производные. Они будут равны:

$$\frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} = 0, \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial y^4} = 0, 2 \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 12 \frac{qy}{h^3}.$$

Принятая функция не удовлетворяет дифференциальное уравнение. Это говорит о необходимости изменения принятого

решения. Добавим вторую функцию  $\phi_2$ , как было указано ранее, то есть примем  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ . Функцию  $\phi_2$  попробуем взять равной:

$$\phi_2 = c_1 y^5 + c_2 y^3 + c_3 y. \quad (1.50)$$

В первую проверим будет ли удовлетворяться бигармоническое уравнение:

$$\nabla^4 \phi = \nabla^4 (\phi_1 + \phi_2) = 12 \frac{qy}{h^3} + 120c_1 y = 0.$$

Из полученного соотношения можно найти  $c_1$ , при котором уравнение будет удовлетворено, а именно:

$$c_1 = -\frac{q}{10h^3}.$$

Учтем это в функции.

$$\phi_2 = c_2 y^3 + c_3 y - \frac{q}{10h^3} y^5.$$

Константы  $c_2, c_3$  подберем так, чтобы  $\phi_2$  не влияла на граничные условия по сторонам  $y = +0,5h$  и  $y = -0,5h$ . Для этого составим уравнения:

При  $y = +0,5h$  и  $y = -0,5h$

$$1) \phi_2 = 0,$$

$$2) \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0.$$

Запишем эти условия:

$$c_2 \frac{h^3}{8} + c_3 \frac{h}{2} = \frac{qh^2}{320},$$

$$c_2 \frac{3h^2}{4} + c_3 = \frac{5qh}{160}.$$

Решая систему, найдем:

$$c_2 = \frac{q}{20h}, c_3 = -\frac{qh}{160}.$$

Вторая функция будет равна:

$$\phi_2 = -\frac{q}{10h^3} \left( y^5 - \frac{h^2}{2} y^3 + \frac{h^4}{16} y \right).$$

С учетом этих значений, получим окончательное выражение искомой функции напряжений:

$$\phi = q \left[ \left( -\frac{1}{4} - \frac{3y}{4h} + \frac{y^3}{h^5} \right) (x^2 - l^2) - \frac{1}{10h^3} \left( y^5 - \frac{h^2}{2} y^3 + \frac{h^4}{16} y \right) \right].$$

Как уже было проверено, эта функция удовлетворяет дифференциальное уравнение и граничные условия по сторонам  $y = +0,5h$  и  $y = -0,5h$ . Необходимо еще проверить условия по сторонам  $x = l$  и  $x = -l$ . Проверять необходимо только  $\phi_2$ , так как первой функцией все выполняется. Вторая функция по указанным сторонам дает нулевое значение производной  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ , т.е. выполняется одно требование.

Функция  $\phi_2$  по рассматриваемым сторонам не равна нулю, следовательно при ее учете необходимо изменить условия. Для этого найдем от нее напряжение  $\sigma_{xx}$ .

Оно равно:

$$\sigma_{xx} |_2 = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = -\frac{q}{10h^3} (20y^3 - 3h^2 y).$$

Это говорит о том, что по вертикальным сторонам должна быть приложена горизонтальная нагрузка, равная напряжению  $\sigma_{xx}$ . Следовательно условия задачи необходимо изменить, а именно, рассматривать нагрузку не такую, как показана на (рис.1.12), а на (рис.1.16).

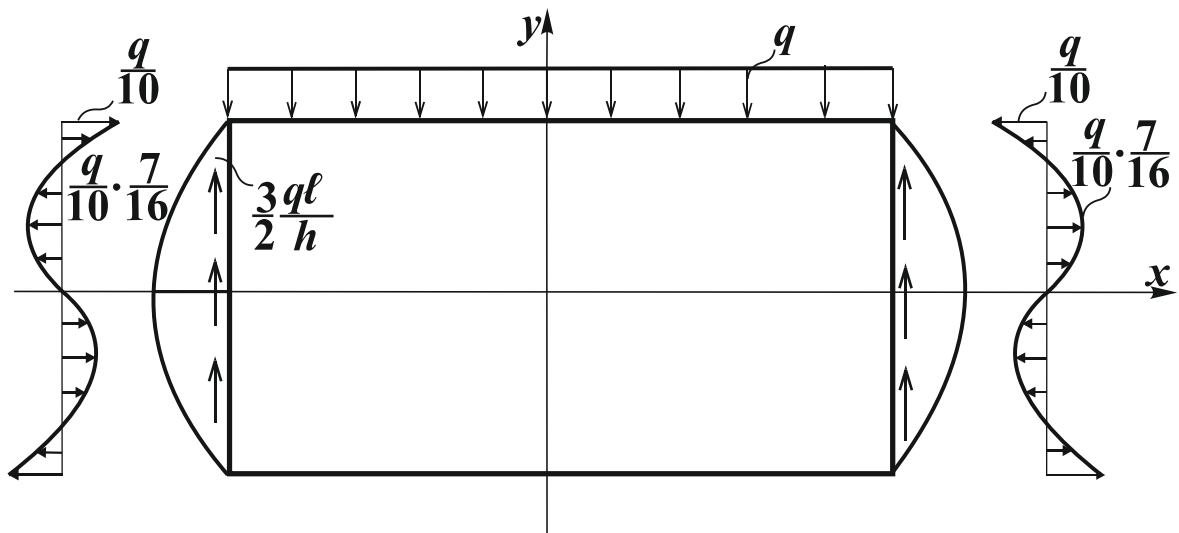


Рис. 1.16

Особенностью этой дополнительной нагрузки есть то, что ее равнодействующая равна нулю, а значит, она не меняет условий равновесия пластины. Кроме того, она имеет абсолютно одинаковые значения по всем вертикальным линиям, ее величины существенно меньше напряжений от функции  $\phi_1$ .

Имея окончательное значение разыскиваемой функции, которая соответствует дифференциальному уравнению и граничным условиям, найдем возникающие в пластине напряжения и построим их эпюры (рис. 1.17). Напряжения равны:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{q}{h^3} \left[ 6y(x^2 - l^2) - 0.1(20y^3 - 3h^2y) \right];$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{q}{2h^3} (-h^3 - 3h^2y + 4y^3);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{q}{2h^3} (3h^2 - 12y^2).$$

Построим эпюры:

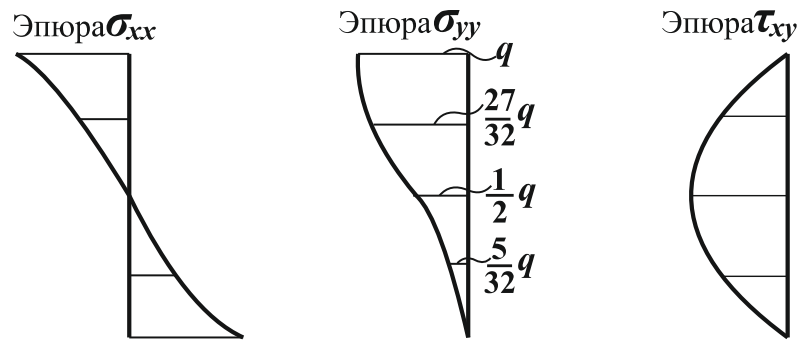


Рис. 1.17

При разных значениях  $x$ , численные значения напряжений, кроме  $\sigma_{yy}$ , будут разными, а их формы не меняются, поэтому на эпюрах  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}$  их значения не написаны.

**Пример 2.** Расчет пластины методом конечных разностей.

Условия задачи показаны на рис. 1.18. Добавим пояснения: все стороны пластины свободны, а именно, закреплений перемещений не существует. Приложенная нагрузка обеспечивает равновесие.

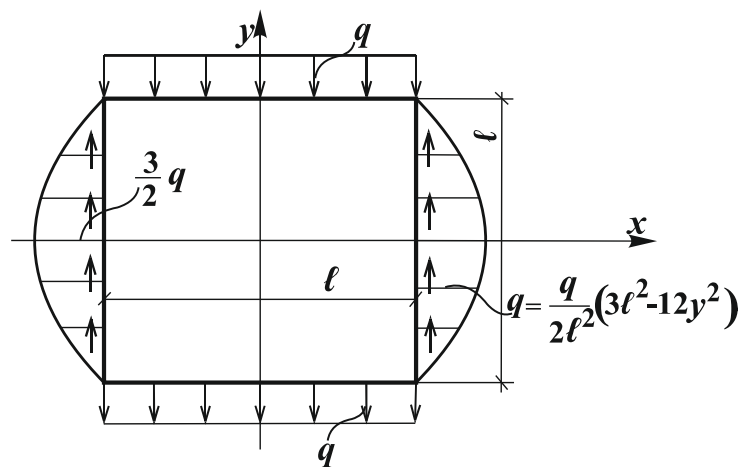


Рис. 1.18

Для решения задачи методом конечных разностей надо на схему пластины нанести сетку с шагом  $\nabla$ , примем  $\nabla = \frac{l}{7}$ . Значения неизвестных находятся в точках этой сетки (рис. 1.19).

	17	18	19	20	20	19	18	17	
21	10	11	12	13	13	12	11	10	21
22	14	1	2	3	3	2	1	14	22
23	15	4	5	6	6	5	4	15	23
24	16	7	8	9	9	8	7	16	24
-24	-16	-7	-8	-9	-9	-8	-7	-16	-24
-23	-15	-4	-5	-6	-6	-5	-4	-15	-23
-22	-14	-1	-2	-3	-3	-2	-1	-14	-22
-21	-10	-11	-12	-13	-13	-12	-11	-10	-21
	-17	-18	-19	-20	-20	-19	-18	-17	

Рис. 1.19

Номера точек поставлены с учетом симметрии. Для определения граничных условий при использовании функции напряжений, необходимо рассмотреть раму, совпадающую с контуром пластины, которая нагружена той же нагрузкой. Раму следует преобразовать в статически определимую (рис. 1.20). В этой раме необходимо построить эпюры  $M$  и  $N$  (рис. 1.21).

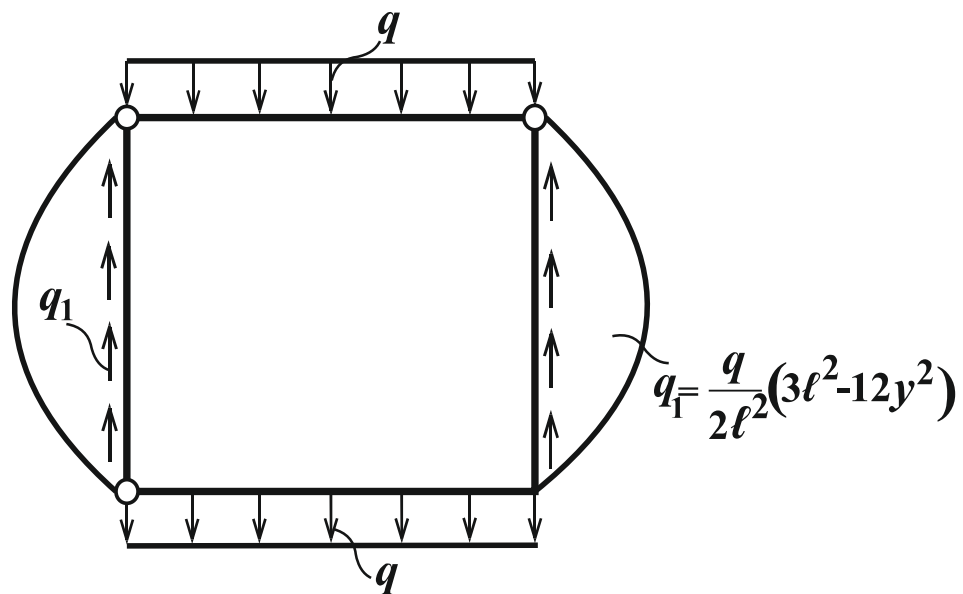


Рис. 1.20

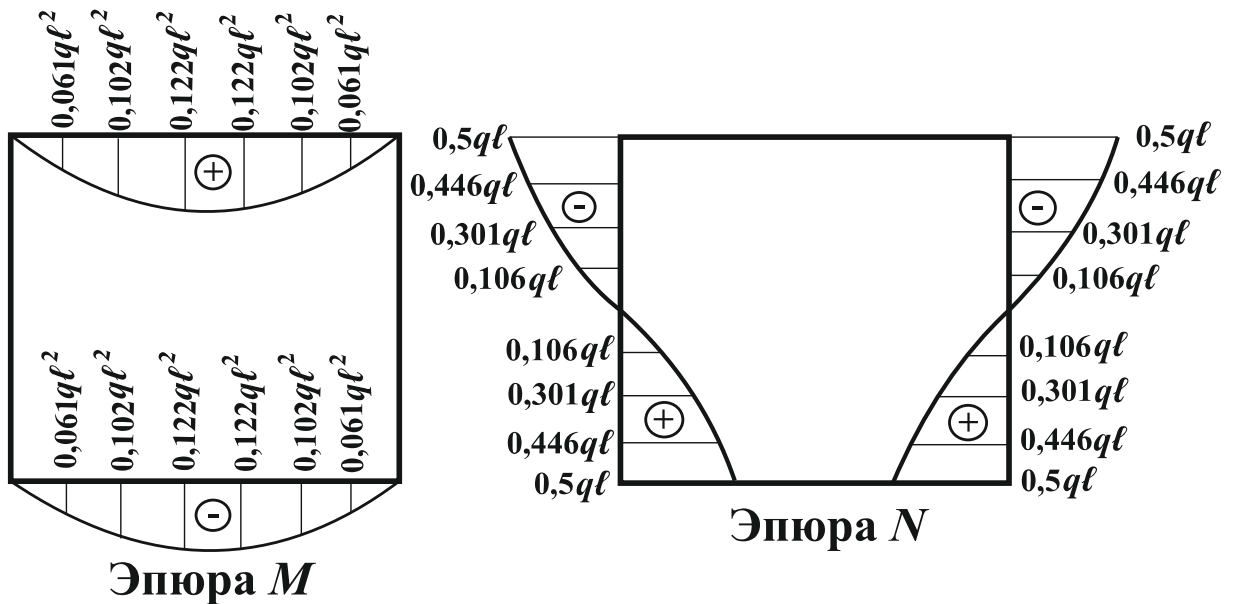


Рис. 1.21

После построения эпюр  $M$  и  $N$ , следует записать граничные условия в конечных разностях.

$$\phi_i = M_i, \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_i.$$

Учитывая симметрию, граничные условия надо записывать на каждой стороне в четырех начальных точках.

При  $y = \frac{l}{2}$ ,

$$\Delta = \frac{l}{7};$$

$$\phi_{10} = 0 \dots \phi_{11} = 0.061ql^2 \dots \phi_{12} = 0.102ql^2 \dots \phi_{13} = 0.122ql^2;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{11} = \frac{\phi_{18} - \phi_1}{2\nabla} = 0 \dots \phi_{18} = \phi_1;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{12} = \frac{\phi_{19} - \phi_2}{2\Delta} = 0 \dots \phi_{19} = \phi_2;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{13} = \frac{\phi_{20} - \phi_3}{2\Delta} = 0 \dots \phi_{20} = \phi_3.$$

При  $x = \frac{l}{2}$ ,

$$\Delta = \frac{l}{7};$$

$$\phi_{14} = \phi_{15} = \phi_{16} = 0;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{14} = \frac{\phi_{22} - \phi_1}{2\Delta} = -0.446ql \dots \phi_{22} = \phi_1 - 0.127ql;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{15} = \frac{\phi_{23} - \phi_4}{2\Delta} = -0.301ql \dots \phi_{23} = \phi_4 - 0.086ql;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{16} = \frac{\phi_{24} - \phi_7}{2\Delta} = -0.106ql \dots \phi_{24} = \phi_7 - 0.0303ql.$$

Рассмотренные граничные условия позволили определить все необходимые значения в точках на контуре пластины и на один шаг за ее контуром, после чего можно перейти к составлению всех необходимых дифференциальных уравнений методом конечных разностей во всех внутренних точках пластины.

Поясним построение эпюры  $N$  (рис. 1.22).

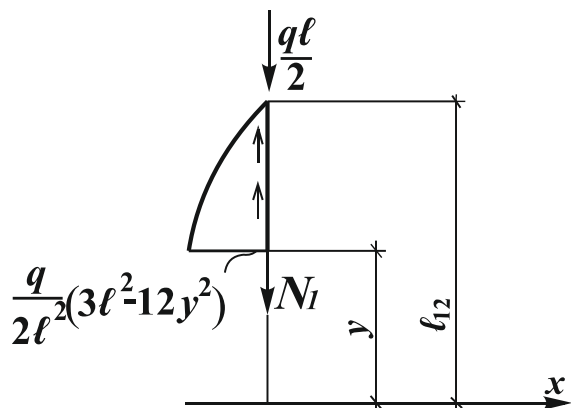


Рис. 1.22

Запишем все необходимые уравнения (рис. 1.19).

Точка 1:

$$20\phi_1 - 8(\phi_{14} + \phi_{11} + \phi_2 + \phi_4) + 2(\phi_{15} + \phi_{10} + \phi_{12} + \phi_5) + (\phi_{22} + \phi_{18} + \phi_3 + \phi_7) = 0;$$



Точка 2:

$$20\phi_2 - 8(\phi_1 + \phi_{12} + \phi_3 + \phi_5) + 2(\phi_4 + \phi_{11} + \phi_{13} + \phi_6) + (\phi_{14} + \phi_{19} + \phi_3 + \phi_8) = 0;$$

Точка 3:

$$20\phi_3 - 8(\phi_2 + \phi_{13} + \phi_3 + \phi_6) + 2(\phi_5 + \phi_{12} + \phi_{13} + \phi_6) + (\phi_1 + \phi_{20} + \phi_2 + \phi_9) = 0;$$

Точка 4:

$$20\phi_4 - 8(\phi_{15} + \phi_1 + \phi_5 + \phi_7) + 2(\phi_{16} + \phi_{14} + \phi_2 + \phi_8) + (\phi_{23} + \phi_6 + \phi_{11} + \phi_7) = 0;$$

Точка 5:

$$20\phi_5 - 8(\phi_4 + \phi_2 + \phi_6 + \phi_8) + 2(\phi_7 + \phi_1 + \phi_3 + \phi_9) + (\phi_{15} + \phi_{12} + \phi_6 - \phi_8) = 0;$$

Точка 6:

$$20\phi_6 - 8(\phi_5 + \phi_3 + \phi_6 + \phi_9) + 2(\phi_8 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_9) + (\phi_4 + \phi_5 + \phi_{13} - \phi_9) = 0;$$

Точка 7:

$$20\phi_7 - 8(\phi_{16} + \phi_4 + \phi_8 - \phi_7) + 2(-\phi_{16} + \phi_{15} + \phi_5 - \phi_8) + (\phi_{24} + \phi_1 + \phi_9 - \phi_4) = 0;$$

Точка 8:

$$20\phi_8 - 8(\phi_7 + \phi_5 + \phi_9 - \phi_8) + 2(-\phi_7 + \phi_4 + \phi_6 - \phi_9) + (\phi_{16} + \phi_2 + \phi_9 - \phi_5) = 0;$$

Точка 9:

$$20\phi_9 - 8(\phi_8 + \phi_6 + \phi_9 - \phi_9) + 2(-\phi_8 + \phi_5 + \phi_6 - \phi_9) + (\phi_7 + \phi_3 + \phi_8 - \phi_6) = 0.$$

После записи основных уравнений необходимо подставить в них значение тех величин, которые были найдены из граничных условий.

Рассмотрим это в первом уравнении:

$$20\phi_1 - 8(0 + 0.061ql^2 + \phi_2 + \phi_4) + 2(0 + 0 + 0.102ql^2 + \phi_5) + (\phi_1 - 0.127ql^2 + \phi_1 + \phi_3 + \phi_7) = 0.$$

Следует сделать все необходимые преобразования, после чего получим окончательное уравнение:

$$22\phi_1 - 8\phi_2 + \phi_3 - 8\phi_4 + 2\phi_5 + \phi_7 - 0.411ql^2 = 0.$$

Аналогично преобразовываем остальные уравнения:

$$22\phi_1 - 8\phi_2 + \phi_3 - 8\phi_4 + 2\phi_5 + \phi_7 - 0.411ql^2 = 0;$$

$$-8\phi_1 + 21\phi_2 - 7\phi_3 + 2\phi_4 - 8\phi_5 + 2\phi_6 + \phi_8 - 0.45ql^2 = 0;$$

$$\phi_1 - 7\phi_2 + 13\phi_3 + 2\phi_5 - 6\phi_6 + \phi_9 - 0.528ql^2 = 0;$$

$$-8\phi_1 + 2\phi_2 + 21\phi_4 - 8\phi_5 + \phi_6 - 9\phi_7 + 2\phi_8 - 0.025ql^2 = 0;$$

$$2\phi_1 - 8\phi_2 + 2\phi_3 - 8\phi_4 + 20\phi_5 - 7\phi_6 + 2\phi_7 - 9\phi_8 + 2\phi_9 + 0.102ql^2 = 0;$$

$$2\phi_2 - 6\phi_3 + \phi_4 - 7\phi_5 + 12\phi_6 + 2\phi_8 - 7\phi_9 + 0.122ql^2 = 0;$$

$$\phi_1 - 9\phi_4 + 2\phi_5 + 29\phi_7 - 10\phi_8 + \phi_9 - 0.0303ql^2 = 0;$$

$$\phi_2 + 2\phi_4 - 9\phi_5 + 2\phi_6 - 10\phi_7 + 28\phi_8 - 9\phi_9 = 0;$$

$$\phi_3 + 2\phi_5 - 7\phi_6 + \phi_7 - 9\phi_8 + 18\phi_9 = 0.$$

Получили систему девяти уравнений, в которую вошли девять неизвестных, таким образом система может быть решена.

Решая систему, определяем значения функции напряжений в девяти точках:

$$\phi_1 = 0.0527ql^2, \phi_2 = 0.0876ql^2, \phi_3 = 0.105ql^2, \phi_4 = 0.0349ql^2, \phi_5 = 0.0577ql^2; \\ \phi_6 = 0.0691ql^2, \phi_7 = 0.0122ql^2, \phi_8 = 0.0201ql^2, \phi_9 = 0.0240ql^2.$$

Используя граничные условия, найдем значения  $\phi_i$  в точках за контуром:

$$\phi_{17} = 0.0, \phi_{18} = 0.0527ql^2, \phi_{19} = 0.0876ql^2, \phi_{20} = 0.105ql^2.$$

$$\phi_{21} = -0.0819ql^2, \phi_{22} = -0.0743ql^2, \phi_{23} = -0.0511ql^2, \phi_{24} = -0.0181ql^2.$$

Применяя формулы (1.32) и (1.48), определим напряжения и построим их эпюры. Запишем подробно выражения эпюр в точке (1).

Отметим, что  $\Delta^2 = \frac{l^2}{49}$ .

$$\sigma_{xx}|_1 = \frac{\phi_{11} - 2\phi_1 + \phi_4}{\Delta^2} = \frac{(0.061 - 2 * 0.0527 + 0.0349) ql^2 * 49}{l^2} = -0.465q;$$

$$\sigma_{yy}|_1 = \frac{\phi_2 - 2\phi_1 + \phi_{14}}{\Delta^2} = \frac{(0.0876 - 2 * 0.0527 + 0.0) ql^2 * 49}{l^2} = -0.872q;$$

$$\tau_{xy}|_1 = -\frac{(\phi_{12} + \phi_{15}) - (\phi_{10} + \phi_5)}{4\Delta^2}.$$

$$\tau_{xy}|_1 = -\frac{[(0 + 0.0571) - (0.102 + 0)] ql^2 * 49}{4l^2} = -0.550q.$$

Подобным образом можно найти напряжения в других точках, после чего построить эпюры.

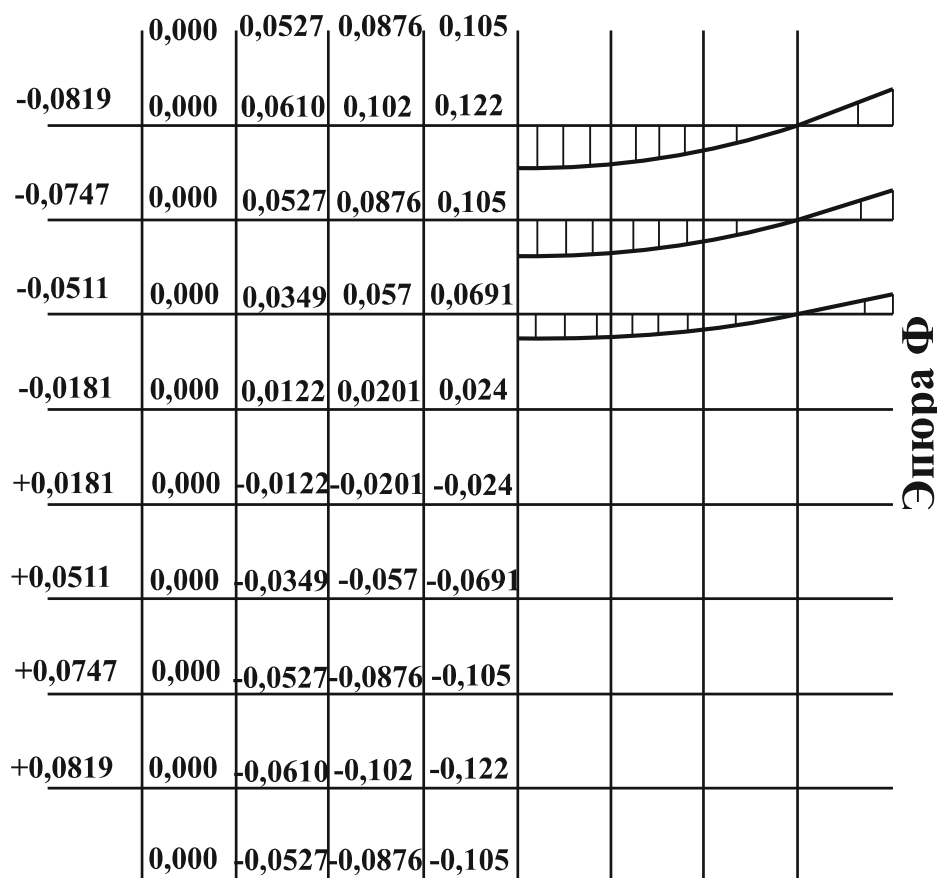


Рис. 1.23

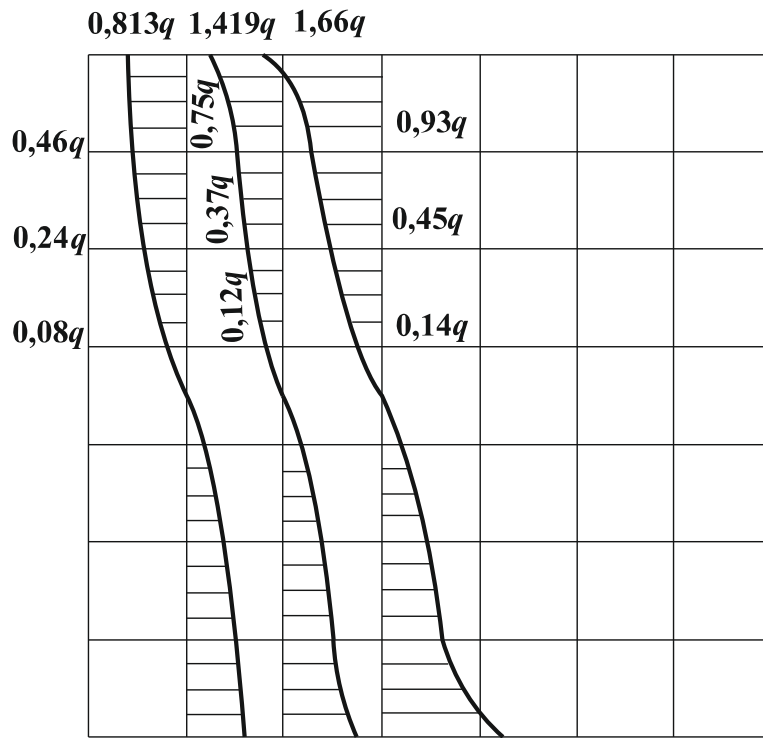


Рис. 1.24

### Эпюра $\sigma_{yy}$

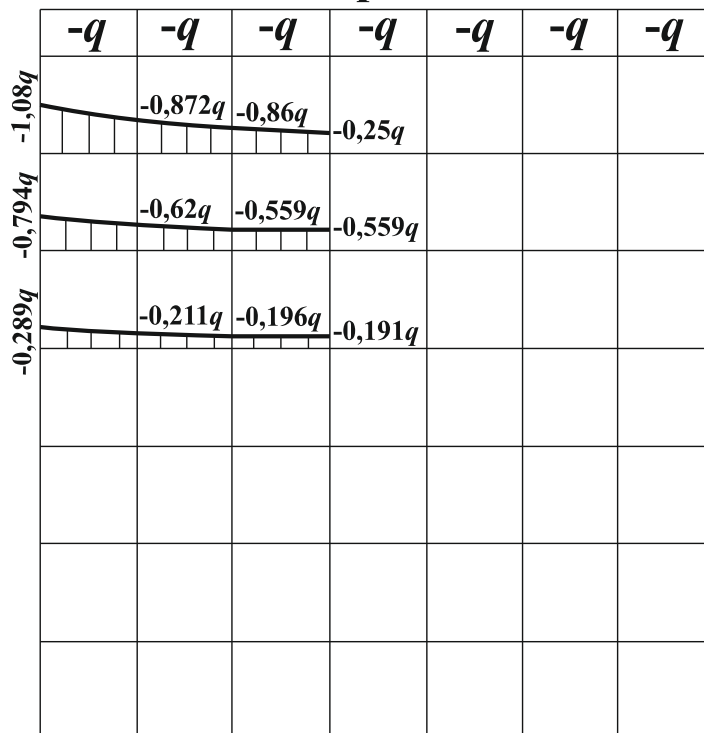


Рис.1.25

### Эпюра $\tau_{xy}$

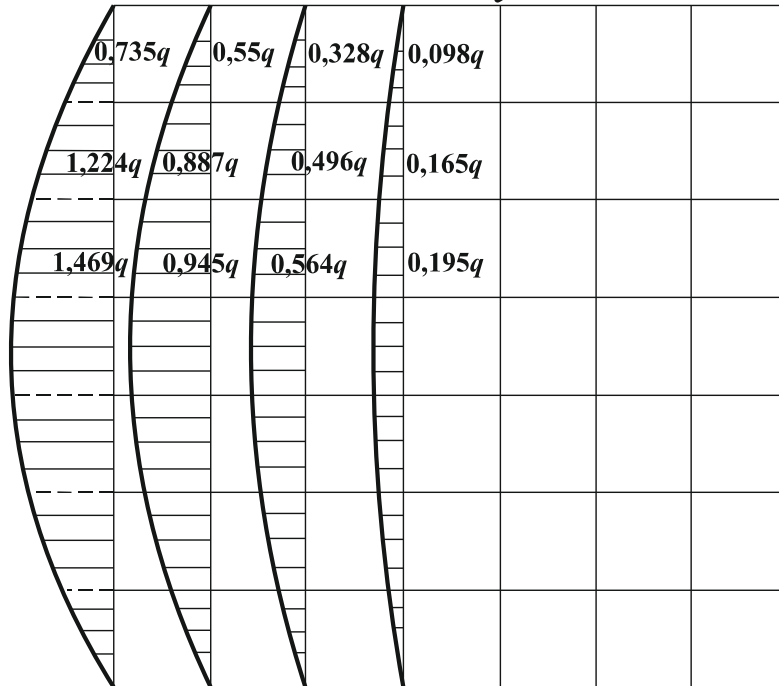


Рис. 1.26

Для проверки правильности решения рассмотрим равновесие части пластины (рис.1.27). Спроектируем все действующие на рассматриваемую часть пластины силы на ось  $Y$  и возьмем момент относительно нижней левой точки.

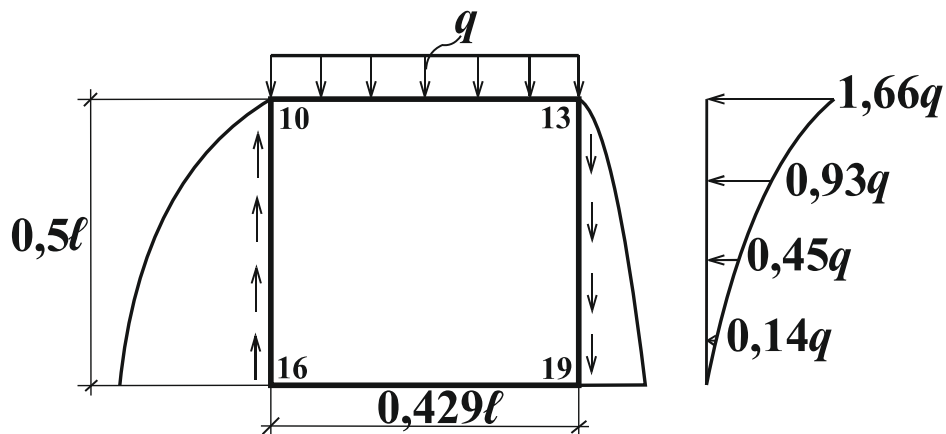


Рис. 1.27

$$\sum Y = 0.$$

$$-q \cdot 0,429 \cdot 1 - 0,21q \cdot 0,5 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1,5q \cdot 0,5 \cdot 1 = 0.$$

$$\sum M = 0.$$

$$0,429 \cdot q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,429 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,21 \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot 1 \cdot 0,429 \cdot 1 - 0,93 \cdot \frac{1}{7} \cdot q \cdot 1 \cdot \frac{3}{7} \cdot 1 -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 0,79 \cdot \frac{1}{7} \cdot q \cdot 1 \cdot \left( \frac{5}{14} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{14} \right) \cdot 1 + 0,45 \cdot \frac{1}{7} \cdot q \cdot 1 \cdot \frac{2}{7} \cdot 1 -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 0,48 \cdot \frac{1}{7} \cdot q \cdot 1 \cdot \left( \frac{3}{14} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{14} \right) \cdot 1 - 0,14 \cdot \frac{1}{7} \cdot q \cdot 1 \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 0,31 \cdot \frac{1}{7} \cdot q \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{14} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{14} \right) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,14 \cdot \frac{1}{14} \cdot q \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 0.$$

Уравнения равновесия рассматриваемой части пластины выполняются.

### Лекция 7. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Известно, что пластины в различных конструкциях имеют разные формы. В зависимости от формы следует использовать соответствующую методику расчета, основанную на разных системах координат. Целесообразно, чтобы грани пластины совпадали с линиями координат. В предыдущих параграфах рассматривались прямоугольные пластины и были использованы прямоугольные координаты. Сейчас рассмотрим решение в полярных координатах. На рис.1.28 изображена полярная система координат.

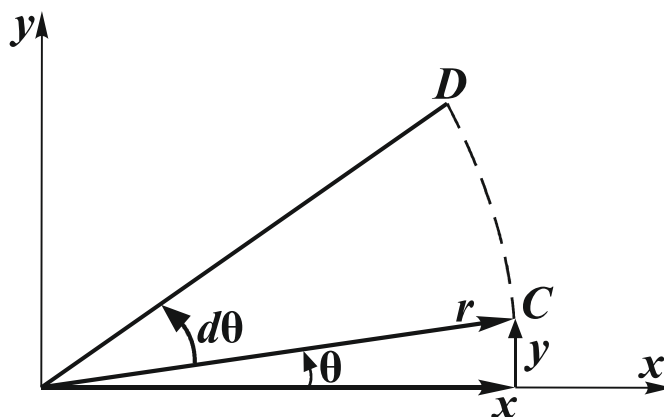


Рис.1.28

Отметим, что одна координатная ось является радиусом, а вторая совпадает с окружностью. Ее величина измеряется углом поворота прямолинейной координаты. Полярные координаты имеют обозначения  $r, \theta$ . Произвольная точка  $C$  в полярных координатах определяется радиусом  $r$  и углом поворота  $\theta$ .

Составим уравнения равновесия элемента пластины в полярных координатах. Для этого рассмотрим этот элемент на рис. 1.29. Там показаны все напряжения, которые возникают на гранях элемента пластины.

Запишем проекцию напряжений на ось  $r$ , которая находится под углом  $\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$ :

$$-\sigma_{rr}rd\theta + \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta - \tau_{r\theta}dr + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta\right)dr - \sigma_{\theta\theta}dr\frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta\right)dr\frac{d\theta}{2} = 0.$$

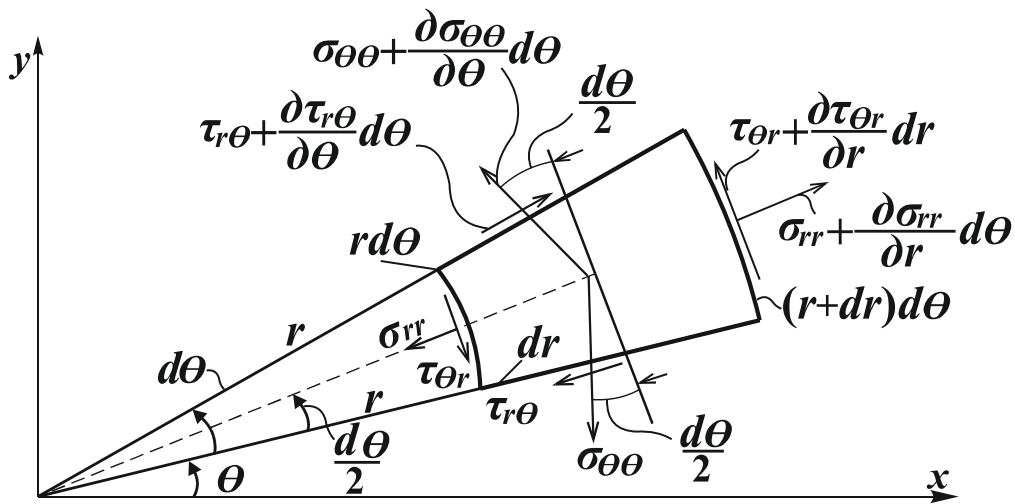


Рис.1.29

Устраняя члены высшего порядка малости, получим:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0.$$

Составим проекцию на ось перпендикулярную оси  $r$ .

$$-\sigma_{\theta\theta}dr + \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta \right)dr - \tau_{\theta r}rd\theta + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r}dr \right)(r + dr)d\theta + \tau_{r\theta}dr\frac{d\theta}{2} + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta \right)dr\frac{d\theta}{2} = 0.$$

Выполняя преобразования и учитывая предыдущее уравнение, получим два условия равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Используя рис. 1.28 запишем зависимости между полярными и прямоугольными координатами и их производными:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \theta, \\ y &= r \cdot \sin \theta, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \cdot \sin \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cdot \cos \theta, \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.52)$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{r} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} \cos \theta.$$

Установим зависимости между напряжениями в полярных и прямоугольных координатах. Для этого используем методику, связанную с поворотом координатных осей.

Рассмотрим два элемента пластины (рис. 1.30).

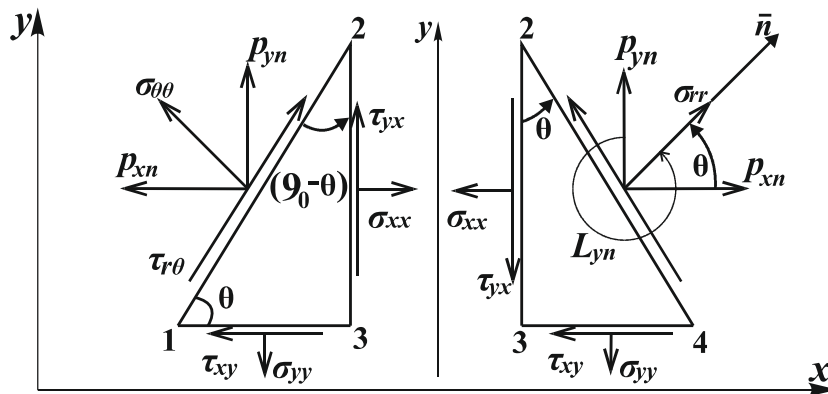


Рис. 1.30

Стороны этих элементов 1 - 3, 3 - 2, 3 - 4 совпадают с прямоугольными координатами, а линии 1 - 2 и 2 - 4 взаимно перпендикулярны и совпадают с радиусом и касательной к круговой координате в полярных координатах. Соответствующие напряжения по всем сторонам элементов показаны на рисунке. Выполним необходимые преобразования, используя правый элемент.

В первую очередь по известным формулам запишем соотношения между:

$$P_{xn}, P_{yn} \text{ и } \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy};$$

$$P_{xn} = \sigma_{xx} \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y;$$

$$P_{yn} = \tau_{yx} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y,$$

где  $n_x, n_y$  - направляющие косинусы нормали к линии 2 - 4. Эта нормаль совпадает с  $\sigma_{rr}$ . Далее, проектируя  $P_{xn}$  и  $P_{yn}$  на линии  $\sigma_{rr}$  и  $\tau_{\theta r}$ , найдем значения этих напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= P_{xn} \cdot n_x + P_{yn} \cdot n_y; \\ \tau_{r\theta} &= P_{xn} \cdot n_{y1} + P_{yn} \cdot n_{x1}.\end{aligned}$$

Учитывая значения  $P_{xn}$  и  $P_{yn}$ , получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y)n_x + (\tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y)n_y; \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y)n_{y1} + (\tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y)n_{x1}.\end{aligned}$$

Выразим  $n_x, n_y$  через угол  $\theta$ . При определении необходимых углов следует измерять их за счет поворота осей  $x$  и  $y$  против часовой стрелки до  $\sigma_{rr}$  и  $\tau_{\theta r}$ . Угол между  $P_{yn}$ , которая параллельна оси  $y$ , и  $\sigma_{rr}$ , показан на рис.1.30. Он равен  $(270 + \theta)$ , а  $\cos$  этого угла равен  $\sin \theta$ , т.е. в данном случае  $n_x = \cos \theta$ ,  $n_y = \sin \theta$ ,  $n_{x1} = \cos \theta$ ,  $n_{y1} = \sin \theta$ . Учитывая это в выражениях  $\sigma_{rr}$  и  $\tau_{\theta r}$ , получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + 2\tau_{xy}n_xn_y; \\ \tau_{r\theta} &= \sigma_{xx}n_xn_{y1} + \tau_{xy}n_yn_{y1} + \tau_{yx}n_xn_{x1} + \sigma_{yy}n_yn_{x1}.\end{aligned}$$

Аналогично, используя левый рисунок, можно определить  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\tau_{\theta r}$ , которое равно  $\tau_{r\theta}$ . Подставляя значения направляющих косинусов, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Подобным образом можно выразить прямоугольные напряжения через полярные. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta.\end{aligned} \tag{1.54}$$

При решении плоской задачи в полярных координатах могут потребоваться, кроме напряжений, перемещения и деформации. Запишем необходимые соотношения в готовом виде.

Имеет место два перемещения  $U_r$  и  $U_\theta$ , через которые выражаются две линейные и одна угловая деформации.

Запишем соотношения между деформациями и напряжениями, используя закон Гука.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \mu\sigma_{\theta\theta}), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{E}2(1 + \mu)\tau_{r\theta}.\end{aligned}\tag{1.55}$$

Обратное соотношение:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_{rr} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2}(\mu\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1 - \mu}{2} \gamma_{r\theta}.\end{aligned}\tag{1.56}$$

В полярных координатах может быть использована функция напряжений  $\phi$ , которая является функцией координат  $r$  и  $\theta$ .

Преобразуем дифференциальное уравнение функции напряжений в прямоугольных координатах в дифференциальное уравнение в полярных координатах. В прямоугольных координатах оно имеет вид:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right).$$

Известны соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}.\end{aligned}\tag{1.110}$$

Учитывая зависимости (1.52), найдем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r} \sin \theta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r} \cos \theta.\end{aligned}$$

Далее определяем вторые производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y}.\end{aligned}$$

Подставим значение производных  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \right) \cos \theta + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \right) \left( -\frac{1}{2} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta - \\ &- \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{1}{r} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{1}{r} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta - \\ &- 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

Выполняя аналогичные преобразования при определении  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ ,

получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{1}{r} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

Находим сумму двух вторых производных:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \cos^2 \theta.$$

Бигармоничное уравнение функции  $\phi$  в полярных координатах будет иметь вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (1.57)$$

Целесообразно пользоваться бигармоническим уравнением именно в такой форме.

Для определения напряжений в полярных координатах через функцию напряжений необходимо воспользоваться формулами (1.53). Необходимо в них подставить соотношения между напряжениями и функцией напряжений в прямоугольных координатах (1.25).

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sin^2 \theta - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \sin 2\theta - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cos 2\theta.\end{aligned} \quad (1.58)$$

В этих выражениях функции  $\phi(x; y)$  нужно заменить на  $\phi(r, \theta)$ . Следует выразить производные по  $x$  и  $y$  через производные по  $r$  и  $\theta$ . Покажем эти преобразования. Подробно рассмотрим

преобразование одной производной  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$ . Преобразование остальных

аналогично:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right).$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

В это выражение следует подставить производные  $\frac{\partial r}{\partial y}$  и  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ ,

используя формулы (1.52):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \right) \sin \theta + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \right) \frac{1}{r} \cos \theta. \end{aligned}$$

Далее необходимо найти производные в круглых скобках:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \cos \theta \right) \sin \theta + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \right) \frac{1}{r} \cos \theta. \end{aligned}$$

Затем простые преобразования:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta + \\ &+ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{1}{r} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Как было сказано, аналогично найдем остальные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \sin^2 \theta + \\ &+ 2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \cos \theta; \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta \cos \theta - \\ &- \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

Далее, найденные производные, подставляем в формулы (1.58) и после преобразований найдем достаточно простые выражения напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (1.59)$$

Рассмотрим вариант, использованный в качестве основных неизвестных функций перемещений в полярных координатах  $U_r(r, \theta)$  и  $U_\theta(r, \theta)$ . В первую очередь установим зависимость между перемещениями в декартовых координатах и полярных. Рассмотрим произвольную точку  $m$ , которая в прямоугольных координатах определяется координатами  $U_x$  и  $U_y$ , и в полярных  $U_r$  и  $U_\theta$  (рис. 1.31)

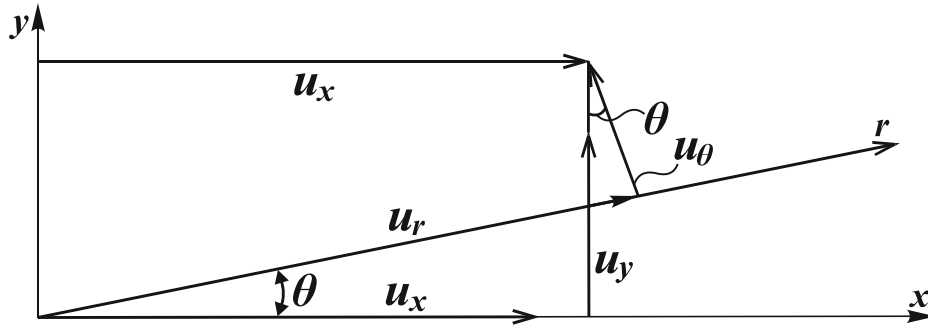


Рис. 1.31

Установить зависимости между перемещениями  $U_x$ ,  $U_y$  и  $U_r$ ,  $U_\theta$ , используя рис. 1.31, достаточно просто.

$$\begin{aligned} U_x &= U_r \cdot \cos \theta - U_\theta \cdot \sin \theta; \\ U_y &= U_r \cdot \sin \theta + U_\theta \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Из этих соотношений можно найти зависимости  $U_r$  и  $U_\theta$  от  $U_x$  и  $U_y$ .

$$\begin{aligned} U_r &= U_x \cdot \cos \theta - U_y \cdot \sin \theta; \\ U_\theta &= -U_x \cdot \sin \theta + U_y \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Выразим деформации в полярных координатах через перемещения. Преобразования начнем с использования формул (1.55), в которых учтем зависимости (1.53):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. \left[ -\mu \left( \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \right) \right] \right]; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. \left[ -\mu \left( \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \right) \right] \right]; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \left[ \left( \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \right) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \left( \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \right]. \end{aligned}$$



Далее вместо напряжений подставляем их выражения в деформациях:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} \cos^2 \theta + \frac{\partial U_y}{\partial y} \sin^2 \theta + \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta \right]; \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} \cos^2 \theta + \frac{\partial U_y}{\partial y} \sin^2 \theta + \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta \right]; \\
 \gamma_{r\theta} &= \left[ 2 \left( \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta + \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right].
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

Дальнейшие преобразования связаны с заменой перемещений в декартовых координатах на перемещения в полярных координатах, используя формулу (1.42), после чего производные по  $x$  и  $y$  преобразуем по  $r$  и  $\theta$ .

Это выполняется на основании следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial x} &= \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\
 \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial y} &= \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

Производные  $r$  и  $\theta$  по  $x$  и  $y$  приведены в формулах (1.52).

Подробные преобразования выполнили для деформации  $\gamma_{r\theta}$ , остальные имеют такой же характер.

Заменим, как было сказано, перемещения  $U_x$  и  $U_y$  на  $U_r$  и  $U_\theta$ , используя формулу (1.60):

$$\begin{aligned}
 \gamma_{r\theta} &= -2 \frac{\partial}{\partial x} (U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta) \sin \theta \cos \theta + \\
 &+ 2 \frac{\partial}{\partial y} (U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta) \sin \theta \cos \theta + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x} (U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} (U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
 \end{aligned}$$

Далее производные по  $x$  и  $y$  преобразуем в производные по  $r$  и  $\theta$ , по формулам (1.45):

$$\begin{aligned}
\gamma_{r\theta} = & -2 \frac{\partial}{\partial r} (U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta \cos \theta - \\
& -2 \frac{\partial}{\partial \theta} (U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta \cos \theta + \\
& +2 \frac{\partial}{\partial r} (U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta) \frac{\partial r}{\partial y} \sin \theta \cos \theta + \\
& +2 \frac{\partial}{\partial \theta} (U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \cos \theta + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} (U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta) \frac{\partial r}{\partial x} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \theta} (U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} (U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \theta} (U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
\end{aligned}$$

Выполняя необходимые действия, получим:

$$\begin{aligned}
\gamma_{r\theta} = & -2 \left( \frac{\partial U_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \sin \theta \right) \cos \theta \sin \theta \cos \theta - \\
& -2 \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \cos \theta - U_r \sin \theta - \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \sin \theta - U_\theta \cos \theta \right) \left( -\frac{1}{r} \sin \theta \right) \\
& \sin \theta \cos \theta + 2 \left( \frac{\partial U_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \cos \theta \right) \sin \theta \sin \theta \cos \theta + \\
& +2 \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \sin \theta + U_r \cos \theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \cos \theta - U_\theta \sin \theta \right) \left( \frac{1}{r} \cos \theta \right) \\
& \sin \theta \cos \theta + \left( \frac{\partial U_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \cos \theta \right) \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \sin \theta + U_r \cos \theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - U_\theta \sin \theta \right) \left( -\frac{1}{r} \sin \theta \right) \\
& \left( \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) + \left( \frac{\partial U_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \sin \theta \right). \\
& \sin \theta \left( \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) + \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \cos \theta - U_r \sin \theta - \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \sin \theta - U_\theta \cos \theta \right) \\
& \left( \frac{1}{r} \cos \theta \right) \left( \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right).
\end{aligned}$$

После преобразований, связанных с тригонометрическими функциями, получим:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta.$$

В результате подобных действий с другими значениями деформаций, получим:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}; \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right); \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Используя зависимости (1.38), выразим напряжения через перемещения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial U_r}{\partial r} + \mu \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) \right]; \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \mu \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) \right]; \\
\tau_{r\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta \right].
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Далее составим дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях. Для этого в (1.51) подставим зависимости (1.65):

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial U_r}{\partial r} + \mu \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\
& \left. \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial U_r}{\partial r} + \mu \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) - \mu \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) \right] \right\} = 0, \\
& \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta \right] + \right. \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \mu \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) \right] + \\
& \left. \frac{1-\mu}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta \right] \right\} = 0.
\end{aligned}$$

После выполнения преобразований получим:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] U_r + \\
& \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1+\mu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{3-\mu}{2} \frac{1}{r^2} \right] U_\theta = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1+\mu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3-\mu}{2} \frac{1}{r^2} \right] U_r + \\
& + \frac{1-\mu}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{1-\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] U_\theta = 0. \tag{1.66}
\end{aligned}$$

### Лекция 8, 9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В рассмотренных примерах решения будут выполняться с использованием в качестве неизвестных функции напряжений и перемещений. Начнем с решения через функцию напряжений. Применяемая методика основана на принятии определенных соотношений между функциями, зависящими от разных координат  $r$  и  $\theta$ . Рассмотрим три варианта:

1.  $\phi(r, \theta) = \varphi(r)_1 + C_0 \cdot \theta.$
2.  $\phi(r, \theta) = \varphi_1(r) \cos \theta + \varphi_2(r) \sin \theta.$  (1.67)
3.  $\phi(r, \theta) = r^k \cdot \varphi(\theta).$

Функции, обозначенные буквой  $\phi$ , являются неизвестными. В третьем варианте показатель степени «к» может быть произвольным. Начнем с первого варианта.

Подставим функцию в дифференциальное уравнение (1.57). Учитывая, что  $\varphi(r)$  не зависит от  $\theta$ , получим:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты, поэтому введем новую переменную:

$$\begin{aligned} t &= \ln r; \\ r &= e^t; \\ \frac{dt}{dr} &= \frac{1}{r} = e^{-t}. \end{aligned}$$

От новой переменной найдем производные, используя известные правила:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} &= \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = e^{-t} \frac{d}{dt}; \\ \frac{d^2}{dr^2} &= e^{-2t} \left( \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right). \end{aligned}$$

Учитывая приведённые соотношения в дифференциальном уравнении, найдем:

$$\left[ e^{-2t} \left( \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right) + e^{-t} \left( e^{-t} \frac{d}{dt} \right) \right] \cdot \left[ e^{-2t} \left( \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt} \right) + e^{-t} \left( e^{-t} \frac{d\varphi}{dt} \right) \right] = 0.$$

После несложных преобразований, получим:

$$\left[ e^{-2t} \frac{d^2}{dt^2} \right] \cdot \left[ e^{-t} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] = 0.$$

Дифференцируя выражение во вторых скобках будем иметь:

$$e^{-4t} \left[ \frac{d^4 \varphi}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] = 0.$$

Сокращая на множитель  $e^{-4t}$ , получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = 0;$$

$$k^2 (k^2 - 4k + 4) = 0;$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0;$$

$$k_{1,2} = 0.$$

$$k_{3,4} = 2.$$

Найденным значениям  $k_{1,2,3,4}$  соответствуют функции  $e^{0t}$ ,  $t \cdot e^{0t}$ ,  $e^{2t}$ ,  $t \cdot e^{2t}$ .

Заменяя переменные  $t$  на переменные  $r$ , найдем общее решение:

$$\varphi(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + C_0 \theta.$$

Используя формулы (1.59), найдем напряжения:

$$\sigma_{rr} = C_2 \frac{1}{r^2} + 2C_3 + C_4 (2 \ln r + 1);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -C_2 \frac{1}{r^2} + 2C_3 + C_4 (2 \ln r + 3);$$

$$\tau_{r\theta} = C_0 \frac{1}{r^2}.$$

Как видно, константа  $C_1$  не влияет на напряжения, поэтому ее можно просто откинуть. Для определения остальных констант рассмотрим конкретную пластину и запишем для нее граничные условия (рис. 1.32).

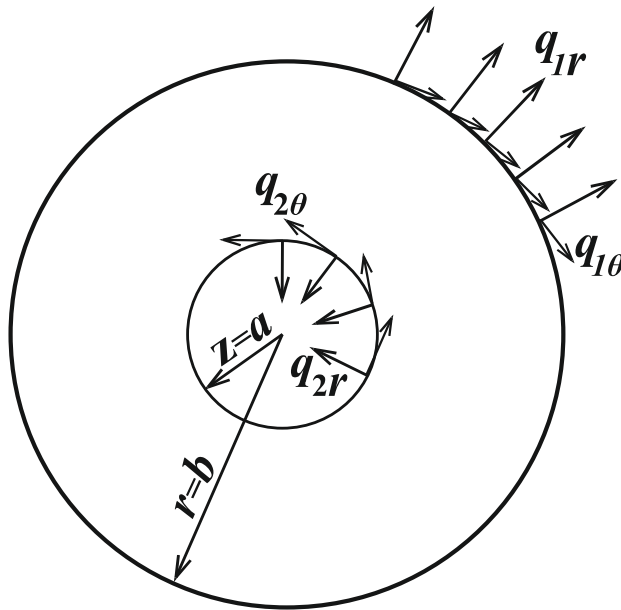


Рис. 1.32

К пластина приложены на внешнем и внутреннем контуре нагрузки, равномерно распределенные в направлении радиусов и касательных к контуру. Нагрузки  $q_{1r}$  и  $q_{2r}$  между собой не связаны. Каждая из них уравнивает саму себя. Касательные нагрузки должны иметь определенные соотношения, а именно - их моменты относительно центра круга должны быть одинаковы. Запишем равенство:

$$q_{1\theta} \cdot 2\pi \cdot b \cdot b = q_{2\theta} \cdot 2\pi \cdot a \cdot a.$$

Отсюда находим:

$$q_{2\theta} = q_{1\theta} \frac{b^2}{a^2}.$$

Граничные условия на контурах пластины имеют следующий вид:

- при  $r = b$ ,

$$\sigma_{rr} = q_{1r},$$

$$\tau_{r\theta} = -q_{1\theta};$$

- при  $r = a$ ,

$$\sigma_{rr} = q_{2r},$$

$$\tau_{r\theta} = -q_{2\theta} = -q_{1\theta} \frac{b^2}{a^2}.$$

Отметим еще одно очень важное обстоятельство. Член, связанный с константой  $C_4$ , дает неоднозначные значения перемещения  $U_\theta$ , поэтому его следует принять равным нулю. Учитывая это, запишем граничные условия, используя выражения для напряжений:

$$1) C_2 \frac{1}{b^2} + 2C_3 = q_{1r};$$

$$2) C_0 \frac{1}{b^2} = -q_{1\theta};$$

$$3) C_2 \frac{1}{a^2} + 2C_3 = q_{2r};$$

$$4) C_0 \frac{1}{a^2} = -q_{2\theta} = -q_{1\theta} \frac{b^2}{a^2}.$$

Граничные условия 2) и 4) полностью совпадают, поэтому находим:

$$C_0 = -q_{1\theta} \cdot b^2.$$

Из 1) и 3) условий получим:

$$C_2 = \frac{q_{2r} - q_{1r}}{(b^2 - a^2)} a^2 b^2;$$

$$C_3 = \frac{q_{1r} \cdot b^2 - q_{2r} \cdot a^2}{2(b^2 - a^2)}.$$

Подставив значения найденных констант в формулы напряжений, можно найти их значение в любой точке, т.е. построить их эпюры.

Рассмотрим подобную пластину, которая отличается тем, что по внутреннему контуру нет нагрузки, а есть жесткое закрепление, т.е. там заданы перемещения, поэтому задачу следует решить в перемещениях. Схема пластины на рис. 1.33. На внешнем контуре приложена такая же нагрузка.



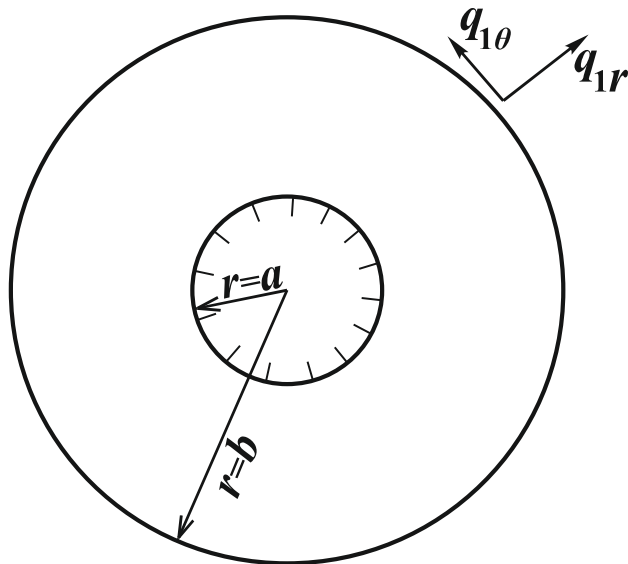


Рис 1.33

В качестве неизвестных принимаем перемещения  $U_r$  и  $U_\theta$ . При этом, учитывая симметрию пластины, примем  $U_r(r)$  и  $U_\theta(r)$ , как функции, зависящие от  $r$ . Используем уравнения (1.48). Учтем характер неизвестных, т.е. их зависимости от координат  $r$  и  $\theta$ , в результате получим:

$$\frac{\partial^2 U_r(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r(r) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U_\theta(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_\theta(r) = 0.$$

Как и в предыдущей задаче, введем новую переменную  $t$ :

$$t = \ln r;$$

$$r = e^t;$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{r} = e^{-t}.$$

Учитывая это, получим:

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} = e^{-t} \frac{\partial U_r}{\partial t};$$

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} = e^{-2t} \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} - e^{-2t} \frac{\partial U_r}{\partial t}.$$

Учитывая это в уравнениях, получим:

$$e^{-2t} \left[ \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} - \frac{dU_r}{dt} + \frac{dU_r}{dt} - U_r \right] = 0;$$

$$e^{-2t} \left[ \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2} - \frac{dU_\theta}{dt} + \frac{dU_\theta}{dt} - U_\theta \right] = 0.$$

Окончательно найдем:

$$\frac{d^2 U_r}{dt^2} - U_r = 0;$$

$$\frac{d^2 U_\theta}{dt^2} - U_\theta = 0;$$

$$U_r = C_1 e^t + C_2 e^{-t};$$

$$U_\theta = C_3 e^t + C_4 e^{-t}.$$

Заменяв  $t$  на  $r$ , получим:

$$U_r = C_1 r + C_2 \frac{1}{r};$$

$$U_\theta = C_3 r + C_4 \frac{1}{r}.$$

По формулам (1.47) запишем напряжения:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu) C_1 - (1-\mu) C_2 \frac{1}{r^2} \right];$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu) C_1 - (1-\mu) C_2 \frac{1}{r^2} \right];$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ -\frac{2}{r^2} C_4 \right].$$

Запишем граничные условия:

$$r = b; \sigma_{rr} = q_{1r}; \tau_{r\theta} = q_{1\theta};$$

$$r = a; U_r = 0; U_\theta = 0.$$

Учитывая выражения перемещений и напряжений, получим:

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)C_1 - (1-\mu)C_2 \frac{1}{b^2} \right] = q_{1r};$$

$$C_1 a + C_2 \frac{1}{a} = 0;$$

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \left[ -\frac{2}{b^2} C_4 \right] = q_{1\theta};$$

$$C_3 a + C_4 \frac{1}{a} = 0.$$

Решив уравнения, получим:

$$C_1 = \frac{b^2 q_{1r}}{\left[ (1+\mu)b^2 + (1-\mu)a^2 \right]} \frac{1-\mu^2}{E};$$

$$C_2 = -\frac{a^2 b^2 q_{1r}}{\left[ (1+\mu)b^2 + (1-\mu)a^2 \right]} \frac{1-\mu^2}{E};$$

$$C_3 = \frac{(1+\mu)b^2 q_{1\theta}}{E a^2};$$

$$C_4 = -\frac{(1+\mu)b^2 q_{1\theta}}{E}.$$

Учитывая значения констант в формулах напряжений и перемещений, можно найти их значения в любой точке пластины.

Перейдем к решению следующей задачи, используя вторую формулу (1.49). Ее немного изменим, а именно, добавим члены такого вида  $C_0 r \theta \sin \theta$  и  $\bar{C}_0 r \theta \cos \theta$ . Функции будут иметь вид:

$$\varphi(r, \theta) = \left[ \varphi_1(r) \cos \theta + C_0 r \theta \sin \theta \right] + \left[ \varphi_2(r) \sin \theta + \bar{C}_0 r \theta \cos \theta \right],$$

где  $C_0$  и  $\bar{C}_0$  – являются константами.

Прежде всего отметим, что члены с этими константами являются решениями бигармонического уравнения. Выполнить подобные преобразования несложно, поэтому делать этого не будем. Просто это

надо иметь в виду. Необходимо найти функции  $\varphi_1(r)$  и  $\varphi_2(r)$  в членах  $\varphi_1(r)\cos\theta$  и  $\varphi_2(r)\sin\theta$ .

Подставим функцию  $\varphi_1(r)\cos\theta$  в бигармоническое уравнение. Найдем все необходимые члены:

$$\frac{\partial}{\partial r}[\varphi_1(r)\cos\theta] = \frac{d\varphi_1}{dr}\cos\theta;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}[\varphi_1(r)\cos\theta] = \frac{d^2\varphi_1}{dr^2}\cos\theta;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}[\varphi_1(r)\cos\theta] = -\varphi_1(r)\cos\theta.$$

В результате получим:

$$\nabla^4\varphi = \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right] \left[ \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{1}{r^2}\varphi_1 \right] \cos\theta = 0.$$

Для определения функции  $\varphi_1$  необходимо решить уравнение:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right] \left[ \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{1}{r^2}\varphi_1 \right] = 0.$$

Аналогично решению предыдущих задач, выполним замену переменной  $r$  на  $t$ .

$$t = \ln r;$$

$$r = e^t;$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}.$$

При этом производные функции  $\varphi_1$  будут равны:

$$\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{d\varphi_1}{dt} e^{-t};$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \left( \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) e^{-2t}.$$

Учитывая эти значения в дифференциальном уравнении, получим:

$$\left[ e^{-2t} \left( \frac{d^2}{dt^2} - 1 \right) \right] \left[ e^{-2t} \left( \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - \varphi_1 \right) \right] = 0.$$

В развернутом виде получим:

$$e^{-4t} \left[ \frac{d^4 \varphi_1}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} + 2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + 4 \frac{d \varphi_1}{dt} - 3 \varphi_1 \right] = 0.$$

Сократив на  $e^{-4t}$ , будем иметь:

$$\frac{d^4 \varphi_1}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} + 2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + 4 \frac{d \varphi_1}{dt} - 3 \varphi_1 = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 4k - 3 = 0;$$

$$k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = -1.$$

Им соответствуют следующие выражения функций решения дифференциального уравнения:

$$e^{3t}, e^t, te^t, e^{-t}.$$

Осуществляя переход от переменной  $t$  к переменной  $r$ , будем иметь:

$$\varphi_1(r) = C_1 r^3 + C_2 r + C_3 r \cdot \ln r + C_4 \frac{1}{r}.$$

Имея функцию  $\varphi_1(r)$  на основании предыдущих соотношений, получим окончательное выражение функции напряжений  $\phi_1(r, \theta)$ :

$$\phi_1(r, \theta) = \left[ C_1 r^3 + C_2 r + C_3 r \cdot \ln r + C_4 \frac{1}{r} \right] \cos \theta + C_0 r \theta \sin \theta.$$

По функции напряжений найдем напряжения:

$$\sigma_{rr} = \left[ 2C_1 r + C_3 \frac{1}{r} - C_4 \frac{2}{r^3} \right] \cos \theta + C_0 \frac{2}{r} \cos \theta;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left[ 6C_1 r + C_3 \frac{1}{r} + C_4 \frac{2}{r^3} \right] \cos \theta;$$

$$\tau_{r\theta} = \left[ 2C_1 r + C_3 \frac{1}{r} - C_4 \frac{2}{r^3} \right] \sin \theta.$$

Функция, связанная с константой  $C_2$  в выражениях напряжений, не вошла, т.е. от нее не зависят напряжения, поэтому ее можно в выражении  $\phi_1(r, \theta)$  удалить. Абсолютно аналогичные выражения получим, если воспользоваться функцией  $\phi_2(r, \theta)$  равной:

$$\phi_2(r, \theta) = \left[ \varphi_2(r) \sin \theta + \tau_0 r \theta \cos \theta \right].$$

Отличаться в этом случае они будут функцией, зависящей от  $\theta$ , а именно значения  $\cos \theta$  надо заменить на  $\sin \theta$  и наоборот. В некоторых ситуациях следует изменить знак.

Используя функцию  $\phi_2(r, \theta)$ , рассмотрим решение следующей задачи. Схема пластины изображена на рис. 1.34.

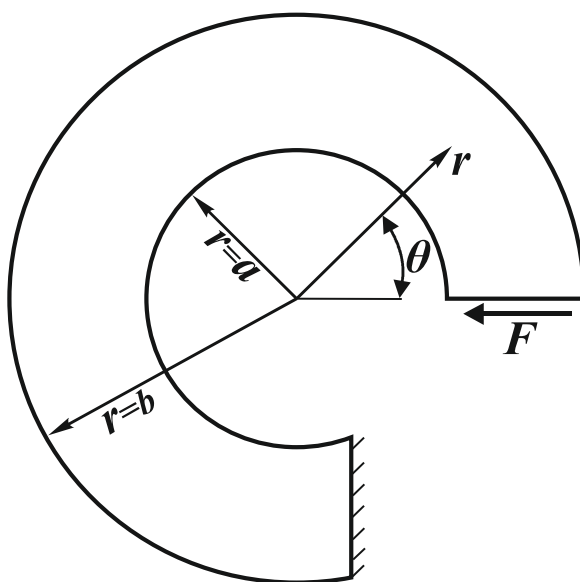


Рис. 1.34

Как было отмечено ранее, функцию напряжений  $\phi_2(r, \theta)$  принимаем в виде:

$$\phi_2(r, \theta) = \left[ \phi_2(r) \sin \theta + \epsilon_0 r \theta \cos \theta \right].$$

Функция  $\phi_2(r)$  соответствует найденной ранее функции  $\phi_1(r)$  и они имеют значение:

$$\phi_2(r) = C_1 r^3 + C_2 r + C_3 r \ln r + C_4 \frac{1}{r}.$$

Имея это выражение, найдем напряжения:

$$\sigma_{rr} = \left[ 2C_1 r + C_3 \frac{1}{r} - C_4 \frac{2}{r^3} \right] \sin \theta - \epsilon_0 \frac{2}{r} \sin \theta;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left[ 6C_1 r + C_3 \frac{1}{r} + C_4 \frac{2}{r^3} \right] \sin \theta;$$

$$\tau_{r\theta} = - \left[ 2C_1 r + C_3 \frac{1}{r} - C_4 \frac{2}{r^3} \right] \cos \theta.$$

Для определения констант  $C_i$  составим граничные условия. Они имеют следующий вид:

$$r = a;$$

$$\sigma_{rr} = 0;$$

$$\tau_{r\theta} = 0;$$

$$r = b;$$

$$\sigma_{rr} = 0;$$

$$\tau_{r\theta} = 0;$$

кроме того:

$$\theta = 0;$$

$$\int_a^b \tau_{r\theta} dr = F,$$

а также принимаем  $\epsilon_0 = 0$ .

Прежде чем записать граничные условия, отметим, что напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\tau_{r\theta}$  имеют одинаковые выражения, поэтому условия

$r = a, r = b, \sigma_{rr} = 0, \tau_{r\theta} = 0$  будут иметь одинаковые выражения. Отсюда следует, что достаточно использовать одно из этих условий. Учитывая это, запишем три граничных условия:

$$1) 2C_1 a + C_3 \frac{1}{a} - C_4 \frac{2}{a^3} = 0;$$

$$2) 2C_1 b + C_3 \frac{1}{b} - C_4 \frac{2}{b^3} = 0;$$

$$3) - \int_a^b \left( 2C_1 r + C_3 \frac{1}{r} - C_4 \frac{2}{r^3} \right) dr = F.$$

Определив три константы  $C_1; C_3; C_4$ , подставляем их в формулы напряжений, после чего есть возможность найти напряжения в любой точке.

Далее рассмотрим задачи, для решения которых следует использовать функцию 3) (1.67), т.е.:

$$\phi(r, \theta) = r^k \varphi(\theta).$$

Подставим эту функцию в бигармоническое уравнение:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0;$$

или

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 (r^k \varphi[\theta])}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r^k \varphi[\theta])}{\partial r} + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^k \varphi[\theta])}{\partial \theta^2} \right) = 0.$$

Выполним преобразования второй скобки:



$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^k \varphi(\theta) \right) = k r^{k-1} \varphi(\theta);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r^k \varphi(\theta) \right) = k(k-1) r^{k-2} \varphi(\theta);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( r^k \varphi(\theta) \right) = r^k \cdot \varphi''(\theta).$$

Подставляя эти значения в квадратные скобки, получим:

$$r^{k-2} \left[ k(k-1) \varphi(\theta) + k \varphi(\theta) + f''(\theta) \right] = r^{k-2} \left[ k^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta) \right].$$

Выполняем над полученным выражением действия, указанные в первой скобке:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{k-2} \left[ k^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta) \right] \right\} = (k-2) r^{k-3} \left[ k^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta) \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ r^{k-2} \left[ k^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta) \right] \right\} = \\ = (k-2)(k-3) r^{k-4} \left[ k^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta) \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left\{ r^{k-2} \left[ k^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta) \right] \right\} = r^{k-2} \left[ k^2 \varphi''(\theta) + \varphi^{IV}(\theta) \right].$$

После чего найдем окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left\{ r^{k-2} \left[ k^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta) \right] \right\} = \\ = r^{k-4} \left\{ \varphi^{IV}(\theta) + \left[ k^2 + (k-2)^2 \right] \varphi''(\theta) + (k-2)^2 k^2 \varphi(\theta) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда найдем дифференциальное уравнение для определения  $\varphi^{IV}(\theta) + \left[ k^2 + (k-2)^2 \right] \varphi''(\theta) + (k-2)^2 k^2 \varphi(\theta) = 0$ :

Характеристические уравнения:

$$S^4 + \left[ k^2 + (k-2)^2 \right] S^2 + (k-2)^2 k^2 = 0;$$

$$S^2 = -\frac{1}{2} \left[ k^2 + (k-2)^2 \right] \pm \sqrt{\frac{k^2 + (k-2)^2}{4} - (k-2)^2 k^2},$$

найдем:

$$S_1^2 = -k^2; S_3^2 = -(k-2)^2;$$

$$S_1 = k \cdot i, S_2 = -k \cdot i, S_3 = (k-2)i, S_4 = -(k-2)i.$$

Функции  $\varphi(\theta)$  будут равные:

$$\varphi(\theta) = C_1 \sin k\theta + C_2 \cos k\theta + C_3 \sin(k-2)\theta + C_4 \cos(k-2)\theta \quad (1.68)$$

Необходимо рассматривать три варианта с использованием численных значений  $k$ , а именно:

$$1) k = 0;$$

$$2) k = 1;$$

$$3) k = 2.$$

1) Первый вариант дает следующее значение:

$$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -2i, S_4 = 2i.$$

Решение уравнения будет иметь вид:

$$\varphi(\theta) = C_1 + C_2\theta + C_3 \sin 2\theta + C_4 \cos 2\theta.$$

2) Второй вариант – значения  $k = 1$ :

$$S_1 = i, S_2 = -i, S_3 = -i, S_4 = i.$$

Как видим, значения  $S_1 = S_4, S_2 = S_3$ . Это значит, что решение будет иметь выражение:

$$\varphi(\theta) = C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta + C_3 \theta \sin \theta + C_4 \theta \cos \theta.$$

3) Третий вариант  $k = 2$ :

$$S_1 = 2i, S_2 = -2i, S_3 = 0, S_4 = 0.$$

Опять имеют место равные значения  $S_i$ . Решение будет аналогично первому варианту:

$$\varphi(\theta) = C_1 + C_2\theta + C_3 \sin 2\theta + C_4 \cos 2\theta.$$

При любых значениях  $k$  равных 3 и более, равных одинаковых значений  $S_i$  не будет, поэтому можно пользоваться общим решением (1.68).

В самом начале решения с использованием этих функций было указано, что функции напряжений  $\phi_k(r, \theta) = r^k \phi_k(\theta)$ , поэтому можно записать:

$$\phi_k(r, \theta) = r^k [C_1 \sin k\theta + C_2 \cos k\theta + C_3 \sin(k+2)\theta + C_4 \cos(k-2)\theta].$$

Далее дадим пояснения, для какой формы пластины необходимо это решение.

Граничные условия будут удовлетворены, если пластина будет иметь форму клина бесконечно большого размера (рис. 1.35).

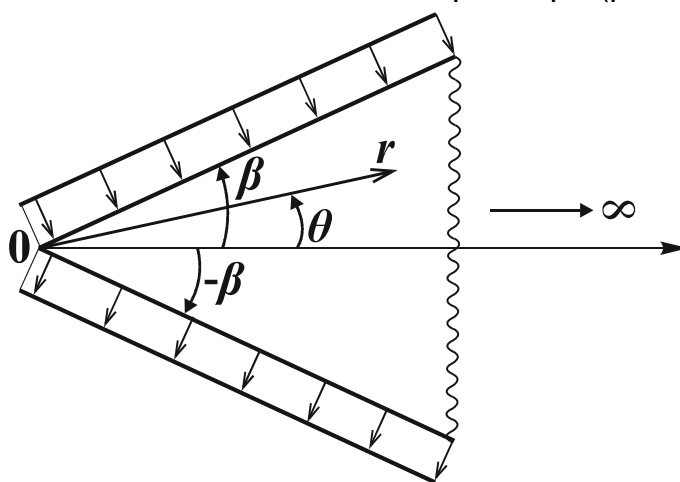


Рис. 1.35

Характер нагрузки может быть любой, в том числе и сосредоточенный, приложенный в точку (рис. 1.36).

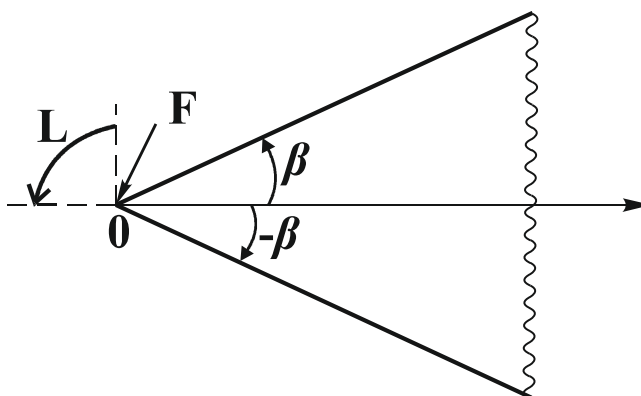


Рис. 1.36

От характера нагрузки зависит показатель степени  $k$ . При действии сосредоточенного момента  $L$   $k=0$ , при действии сосредоточенной силы  $F$   $k=1$ , при равномерно распределенной нагрузке  $k=2$  и т.д.

Форма пластины может меняться в зависимости от угла  $\beta$ . Очень важное значение имеет, когда  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае получим полубесконечную плоскость.

Рассмотрим решение при действии сосредоточенного момента  $L$  (рис. 1.37).0.

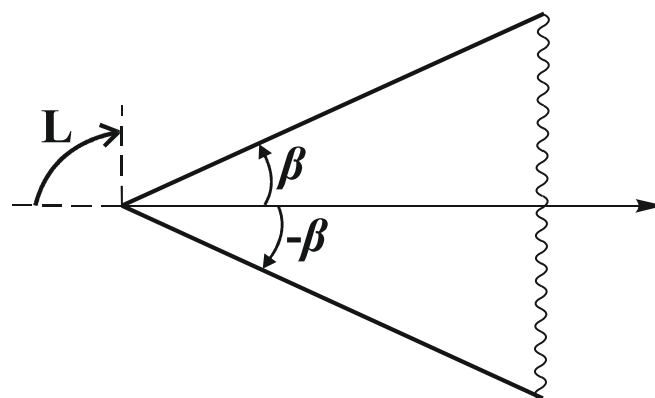


Рис. 1.37

Для составления граничных условий, рассмотрим стержневую раму, совпадающую с контуром пластины. Разрежем ее в точке  $O$ , чтобы превратить в статически определяемую, после чего построим на ней эпюру моментов (рис. 1.38).

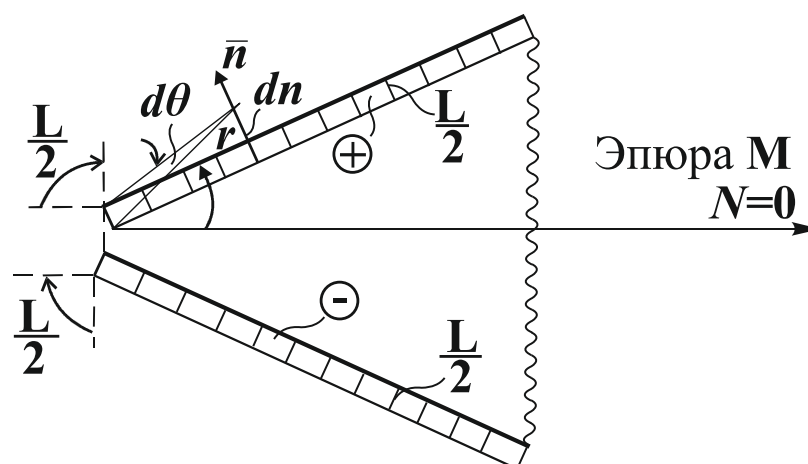


Рис. 1.38

Граничные условия:

– при  $\theta = \beta$ ,

$$\phi = \frac{L}{2}; \frac{\partial \phi}{\partial n} = N = 0,$$

– при  $\theta = -\beta$ ,

$$M = -\frac{L}{2}; N = 0; \phi = M = -\frac{L}{2}; \frac{\partial \phi}{\partial n} = N = 0;$$

$$dn = r \cdot d\theta; \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}; \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = Nr$$

$$N = 0, \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0.$$

Функция напряжений соответствует варианту  $k = 0$ :

$$\phi(r, \theta) = C_1 + C_2 \theta + C_3 \sin 2\theta + C_4 \cos 2\theta;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = C_2 + 2C_3 \cos 2\theta - 2C_4 \sin 2\theta.$$

Граничные условия будут иметь вид:

– при  $\theta = +\beta$ ,

$$C_1 + C_2 \beta + C_3 \sin 2\beta + C_4 \cos 2\beta = \frac{L}{2}$$

$$C_2 + 2C_3 \cos 2\beta - 2C_4 \sin 2\beta = 0$$

– при  $\theta = -\beta$ ,

$$C_1 - C_2 \beta - C_3 \sin 2\beta + C_4 \cos 2\beta = -\frac{L}{2}$$

$$C_2 + 2C_3 \cos 2\beta + 2C_4 \sin 2\beta = 0.$$

Получим четыре уравнения, в которые входят четыре константы. Их можно найти. Однако данную задачу можно упростить, учитывая, что условия задачи кососимметричны, а это значит, что в функции  $\phi$  должны быть только кососимметричные функции, а именно:

$$C_1 = C_4 = 0;$$

$$\phi = C_2 \theta + C_3 \sin 2\theta.$$

Оставляем два граничных условия:

– при  $\theta = \beta$ ,

$$C_2\beta + C_3 \sin 2\beta = \frac{L}{2};$$

$$C_2 + 2C_3 \cos 2\beta = 0.$$

Отсюда найдем:

$$C_2 = -\frac{L}{2} \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta};$$

$$C_3 = \frac{L}{2} \frac{1}{\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta}.$$

Подставляем значения  $C_i$  в функцию напряжений. Найдем ее значение в любой точке пластины. Через функцию напряжений вычислим напряжения.

### Лекции 10, 11. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТА ПЛАСТИН НА ИЗГИБ

В данной лекции будет изложена методика расчета изгибаемой пластины, т.е. пластины, которая деформируется перпендикулярно к своей плоскости. Это происходит, когда нагрузка, действующая на пластину, направлена к ней перпендикулярно. Подобное направление имеют и опорные реакции.

Схема пластины показана на рис. 2.1.

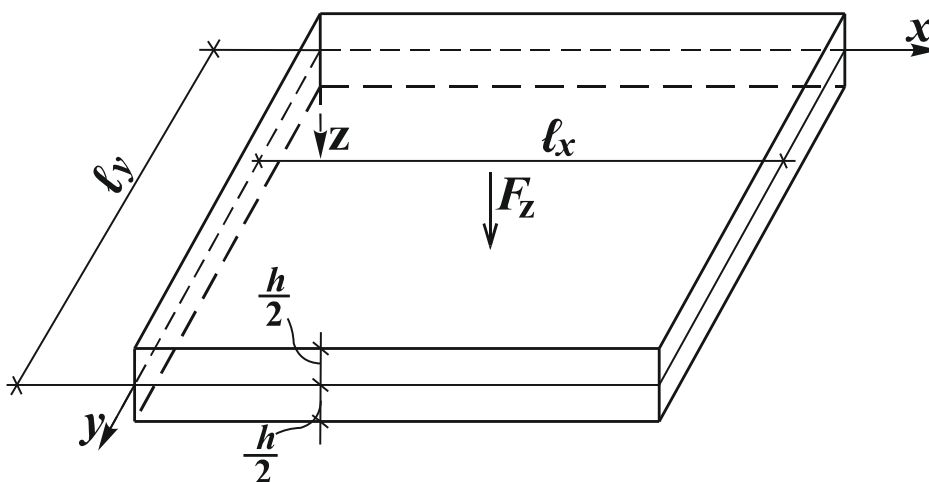


Рис. 2.1

Координатные линии  $x$ ,  $y$ ,  $z$  совпадают с, так называемой, срединной плоскостью пластины. По оси  $OX$  и  $OY$  задаются размеры пластины  $l_x$ ,  $l_y$ , по оси  $OZ$  - ее толщина  $h$ . Учитывая направление нагрузок, можно сделать простой вывод, что от действия такой нагрузки пластина изгибается. В первую очередь, при условии, что ее толщина  $h$  в несколько раз меньше ее размеров  $l_x$  и  $l_y$ . Перемещения пластин в направлении координатных осей будем обозначать  $m$ :

$$OX \rightarrow U_x, OY \rightarrow V, OZ \rightarrow W.$$

В первую очередь дадим изложение гипотез, на основе которых выполняется методика расчета изгибаемой пластины. Отметим, что гипотезы в определенной степени подобны гипотезам, принятым при расчете стержня.

*Первая гипотеза.* Пластина имеет толщину не менее, чем в пять раз меньше ее размеров.

*Вторая гипотеза.* При деформации пластина не меняет своей толщины, и это значит, что деформация  $\varepsilon_z = 0$  и перемещения  $W$  не зависят от  $z$ , т.е.  $W(x; y; 0)$ .

*Третья гипотеза.* Прямая линия, проведенная в пластине перпендикулярно к срединной плоскости, остается прямой и перпендикулярной к деформированной срединной плоскости.

*Четвертая гипотеза.* Срединная плоскость не деформируется вдоль координатных осей  $OX$  и  $OY$ .

Из третьей гипотезы следует, что:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \approx 0; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \approx 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Эти зависимости позволяют определить перемещения  $U$  и  $V$ :

$$\begin{aligned} U &= -\int \frac{\partial W}{\partial x} dz = -z \frac{\partial W}{\partial x}; \\ V &= -\int \frac{\partial W}{\partial y} dz = -z \frac{\partial W}{\partial y}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Результат интегрирования основан на второй гипотезе, т.е.  $W$  не зависит от  $z$ .

Имея выражения  $U$  и  $V$  формулы (2.2), можно определить:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Используем зависимости (1.13) между напряжениями и деформациями (2.3), найдем:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} (1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Используя уравнения равновесия, можно найти остальные напряжения и получить основное дифференциальное уравнение.

Уравнения равновесия для пространственной задачи имеют вид формулы (1.49):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Из первых двух уравнений получим:



$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = - \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right).$$

Заменим напряжения их выражениями через перемещения, формулы (2.4):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + (1-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right];$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

После простого преобразования, получим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right];$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right].$$

Проинтегрируем эти выражения по  $z$ . При этом, учитывая, что  $W$  не зависят от  $z$ , все члены, в которые входит  $W$ , сразу можно вынести за знак интеграла:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \cdot \int z dz + f_1(x, y);$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right) \cdot \int z dz + f_2(x, y).$$

Выполняя интегрирование, получим:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{z^2}{2} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) + f_1(x, y);$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{z^2}{2} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right) + f_2(x, y).$$

Для определения произвольных функций  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  используем условия, в соответствии с которыми по внешним граням пластины действует нагрузки, перпендикулярные к плоскости пластины, а касательные нагрузки отсутствуют, т.е. равны нулю. Это дает возможность записать такие условия:

$$- \text{при } z \pm \frac{h}{2},$$

$$\tau_{xz} = 0;$$

$$\tau_{yz} = 0.$$

Учтем эти условия в предыдущих равенствах:

$$0 = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^2}{8} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) + f_1(x, y);$$

$$0 = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^2}{8} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right) + f_2(x, y).$$

Откуда найдем:

$$f_1(x, y) = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^2}{8} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right);$$

$$f_2(x, y) = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^2}{8} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right).$$

Подставляем эти значения в касательные напряжения:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{4z^2 - h^2}{8} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right); \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{4z^2 - h^2}{8} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Есть возможность упростить запись касательных напряжений:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{E(4z^2 - h^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \\ \tau_{yz} &= \frac{E(4z^2 - h^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Известно, что выражения в скобках могут быть записаны в таком виде:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \nabla^2 W,$$

тогда:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Выполним еще одно очень важное преобразование. Используем третье уравнение равновесия (2.5):

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right).$$

Подставим выражения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\frac{E(4z^2 - h^2)}{8(1-\mu^2)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 W + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 W \right].$$

Отсюда получим:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\frac{E(4z^2 - h^2)}{8(1 - \mu^2)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \nabla^2 W;$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\frac{E(4z^2 - h^2)}{8(1 - \mu^2)} \nabla^2 W.$$

Интегрируя полученное равенство, учитывая, что  $W$  не зависит от  $z$ , найдем:

$$\sigma_{zz} = -\frac{E}{(1 - \mu^2)} \nabla^4 W \int \frac{(4z^2 - h^2)}{8} dz + f_3(x; y).$$

В результате интегрирования будем иметь:

$$\sigma_{zz} = -\frac{E}{1 - \mu^2} \frac{4z^3 - 3h^2z}{24} \nabla^4 W + f_3(x; y).$$

Учтем нагрузочные условия на гранях пластины – при:

$$z = +\frac{h}{2}, \quad \sigma_{zz} = q_{zH};$$

$$z = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_{zz} = -q_{zB}.$$

Характер нагрузки изображен на рис. 2.2.

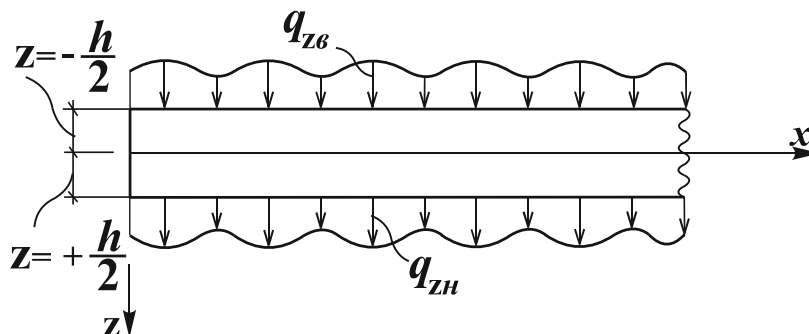


Рис. 2.2

Ранее во второй гипотезе (стр. 77) было сказано, что деформация  $\varepsilon_{zz} = 0$ , т.е. по направлению оси  $z$  пластина перемещается, как единая целая, поэтому есть смысл объединить обе нагрузки:

$$q_{zв} + q_{zн} = q_z.$$

Подставим в выражение  $\sigma_{zz}$  оба граничных условия, учтем, что:

$$z = +\frac{h}{2} \text{ или } z = -\frac{h}{2}.$$

$$\text{При } z = +\frac{h}{2},$$

$$q_{zн} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\frac{4h^3}{8} - \frac{3h^3}{2}}{24} \nabla^4 W + f_3(x, y).$$

$$\text{При } z = -\frac{h}{2},$$

$$-q_{zв} = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{-\frac{4h^3}{8} + \frac{3h^3}{2}}{24} \nabla^4 W + f_3(x, y).$$

После простых преобразований, получим:

$$q_{zн} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{24} \nabla^4 W + f_3(x, y);$$

$$q_{zв} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{24} \nabla^4 W - f_3(x, y).$$

Суммируя оба выражения, найдем:

$$q_z = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 W. \quad (2.8)$$

При суммировании, произвольная функция  $f_3(x; y)$  имеет разные знаки, поэтому она сократится – и в выражение не войдет.

Полученное соотношение (2.2), чрезвычайно важное. Оно представляет собой дифференциальное уравнение, из которого можно определить вертикальное перемещение пластины  $W$ . Через нее по формулам (2.2), (2.4), (2.7) можно определить все необходимые

деформации и напряжения, т.е. решается полностью задача. Запишем формулу (2.8) в несколько ином виде:

$$\nabla^4 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D}. \quad (2.9)$$

Константа  $D$  принята равной выражению:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (2.10)$$

Далее через напряжения, как и при расчете стержня, определим внутренние усилия. Они изображены на рис. 2.3.

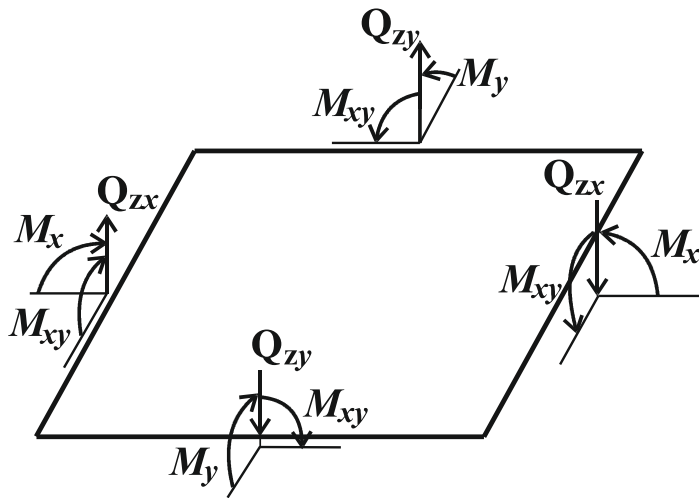


Рис 2.3

Запишем выражения усилий:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz = -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \end{aligned}$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz = -D \left( \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right);$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};$$

$$Q_{zx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W;$$

$$Q_{zy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W.$$

При расчете пластин следует рассматривать срединную плоскость, т.к. перемещение  $W$  не зависит от  $z$ , т.е. то, что будет получено для срединной плоскости, будет соответствовать и другим плоскостям. Усилия, которые представляют собой равнодействующие напряжения, собранные по толщине пластины, так же следует прикладывать к срединной плоскости.

При решении дифференциального уравнения  $\nabla^4 W$ , необходимо учитывать граничные условия, отнесенные так же к срединной плоскости. Четвертый порядок дифференциального уравнения требует на каждой стороне пластины два граничных условия. Рассмотрим несколько вариантов граничных условий.

1. Жесткое закрепление.

Для стороны, параллельной оси  $y$ :

– при  $x=const$

$$\begin{aligned} 1) W &= 0, \\ 2) \frac{\partial W}{\partial x} &= 0; \end{aligned} \tag{2.11}$$

– при  $y=const$ :

$$\begin{aligned} 1) W &= 0, \\ 2) \frac{\partial W}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

2. Шарнирная опора.

Для стороны  $x=const$ :

$$\begin{aligned} 1) W &= 0, \\ 2) M_x &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для стороны  $y=const$ :

- 1)  $W = 0$ ,
- 2)  $M_y = 0$ .

Эти условия можно записать в более простом виде. Учитывая выражения момента через перемещения, можно при  $x=const$ , когда по

первому граничному условию  $W = 0$  будет равняться нулю  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ .

В этом случае вторые граничные условия будут иметь вид  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$ .

При  $y=const$  упрощенные условия будут иметь вид:

- 1)  $W = 0$ ;
- 2)  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ .

### 3. Свободный край пластины.

На свободном краю известны три величины, а именно: изгибающий момент, поперечное усилие и момент кручения. Для перехода от трех к двум условиям момент кручения рассматривается пара сил, которые параллельны поперечной силе, и это дает возможность объединить крутящий момент с поперечной силой. Проиллюстрируем это вдоль стороны параллельной оси  $x$  при  $y=const$ . Покажем это на рис. 2.4.

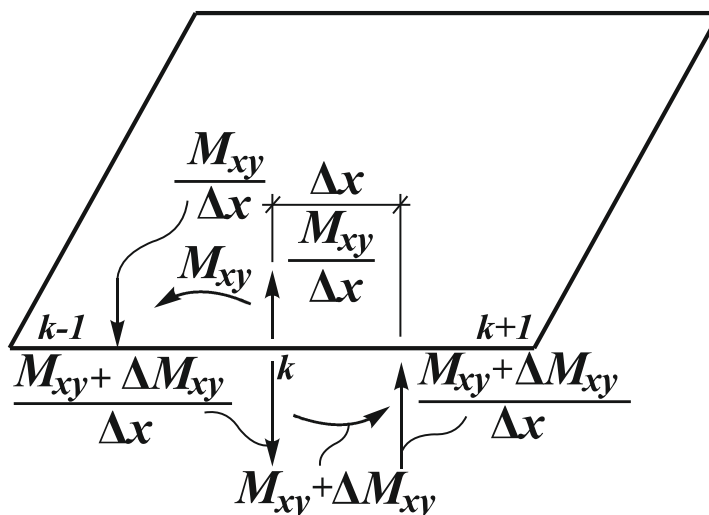


Рис. 2.4



На участке  $(k-1) \rightarrow k$  действует момент  $M_{xy}$ . Он заменяется парой сил, которые равны  $\frac{M_{xy}}{\Delta x}$ . На участке  $k \rightarrow (k+1)$  момент равен  $M_{xy} + \Delta M_{xy}$ . Ему соответствуют силы  $\frac{M_{xy} + \Delta M_{xy}}{\Delta x}$ . Если рассмотреть точку  $k$ , то очевидно, что там действуют две противоположно направленные силы, поэтому общая сила там равна:

$$\frac{M_{xy} + \Delta M_{xy}}{\Delta x} - \frac{M_{xy}}{\Delta x} = \frac{\Delta M_{xy}}{\Delta x}.$$

Аналогично будет в каждой точке. Соотношение  $\frac{\Delta M_{xy}}{\Delta x}$  можно заменить производной  $\frac{\Delta M_{xy}}{\Delta x} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ .

Указанную силу следует добавить к поперечной силе  $Q_{zy}$ . В результате получим, что в каждой точке будет действовать сила, которую назовем  $R_{zy}$  и она равна:

$$R_{zy} = Q_{zy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Следовательно, на свободной стороне пластин граничные условия будут иметь вид:

– при  $x=const$ ,

$$1) M_x = 0,$$

$$2) R_{xz} = Q_{zx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (2.13)$$

– при  $y=const$

$$1) M_y = 0,$$

$$2) R_{zy} = Q_{zy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Общего аналитически точного решения задачи получить нет возможности, поэтому следует использовать различные приближенные методы. Например, как было показано в плоской задаче, метод конечных разностей. Возможны другие методы. Некоторые из них будут рассмотрены далее.

## Лекция 12. РАСЧЕТ ПЛАСТИН В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

Будут рассмотрены два метода. *Первый* связан с расчетом прямоугольной пластины, имеющей шарнирные опоры по всем четырем сторонам. *Второй* используется, когда прямоугольная пластина имеет шарнирные опоры по двум противоположным сторонам. Рассмотрим указанного первый вариант (схема пластины изображена на рис. 2.5).

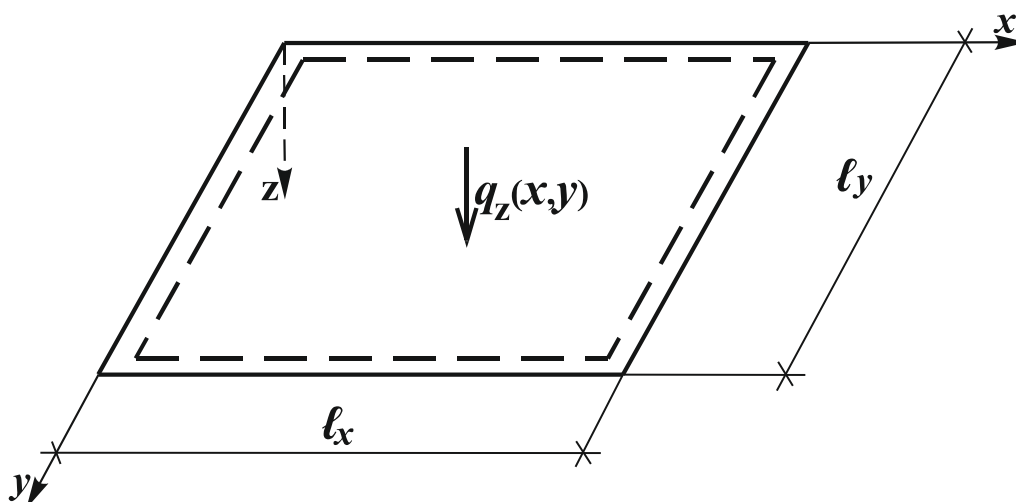


Рис. 2.5

Нагрузка  $q_z(x; y)$  может быть распределена по площади пластины по любому закону.

Первый шаг решения представляет собой разложение неизвестной функции  $W(x; y)$  в синусоидальный тригонометрический ряд:

$$W(x, y) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{i=n \\ j=n}} C_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}. \quad (2.14)$$

Применение синусоидальных функций основано на условии выполнения граничных условий задачи, которые имеют следующий вид:

– при  $x = 0, W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0;$

$$x = l_x, W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0;$$

$$y = 0, W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0;$$

$$y = l_y, W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

Легко убедиться в том, что если в принятый ряд подставить граничные координаты, то условия будут выполнены, т. к.  $\sin 0 = 0$ ,  $\sin i\pi = 0$ ,  $\sin j\pi = 0$  при любых целых значениях  $i$  и  $j$ . Далее, необходимо подставить принятое значение прогиба в дифференциальное уравнение. Сначала определим все ее члены:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \sum C_{ij} \left( \frac{i\pi}{l_x} \right)^4 \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y};$$

$$2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum 2C_{ij} \frac{i^2 j^2}{l_x^2 l_y^2} \pi^4 \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y};$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \sum C_{ij} \left( \frac{j\pi}{l_y} \right)^4 \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}.$$

Учитывая эти выражения в левой части бигармонического уравнения, получим:

$$\nabla^4 W = \sum C_{ij} \left[ \left( \frac{i\pi}{l_x} \right)^4 + 2 \frac{i^2 j^2}{l_x^2 l_y^2} \pi^4 + \left( \frac{j\pi}{l_y} \right)^4 \right] \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}.$$

После простого преобразования найдем левую часть бигармонического уравнения:

$$\nabla^4 W = \sum C_{ij} \pi^4 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}. \quad (2.15)$$

Принимая во внимание, что имеется нагрузка  $q_z(x; y)$ , бигармоническое уравнение будет иметь вид:

$$\nabla^4 W = \frac{1}{D} q_z(x, y).$$

Разложим нагрузку в тригонометрический ряд:

$$q_z(x, y) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{j=n \\ i=n}} q_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}. \quad (2.16)$$

Коэффициенты  $q_i$  определяются по формуле:

$$q_{ij} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \int_0^{l_y} q_z(x, y) \sin \frac{j\pi y}{l_y} dy dx.$$

Поскольку  $q_z(x; y)$  функция задана, значение  $q_{ij}$  можно определить. Рассмотрим вариант, когда нагрузки  $q_z(x; y)$  равномерно распределена по всей плоскости, т.е. она имеет постоянное значение  $q_z(x; y) = q$ .

В этом случае коэффициенты  $q_i$  будут равны:

$$q_{ij} = \frac{4}{l_x l_y} q \int_0^{l_x} \sin \frac{i\pi x}{l_x} dx \int_0^{l_y} \sin \frac{j\pi y}{l_y} dy.$$

Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \frac{4}{l_x l_y} q \left( -\frac{l_x}{i\pi} \right) \cos \frac{i\pi x}{l_x} \Big|_0^{l_x} \left( -\frac{l_y}{j\pi} \right) \cos \frac{j\pi y}{l_y} \Big|_0^{l_y} = \\ &= \frac{4}{ij\pi^2} [\pm 1 - 1][\pm 1 - 1]. \end{aligned}$$

При нечетных значениях  $i$  и  $j$  первые члены в квадратных скобках равны (-1), а при четных значениях  $i$  и  $j$  равны (+1). Поэтому нечетные члены  $q_{ij}$  будут равны:

$$q_{ij} = \frac{16}{ij\pi^2},$$

а четные  $q_{ij} = 0$ .

Конкретно запишем:

$$q_{11} = \frac{16}{\pi^2}; q_{21} = 0; q_{12} = 0; q_{22} = 0; q_{13} = \frac{16}{3\pi^2} \text{ и т.д.}$$

Описанная процедура говорит о том, что коэффициенты  $q_{ij}$  могут быть найдены. Это необходимо учесть в бигармоническом уравнении. Запишем, учитывая разложение его левой и правой части в тригонометрические ряды, формулы (2.15) и (2.16).

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{j=n} C_{ij} \pi^4 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y} = \\ & = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{j=n} q_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем:

$$C_{ij} = \frac{q_{ij}}{\pi^4 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2}. \quad (2.17)$$

После определения  $C_{ij}$  будет определена функция  $W(x;y)$ , на основании которой могут быть найдены перемещения и усилия, возникающие в пластине, по приведенным ранее формулам.

Рассмотрим второй вариант решения с использованием тригонометрических функций. Схема пластины показана на рис. 2.6. Две ее стороны при  $y = 0$  и  $y = l_y$  имеют шарнирные опоры. По двум другим сторонам при  $x = 0$  и  $x = l_x$  условия могут быть разные. Различные выражения может иметь нагрузка  $q_z(x; y)$ .

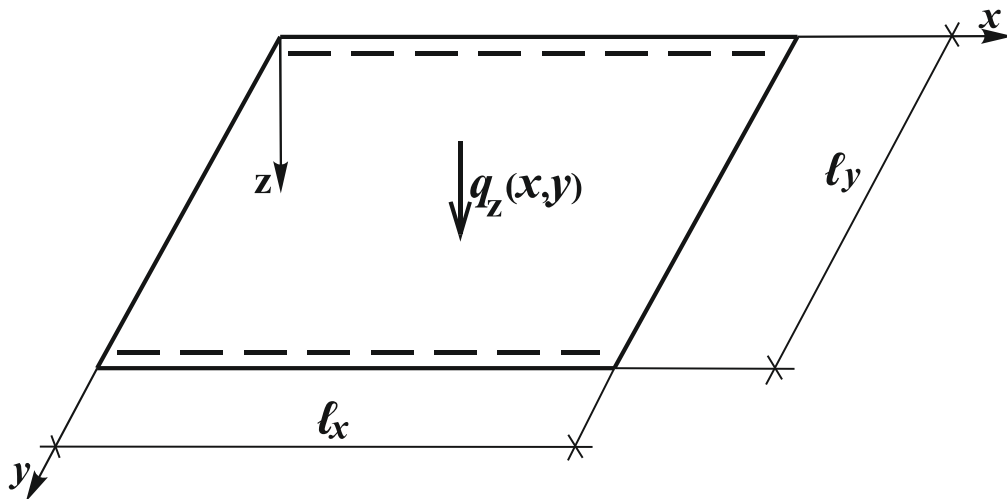


Рис. 2.6

При решении такой задачи, учитывая, что по сторонам  $y = 0$  и  $y = l_y$ , имеют место шарнирные опоры. Как и в предыдущей задаче граничные условия по этим сторонам имеют вид  $W = 0$  и  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ .

Поэтому функции по направлению оси  $y$  следует разложить в синусоидальный ряд. По направлению координаты  $x$  значение функций могут быть различными. Запишем искомую функцию  $W(x,y)$  в таком виде:

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} X_i(x) \sin \frac{i\pi y}{l_y}. \quad (2.18)$$

В аналогичной форме следует принять выражение нагрузки:

$$q_z(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} q_i(x) \sin \frac{i\pi y}{l_y}, \quad (2.19)$$

где 
$$q_i(x) = \frac{2}{l_y} \int_0^{l_y} q_z(x, y) \sin \frac{i\pi y}{l_y} dy.$$

По этой формуле можно найти  $q_i(x)$ , учитывая, что  $q_z(x; y)$  задано.

Установим значения членов дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \sum X_i^{IV}(x) \sin \frac{i\pi y}{l_y};$$

$$2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum 2 X_i''(x) \left( \frac{i\pi}{l_y} \right)^2 \left( -\sin \frac{i\pi y}{l_y} \right);$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \sum X_i(x) \left( \frac{i\pi}{l_y} \right)^4 \sin \frac{i\pi y}{l_y}.$$

Учтем полученные соотношения в бигармоническом уравнении:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[ X_i^{IV}(x) - \frac{2i^2\pi^2}{l_y^2} X_i''(x) + \frac{i^4\pi^4}{l_y^4} X_i(x) \right] \sin \frac{i\pi y}{l_y} =$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{i=n} q_i(x) \sin \frac{i\pi y}{l_y}.$$

Сравнивая левые и правые части полученного выражения, найдем:

$$X_i^{IV}(x) - \frac{2i^2\pi^2}{l_y^2} X_i''(x) + \frac{i^4\pi^4}{l_y^4} X_i(x) = \frac{1}{D} q_i(x). \quad (2.20)$$

Общее однородное решение этого уравнения получим, найдя значение характеристического уравнения, которое имеет вид:

$$k^4 - \frac{2i^2\pi^2}{l_y^2} k^2 + \frac{i^4\pi^4}{l_y^4} = 0;$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{i^2\pi^2}{l_y^2} \pm \sqrt{\frac{i^4\pi^4}{l_y^4} - \frac{i^4\pi^4}{l_y^4}} = \frac{i^2\pi^2}{l_y^2};$$

$$k_{1,2} = \pm \frac{i\pi}{l_y}.$$

Решение уравнения будет равно:

$$e^{\frac{i\pi}{l_y}x}; x \cdot e^{\frac{i\pi}{l_y}x}; e^{-\frac{i\pi}{l_y}x}; x e^{-\frac{i\pi}{l_y}x}.$$

Таким образом, решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$X_i = (C_{1i} + xC_{2i}) e^{\frac{i\pi}{l_y}x} + (C_{3i} + xC_{4i}) e^{-\frac{i\pi}{l_y}x}. \quad (2.21)$$

Частное решение неоднородного уравнения зависит от значения функции  $q_z(x; y)$ . Как и в предыдущем примере, рассмотрим случай, когда  $q_z(x; y) = const = q$ . В этом случае:

$$q_1 = \frac{2}{l_y} \int_0^{l_y} q \sin \frac{i\pi y}{l_y} dy = \frac{2q}{l_y} \left( -\frac{l_y}{i\pi} \cos \frac{i\pi y}{l_y} \right)_{y=0}^{y=l_y} = -\frac{2q}{i\pi} (\pm 1 - 1).$$

Первый член в скобках имеет знак (-), если  $i$  нечетный и знак (+) при четном  $i$ , поэтому получим:

– при нечетном  $i$ :

$$q_i = \frac{4q}{i\pi};$$

– при четном  $i$ :

$$q_i = 0.$$

Учитывая полученные результаты, можно записать общее значение прогиба пластины:

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[ (C_{1i} + xC_{2i}) e^{\frac{i\pi x}{l_y}} + (C_{3i} + xC_{4i}) e^{-\frac{i\pi x}{l_y}} \right] \sin \frac{i\pi y}{l_y} + \frac{1}{D} \frac{4q}{i\pi}. \quad (2.22)$$

Это при равномерно распределенной нагрузке. При других нагрузках частное решение будет меняться. Константы  $C_{ki}$ , которые входят в решение  $W(x; y)$ , следует определить из граничных условий по сторонам  $x = 0$  и  $x = l_x$ . На каждой стороне граничных условий два, таким образом их общее количество четыре, что соответствует количеству неизвестных констант. Как было сказано, они могут быть разные. Предположим, что по этим сторонам жесткое закрепление, тогда при  $x = 0$  и  $x = l_x$  будут иметь место равенства  $W = 0$  и

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$



Лекции 13, 14. **РАСЧЕТ ПЛАСТИН МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА**

Рассмотрим пластину, которая имеет любые условия закреплений, т.е. любые граничные условия. К ней приложена внешняя нагрузка  $q$ , от которой возникают внутренние напряжения. Поскольку пластина находится в равновесии, то сумма работ внутренних и внешних сил на этих перемещениях будет равняться нулю. Это условие позволяет составить уравнение, из которого будут найдены перемещения и напряжения в пластине, возникающие от нагрузки. Схема пластины показана на рис. 2.7.

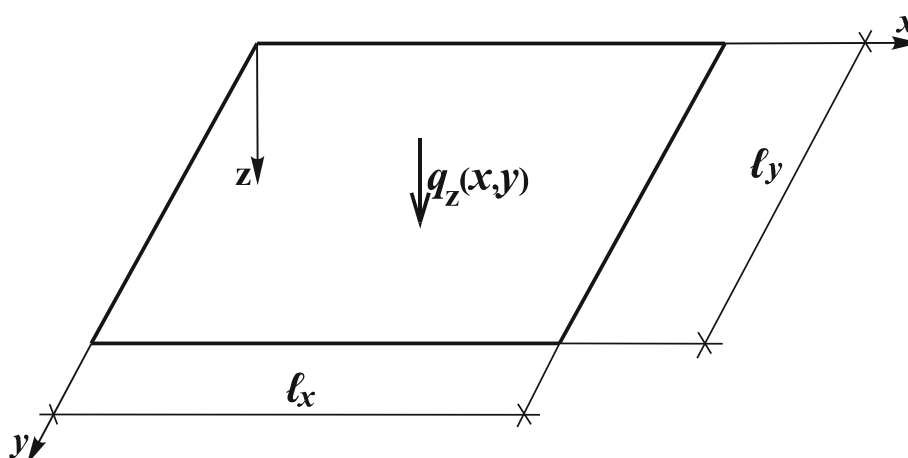


Рис. 2.7

Перемещения пластины предоставим в виде ряда:

$$W(x, y) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} C_{ij} W_{ij}(x, y). \quad (2.23)$$

Каждый член ряда выбирается самостоятельно из условий удовлетворения граничным условиям. Кроме того примем его в виде произведения двух функций, каждая из которых зависят от одной переменной  $x$  или  $y$ ; а именно:

$$W_{ij}(x, y) = \bar{X}_i(x) \cdot \bar{Y}_j(y).$$

При этом функция  $\bar{X}_i(x)$  должна удовлетворять граничным условиям при  $x=0$  и  $x=l_x$ . Аналогично функция  $\bar{Y}_j(y)$  подчиняется граничным условиям при  $y=0$  и  $y=l_y$ . Выполнив эти требования, запишем функцию:

$$W(x, y) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} C_{ij} \bar{X}_i(x) \cdot \bar{Y}_j(y). \quad (2.24)$$

Учитывая принятые обозначения, запишем бигармоническое уравнение:

$$\nabla^4 W(x, y) = \sum C_{ij} \left[ \begin{array}{l} \bar{X}_i^{IV}(x) \cdot \bar{Y}_j(y) + 2\bar{X}_i''(x) \cdot \bar{Y}_j''(y) + \\ + \bar{X}_i(x) \cdot \bar{Y}_j^{IV}(y) \end{array} \right]. \quad (2.25)$$

Значение возможных перемещений примем равными тем же самым функциям:

$$W_{k,m}(x, y) = \bar{X}_k(x) \cdot \bar{Y}_m(y). \quad (2.26)$$

Работа внутренних и внешних сил на возможном перемещении имеют следующее выражение:

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[ \nabla^4 W(x, y) - \frac{1}{D} q_z(x, y) \right] \cdot W_{km}(x, y) dx dy. \quad (2.27)$$

Запишем отдельно выражения, связанные с работой внутренних и внешних сил, используя полученные ранее соотношения. Работа внутренних сил равна:

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=n} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} C_{ij} \left[ \bar{X}_i^{IV} \bar{Y}_j + 2\bar{X}_i'' \bar{Y}_j'' + \bar{X}_i \bar{Y}_j^{IV} \right] \cdot \bar{X}_k \cdot \bar{Y}_m dx dy.$$

Константу  $C_{ij}$  можно вынести за знак интеграла:

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=n} C_{ij} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[ \bar{X}_i^{IV} \bar{Y}_j + 2\bar{X}_i'' \bar{Y}_j'' + \bar{X}_i \bar{Y}_j^{IV} \right] \cdot \bar{X}_k \cdot \bar{Y}_m dx dy. \quad (2.28)$$

В интеграл входят функции, которые, как было сказано, принимаются, т.е. они известные, поэтому интеграл можно вычислить. Кроме того, на основании пределов интегрирования, интеграл имеет численное значение. Обозначим его следующим образом:

$$\delta_{ijkm} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[ \bar{X}_i^{IV} \bar{Y}_j + 2\bar{X}_i'' \bar{Y}_j'' + \bar{X}_i \bar{Y}_j^{IV} \right] \cdot \bar{X}_k \cdot \bar{Y}_m dx dy. \quad (2.29)$$

Далее запишем выражение работы внешних сил; обозначив ее  $\Delta_{km}$ :

$$\frac{1}{D} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} q_z(x, y) \cdot W_{km}(x, y) dx dy = \Delta_{km}. \quad (2.30)$$

С учетом принятых обозначений, запишем окончательное выражение работ внутренних и внешних сил:

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=n} \delta_{ijkm} \cdot C_{ij} - \Delta_{km} = 0. \quad (2.31)$$

Очередным есть то, что все величины в этом равенстве могут быть определены. Неизвестными будут только константы  $C_{ij}$ . Это говорит о том, что полученное равенство представляет собой систему алгебраических уравнений, которую можно решить и найти значения  $C_{ij}$ .

После чего, по известным ранее соотношениям (2.24), можно определить основную неизвестную функцию  $W(x,y)$ :

$$W(x, y) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} C_{ij} X_i Y_i.$$

Она дает возможность найти все необходимые величины для расчета пластины.

Отметим, что в системе алгебраических уравнений индексы  $k, m$  в строке не меняются. Они изменяются при переходе от одной строки к другой. В строке переменными есть индексы  $i, j$ .

Проиллюстрируем решение конкретной задачи. Рассмотрим прямоугольную пластину, шарнирно опертую по всем четырем сторонам. Нагрузку примем равномерно распределенной по всей плоскости пластины. Схема показана на рис. 2.8.

Решение задачи начинаем с установления граничных условий и подбора функций  $X_i$  и  $Y_i$ . В данном случае граничные условия имеют следующий вид:

– при  $x = 0$  и  $x = l_x$ ,

$$W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0;$$

– при  $y = 0$  и  $y = l_y$ ,

$$W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

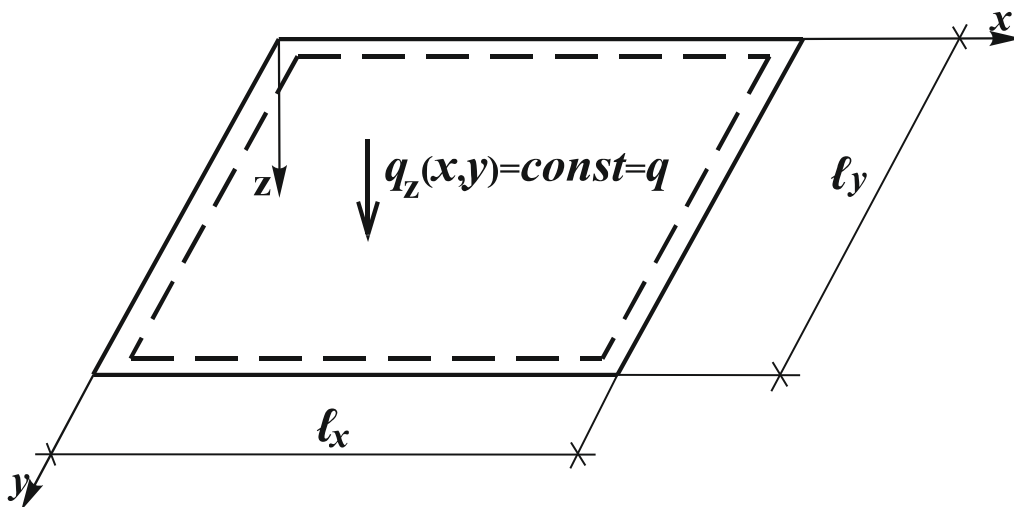


Рис. 2.8

Подбираем функции  $X_i(x)$  и  $Y_i(y)$  так, чтобы выполнились граничные условия. В данном случае они будут равны синусам:

$$X_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l_x};$$

$$Y_i(y) = \sin \frac{j\pi y}{l_y}.$$

Никаких проблем нет в том, чтобы убедиться, что при  $x = 0$  и  $x = l_x$  условия будут выполняться:

$$X_i(0) = X_i(l_x) = 0;$$

$$X_i''(0) = X_i''(l_x) = 0.$$

Аналогично:

$$Y_i(0) = Y_i(l_y) = 0;$$

$$Y_i''(0) = Y_i''(l_y) = 0.$$

Таким образом:

$$W(x, y) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} C_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}.$$

Для определения коэффициентов  $\delta_{ijkm}$  необходимо иметь  $\nabla^4 W$ , учитывая, что в выражение  $\nabla^4 W$  входят только четные производные. Отметим, что четные производные от синуса, равны со знаком (+) или (-) тому же синусу. В результате получим:

$$\nabla^4 W = \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 \pi^4 \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}.$$

Значение  $\delta_{ijkm}$  находятся по формуле:

$$\delta_{ijkm} = \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 \pi^4 \int_0^{l_x} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi x}{l_x} dx \int_0^{l_y} \sin \frac{j\pi y}{l_y} \sin \frac{m\pi y}{l_y} dy.$$

Интеграл от произведения синусов равен:

$$\int_0^{l_x} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi x}{l_x} dx = \begin{cases} 0; i \neq k \\ \frac{1}{2} l_x; i = k. \end{cases}$$

Аналогично интегралы от синусов  $y$ . Таким образом, значения  $\delta_{ijkm}$  будут равны:

$$\delta_{ijkm} = \begin{cases} \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 \frac{\pi^4 l_x l_y}{4} \text{ при } i = k, j = m. \\ 0 \text{ при } i \neq k, j \neq m \end{cases}$$

Подобный результат говорит о том, что в любой строке системы уравнений не нулевое значение будет иметь только один коэффициент, который расположен на главной диагонали матрицы системы уравнений. Таким образом, получим, что в каждой строке будет только одна неизвестная:

$$C_{km} \delta_{kmkm} - \frac{1}{D} \Delta_{km} = 0.$$

Отсюда находим:

$$C_{km} = \frac{1}{D} \frac{\Delta_{km}}{\delta_{kmkm}}. \quad (2.32)$$

Определим еще  $\Delta_{km}$ . В рассматриваемой задаче, он равен:

$$\Delta_{km} = \frac{1}{D} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} q \sin \frac{k\pi x}{l_x} \sin \frac{m\pi y}{l_y} dx dy.$$

Учитывая, что  $q = \text{const}$ , получим:

$$\Delta_{km} = \frac{q}{D} \frac{l_x l_y}{km\pi^2} (\cos k\pi - 1)(\cos m\pi - 1).$$

Окончательное значение будет зависеть от того, чему равно  $k$  и  $m$ .

### Лекция 15. СЖАТО-ИЗОГНУТАЯ ПЛАСТИНА

Рассмотрим методику расчета пластины, на которую действует перпендикулярная нагрузка, а так же нагрузки, действующие в направлении пластины, которые ее сжимают или растягивают (рис. 2.9).

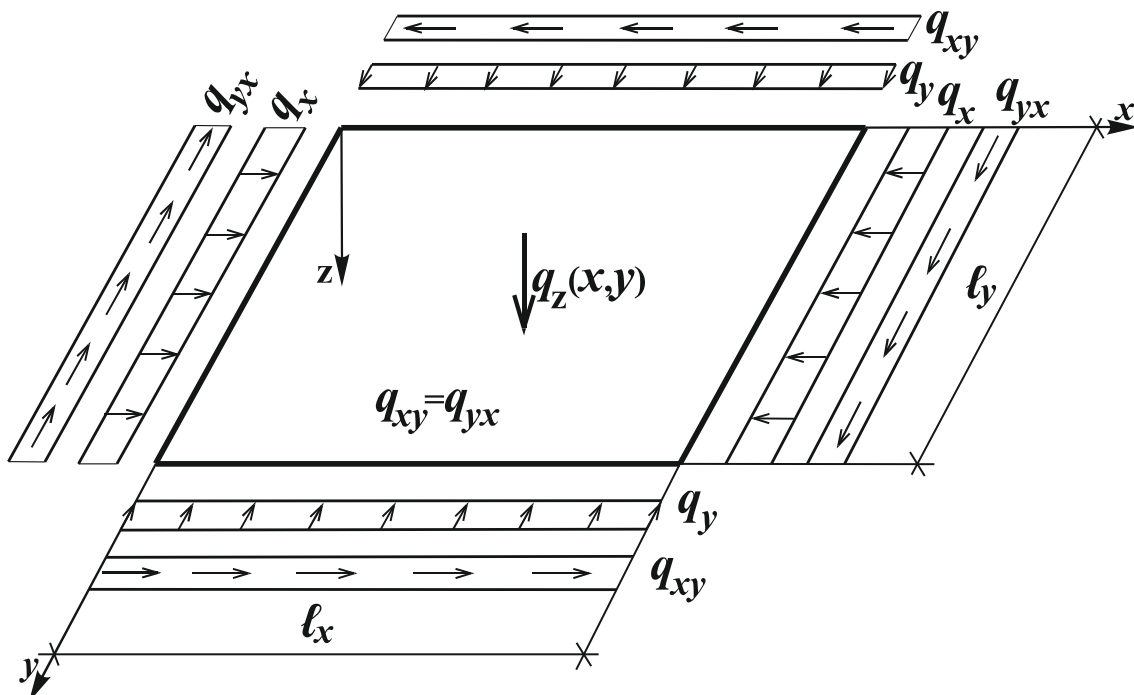


Рис. 2.9

Особенностью этой задачи является учет влияния нагрузок  $q_x, q_y, q_{xy} = q_{yx}$  на изгиб пластины, т.е. имеет место сочетание плоского напряженного состояния с изгибом. Будем учитывать только влияние плоского напряженного состояния на изгиб. Плоское напряженное состояние соответствует рассмотренной в первой главе методике. Отметим, что плоская нагрузка не обязательно равномерно распределена, как показано на рис. 2.9.

Начинается с решения плоской задачи.

Используя методику лекций 1, 2, 3.

$$\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \tau_{xy}.$$

После определения этих напряжений рассмотрим условия равновесия бесконечно малого элемента, который будет рассматриваться в деформированном состоянии. Уравнение равновесия будет составлять сумму проекций на ось  $z$ . Этого одного уравнения будет достаточно, чтобы получить необходимое уравнение. На рис. 2.10 показаны углы поворота деформированного элемента пластины. Его размеры равны  $dx$  на  $dy$ .

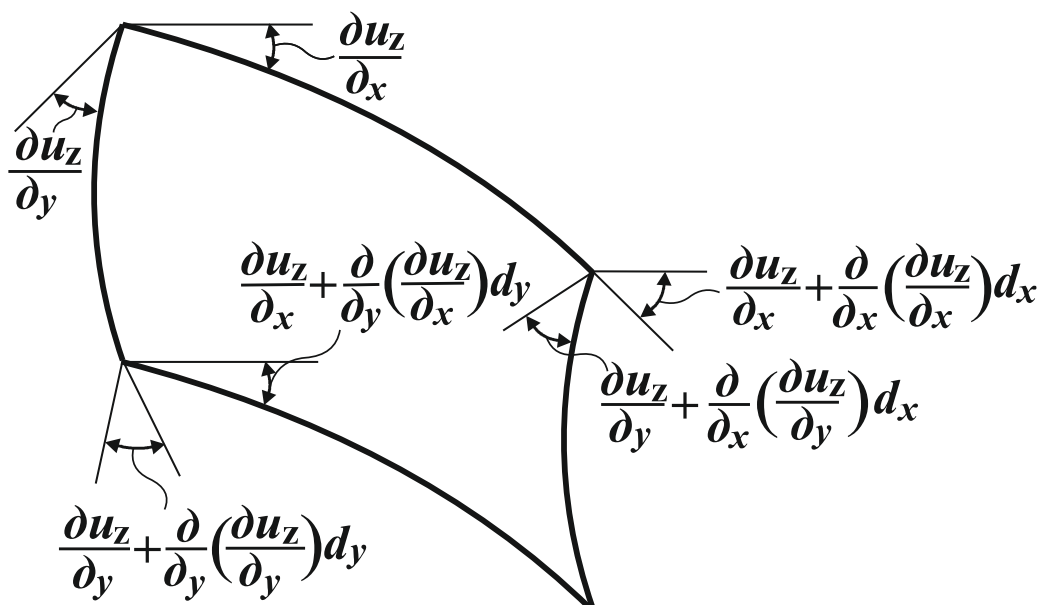


Рис. 2.10

Далее на рис. 2.11 покажем действующие напряжения, которые войдут в уравнение равновесия:

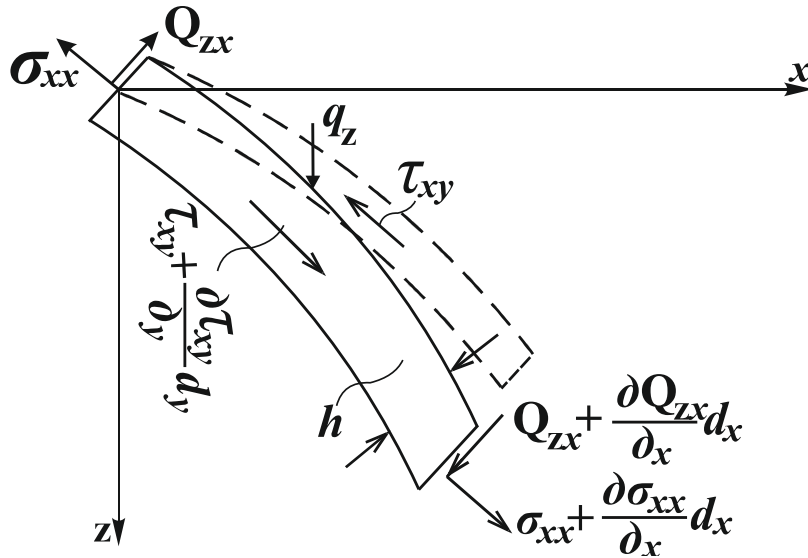


Рис. 2.11

На рисунке показаны две стороны, перпендикулярные к оси  $y$ . Пунктиром показана начальная сторона элемента. На ней изображено касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Аналогичный характер имеют напряжения по сторонам, перпендикулярным оси  $x$ . Составим уравнение проекции на ось  $z$ , при этом углы наклона будем принимать по рис. 2.10. Следует подчеркнуть, что углы наклона малые. Это значит, что их косинусы будут приниматься равными 1, а синусы равны углам:

$$\begin{aligned}
 & -Q_{zx} dy + \left( Q_{zx} + \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} dx \right) dy - \\
 & -Q_{zy} dx + \left( Q_{zy} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} dy \right) dy + q_z dx dy - \\
 & -\sigma_{xx} h dy + \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) h dy \left( \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} dx \right) - \\
 & -\sigma_{yy} h dx + \left( \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) h dx \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} dy \right) - \\
 & -\tau_{xy} h dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) h dy \left( \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} dx \right) - \\
 & -\tau_{xy} h dx + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) h dx \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} dy \right) = 0. \quad (2.33)
 \end{aligned}$$



Выполним преобразование. Для упрощения отметим, что члены, записанные в первом столбике, местами имеют одинаковые значения с первыми членами в скобках, но имеют различный знак, поэтому их сразу можно сократить, в результате получим:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} + q_z \right) dx dy + \\ & + \left( \sigma_{xx} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} dx \right) h dx dy + \\ & + \left( \sigma_{yy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} dy \right) h dx dy + \\ & + \left( \tau_{xy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} dy \right) h dx dy + \\ & + \left( \tau_{xy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} dx \right) h dx dy = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что последние члены в четырех последних скобках имеют на один бесконечно малый множитель  $dx$  или  $dy$  больше по сравнению с другими членами. Следовательно их можно отбросить. Дальше все можно сократить на множители  $dx$ ,  $dy$ , после чего получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} + q_z + \\ & + \left( \sigma_{xx} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) h + \left( \sigma_{yy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) h + \\ & + \left( \tau_{xy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) h + \left( \tau_{xy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) h = 0. \end{aligned}$$

Выразим  $Q_{zx}$  и  $Q_{zy}$  через перемещения  $W$ , используя формулы (2.9):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W \right) = \\ & = -D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 W = -D \nabla^4 W. \end{aligned}$$

Кроме того, объединим последние члены первой и третьей скобки, и второй с четвертой:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial U_z}{\partial x} h; \\ & \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial U_z}{\partial y} h. \end{aligned}$$

Выражение в скобках представляет собой уравнение плоской задачи. Указанное уравнение равно нулю, следовательно эти члены можно отбросить. Учитывая сказанное, получим:

$$\nabla^4 W = \frac{h}{D} \left[ \sigma_{xx} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} \right].$$

Следует отметить, что  $U_z$  это есть  $W$ , т.е.  $U_z = W$ . Принимая это во внимание, запишем окончательное уравнение:

$$\nabla^4 W = \frac{h}{D} \left[ \sigma_{xx} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]. \quad (2.34)$$

Полученное уравнение весьма сложно решать, так как оно в частных производных и еще с переменными координатами  $\sigma_{xx}$ ;  $\sigma_{yy}$ ;  $\tau_{xy}$ . Есть варианты, при которых решение получить возможно. Рассмотрим один пример.

На пластину действует одна горизонтальная нагрузка  $q_x$ , равномерно распределённая по длине стороны пластины, как показано

на рис. 2.9. Остальные горизонтальные нагрузки равны нулю. Используя решение плоской задачи в полиномах, найдем:

$$\phi = -q_x \frac{y^2}{2}, \quad \sigma_{xx} = -q_x, \quad \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0.$$

Учитывая это в уравнении (2.34), получим:

$$\nabla^4 W = -\frac{q_x h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \text{ или } \nabla^4 W + \frac{q_x h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Считаем, что пластина имеет шарнирные опоры по всем четырем сторонам. Решение подобной задачи без горизонтальной нагрузки уже выполнилось. В данном случае используем такую же методику. Принимаем  $W(x; y)$  равной:

$$W(x, y) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} C_{ij} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}.$$

Граничные условия удовлетворяются. Подставим это выражение в полученное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & \sum C_{ij} \left\{ \pi^4 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 - \frac{q_x h}{D} \left( \frac{i\pi}{l_x} \right)^2 \right\} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y} = \\ & = \frac{1}{D} q_z(x, y). \end{aligned}$$

Примем нагрузку  $q_z(x, y)$  равной нулю, тогда:

$$\sum C_{ij} \left\{ \pi^4 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 - \frac{q_x h}{D} \left( \frac{i\pi}{l_x} \right)^2 \right\} \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y} = 0.$$

Условия будут выполняться, если выражение в фигурных скобках будет равно нулю.

$$\pi^4 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2 - \frac{q_x h}{D} \left( \frac{i\pi}{l_x} \right)^2 = 0.$$

Отсюда можно найти значение, которое должна иметь нагрузка  $q_x$

$$q_x = \frac{\pi^2 D}{h} \left( \frac{l_x}{i} \right)^2 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2. \quad (2.35)$$

Таким образом, мы нашли критическую силу, при которой пластина может потерять устойчивость. Это подтверждается тем, что приравняв нулю выражение в фигурных скобках, был принят равным нулю определитель системы уравнений. Значение критической силы может быть разным. Это зависит от того, какие значения  $i$  и  $j$  будут приняты. Минимальные значения будут при  $i=j=1$ :

$$q_x = \frac{\pi^2 D}{h} (l_x)^2 \left[ \left( \frac{i}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{l_y} \right)^2 \right]^2.$$

Если рассмотреть квадратную пластину, т.е.  $l_x = l_y$ , то получим:

$$q_x = \frac{4\pi^2 D}{l_x^2}.$$

Таким образом, рассмотренная задача дает возможность определить критическую силу сжимаемой пластины.

### **Лекции 16, 17. ИЗГИБАЕМАЯ ПЛАСТИНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ**

Рассмотрим методику расчета изгибаемых пластин в цилиндрических координатах. В первую очередь составим уравнения равновесия в напряжениях. На рис. 2.12 изображен бесконечно малый объёмный элемент пластины, на котором показаны все возникающие напряжения. Угловые точки элемента обозначены цифрами 1; 2; 3; 4 и 1'; 2'; 3'; 4'. Для более четкого рассмотрения рисунка показан еще один рисунок 2.13. На нем изображена проекция элемента на плоскость  $XOY$ .

Для упрощения составляем уравнения равновесия, запишем размеры плоскостей всех граней рассматриваемого элемента.

Площадь:

$$(1-2-3-4) = \left[ (r+dr)d\theta(r+dr-rd\theta r) \right] \frac{1}{2} = rdrd\theta + \frac{1}{2}drdrd\theta.$$

Последним членом можно пренебречь, т.к. он имеет более высокую степень малости, поэтому окончательно получим площадь:

$$- (1-2-3-4) = rdrd\theta.$$

$$- (1'-2'-3'-4') = rdrd\theta.$$

$$- (1-1'-4-4') = dzrd\theta = rdz d\theta.$$

$$- (2-2'-3-3') = dz(r+dr)d\theta = (r+dr)d\theta dz.$$

$$- (1-2-2'-1') = dzdr.$$

$$- (4-3-3'-4') = dzdr.$$

Составим уравнение проекций на три оси:  $\tilde{r}$ ;  $\tilde{\theta}$ ;  $z$ , которые показаны на рис. 2.12; 2.13. Начнем с проектирования на ось  $\tilde{z}$ .

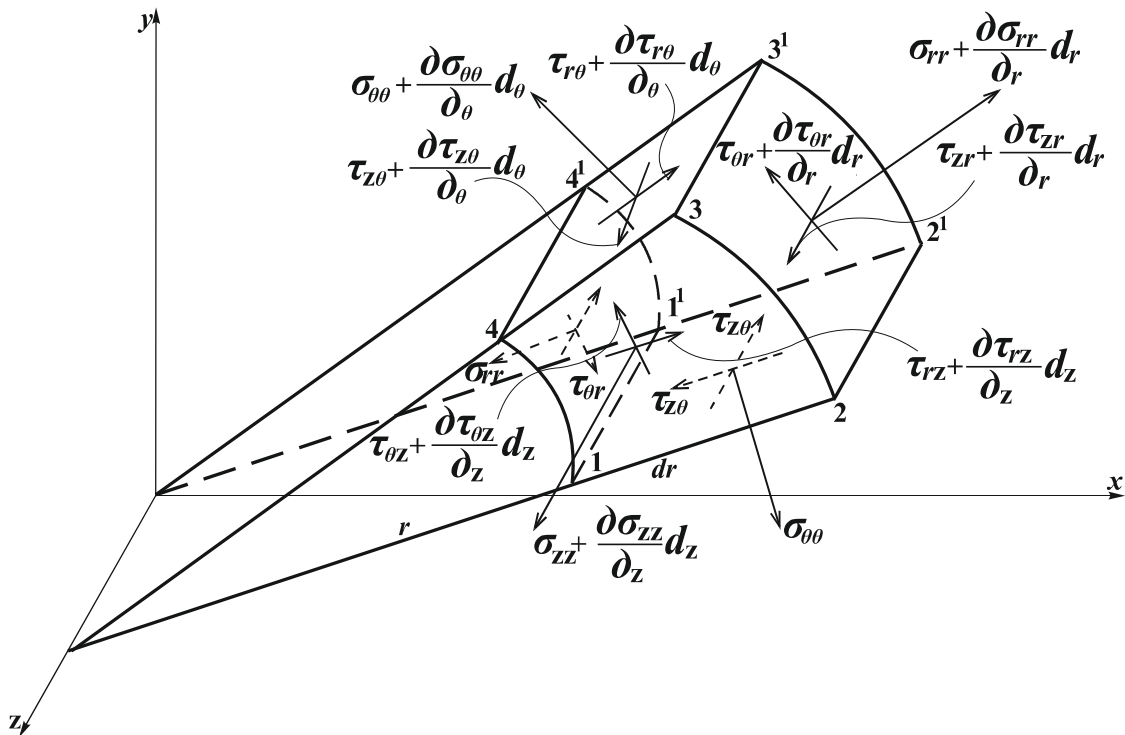


Рис. 2.12

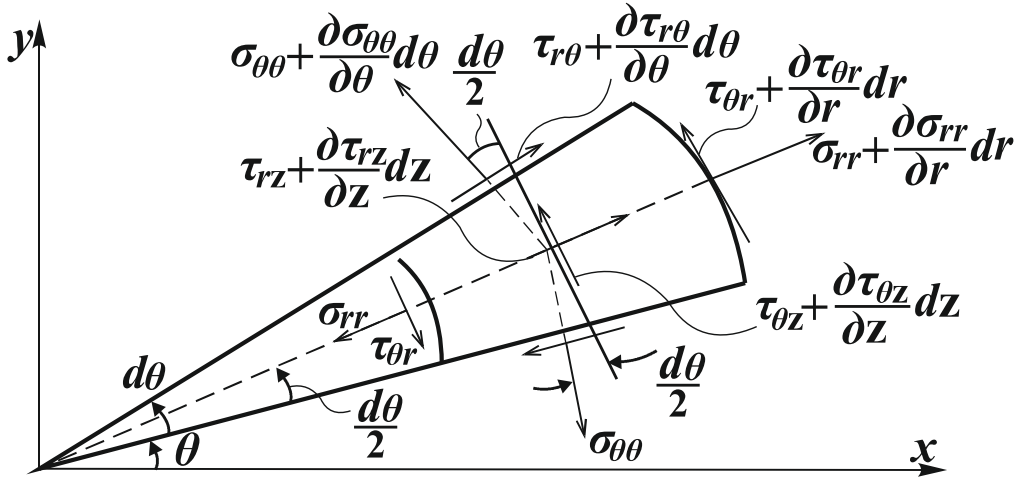


Рис. 2.13

$$\begin{aligned}
 & \left( \sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma'_{rr} r dr d\theta + \\
 & + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau_{r\theta} dr dz + \\
 & + \left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r dr d\theta - \tau_{rz} r dr d\theta - \\
 & - \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \frac{1}{2} d\theta - \sigma_{\theta\theta} dr dz \frac{1}{2} d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

После преобразований, получим:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0.$$

Составляем сумму проекций на ось  $\tilde{\theta}$ :

$$\begin{aligned}
 & \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \sigma_{\theta\theta} dr dz + \\
 & + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{\theta r} r d\theta dz + \\
 & + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} dr dz \frac{d\theta}{2} + \\
 & + \left( \tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} dz \right) r dr d\theta - \tau_{\theta r} r dr d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Преобразовав, выражения получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} dr d\theta dz + \\ & + \tau_{r\theta} dr d\theta dz + \tau_{\theta r} dr d\theta dz + \\ & + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} r dr d\theta dz = 0. \end{aligned}$$

Окончательно найдем:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0. \quad (2.36)$$

Третье уравнение, проекция на ось z:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) r dr d\theta - \sigma_{zz} r dr d\theta + \\ & + \left( \tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{zr} r d\theta dz + \\ & + \left( \tau_{z\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau_{z\theta} dr dz = 0. \end{aligned}$$

Преобразовывая, найдем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} r dr d\theta dz + \tau_{zz} dr d\theta dz + \\ & + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} dr d\theta dz = 0. \end{aligned}$$

Сократим на общий множитель и будем иметь:

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, три уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

При рассмотрении плоской задачи были выполнены все необходимые обстоятельства, связанные с определением соотношений между величинами в координатах  $x$ ,  $y$  и  $r$ ,  $\theta$ . В плоской задаче не требовалась ось  $z$ . В изгибаемых пластинах ось  $z$  используется, поэтому необходимо добавить зависимости от нее. При этом следует учесть, что все условия, зависящие от координаты  $z$ , аналогичны условиям в прямоугольных координатах. Это дает возможность применить соотношения, которые были получены при рассмотрении изгибаемой пластины в этих координатах, поэтому результаты использования гипотез будут подобны.

В первую очередь учтем, что перемещение в направлении оси  $z$  не зависит от этой координаты, т.е.  $W(x,y)$ . Кроме того, углы сдвига, в плоскостях перпендикулярных пластине, равны нулю. В цилиндрических координатах это  $\gamma_{rz}$  и  $\gamma_{\theta z}$ , которые имеют выражения:

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

Учитывая, что  $\gamma_{rz} = 0$ ,  $\gamma_{\theta z} = 0$ , найдем:

$$U_r = -z \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$U_\theta = -z \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

По формулам (1.46) запишем соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right);$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta.$$



Подставляя сюда значения  $U_r$  и  $U_\theta$ , найдем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= -z \frac{\partial^2}{\partial r^2} W; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= -z \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W; \\ \gamma_{r\theta} &= -z \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) W.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Имея выражения напряжений через деформации:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{rr} + \mu \varepsilon_{\theta\theta}); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}); \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \gamma_{r\theta},\end{aligned}$$

получим значения напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] W; \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} (1-\mu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] W.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Подставим эти выражения напряжений в первые два уравнения равновесия (2.37), из которых выразим  $\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}$  и  $\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}$ . Они равны:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] W; \\ \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right] W.\end{aligned}$$

Выражение в скобках можно преобразовать в другие, более простые выражения:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right];$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right].$$

Записанные соотношения представляют собой гармонические выражения, которые обозначаются  $\nabla^2 W$ , учитывая это, получим:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W;$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 W.$$

Интегрируя эти выражения по  $z$ , найдем:

$$\tau_{rz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W + f_1(r, \theta);$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \nabla^2 W + f_2(r, \theta).$$
(2.40)

Для нахождения неизвестных производных функций  $f_1(r, \theta)$  и  $f_2(r, \theta)$ , воспользуемся граничными условиями по двум плоскостям

пластины, а именно, при  $z = \pm \frac{h}{2}$  касательные нагрузки равны нулю:

$$\tau_{rz} = 0;$$

$$\tau_{\theta z} = 0;$$

$$\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W + f_1(r, \theta) = 0;$$

$$\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 W + f_2(r, \theta) = 0.$$

Отсюда получим:

$$f_1(r, \theta) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W;$$

$$f_2(r, \theta) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 W.$$

Подставляем их в выражение касательных напряжений:

$$\tau_{rz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W;$$

$$\tau_{\theta z} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 W.$$

Выразим через касательные напряжения поперечные усилия  $Q_{rz}$  и  $Q_{\theta z}$ :

$$Q_{rz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz; \quad Q_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\theta z} dz.$$

Подставляем предыдущие выражения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{\theta z}$  и, выполнив интегрирование, найдем:

$$\begin{aligned} Q_{rz} &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W; \\ Q_{\theta z} &= -D \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 W, \end{aligned} \tag{2.41}$$

где  $D$  принято равным:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu)}. \tag{2.42}$$

$D$  – представляет собой характеристику жесткости пластины.

Из третьего уравнения равновесия (2.37) выразим  $\sigma_{zz}$ :

$$\sigma_{zz} = -\int \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tau_{rz} \right) dz + f_3(r, \theta).$$

Подставим в это равенство выражения касательных напряжений:

$$\sigma_{zz} = \int \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \nabla^2 W dz + f_3(r, \theta).$$

Учитывая, что выражение под интегралом в скобках равно  $\nabla^2$ , получим:

$$\sigma_{zz} = \int \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \nabla^2 \nabla^2 W dz + f_3(r, \theta).$$

Принимая во внимание, что  $W$  от  $z$  не зависит, запишем:

$$\sigma_{zz} = \nabla^4 W \int \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} dz + f_3(r, \theta).$$

После интегрирования будем иметь:

$$\sigma_{zz} = \nabla^4 W \frac{3h^2 z - 4z^3}{24(1-\mu^2)} + f_3(r, \theta).$$

Для определения  $f_3(r, \theta)$  используем граничные условия по верхней и нижней плоскости пластины:

$$- \text{при } z = -\frac{h}{2},$$

$$\sigma_{zz} = -q_{zв};$$

$$- \text{при } z = +\frac{h}{2},$$

$$\sigma_{zz} = q_{zн}.$$

Используя значение  $\sigma_{zz}$ , найдем:

$$-q_{zв} = -\nabla^4 W \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)} + f_3(r, \theta);$$

$$q_{zн} = \nabla^4 W \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)} + f_3(r, \theta).$$

Определим сумму двух нагрузок  $q_{z6} + q_{zH} = q_z$ , равную общей вертикальной нагрузке:

$$q_z = \nabla^4 W 2 \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)}$$

или

$$q_z = D \nabla^4 W,$$

откуда будет:

$$\nabla^4 W = \frac{1}{D} q_z. \quad (2.43)$$

Если взять разность нагрузок  $q_{zH}$  и  $q_{z6}$ , то выражение будет равно:

$$q_{zH} - q_{z6} = 2f_3(r, \theta).$$

Отсюда можно найти  $f_3(r, \theta)$ :

$$f_3(r, \theta) = \frac{1}{2}(q_{zH} - q_{z6}).$$

Следует отметить, что значение  $f_3(r, \theta)$  нам не потребуется. Основным выводом есть полученный результат, когда вертикальная нагрузка приложенная на нижней и верхней плоскостях принята как единая целая, т.е.  $q_{z6} + q_{zH} = q_z$ .

При этом получено основное уравнение:

$$\nabla^4 W = \frac{1}{D} q_z$$

или

(2.44)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{D} q_z.$$

Решение данного уравнения задачи сложное, могут быть использованы различные приближенные методы. Рассмотрим в следующем параграфе более простой вариант, а именно, круглая пластина при симметричной нагрузке и симметричных граничных условиях.

После определения  $W$  можно найти все необходимые усилия, а именно изгибающие моменты  $M_r$  и  $M_\theta$ , и моменты кручения  $M_{r\theta} = M_{\theta r}$ . Изгибающие моменты определяются через нормальные напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$ :

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} z dz;$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} z dz.$$

Момент кручения:

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{r\theta} z dz.$$

Подставляя значения напряжений и интегрируя, получим:

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] W;$$

$$M_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] W; \quad (2.45)$$

$$M_{r\theta} = -D(1-\mu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] W.$$

Поперечные усилия:

$$Q_{rz} = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W;$$

$$Q_{\theta z} = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 W.$$

Лекция 18, 19. **РАСЧЕТ КРУГЛЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПЛАСТИН НА ИЗГИБ**

Сначала определим общее решение уравнения при условии, что неизвестные функции не зависят от координаты  $\theta$ . В этом случае уравнение (2.44) будет иметь вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{1}{D} q_z.$$

Учитывая, что коэффициенты являются переменными, введем новую переменную:

$$t = \ln r, \quad r = e^t, \quad \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} = e^{-t}.$$

Подобное решение было выполнено при решении плоской задачи в координатах. Повторим это решение, сократив некоторые преобразования:

$$\frac{dW}{dr} = e^{-t} \frac{d}{dt};$$

$$\frac{d^2 W}{dr^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right).$$

Учитывая это, найдем:

$$\left[ e^{-2t} \frac{d^2}{dt^2} \right] \left[ e^{-2t} \frac{d^2 W}{dt^2} \right] = \frac{1}{D} q_z.$$

Далее получим:

$$\frac{d^4 W}{dt^4} - 4 \frac{d^3 W}{dt^3} + 4 \frac{d^2 W}{dt^2} = \frac{1}{D} q_z.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = 0;$$

$$k^2 (k^2 - 4k + 4) = 0;$$

$$k_{1,2} = 0;$$

$$k_{3,4} = 2.$$

Функции решения однородного уравнения равны:

$$e^{0t} = 1; 1 \cdot t; e^{2t}; te^{2t}.$$

Перейдем к переменной  $r$  и получим:

$$1; \ln r; r^2; r^2 \ln r.$$

Определим частное решение от симметричной нагрузки, которая вдоль любого радиуса меняется по любому степенному закону. Нагрузка изображена на рис. 2.14.

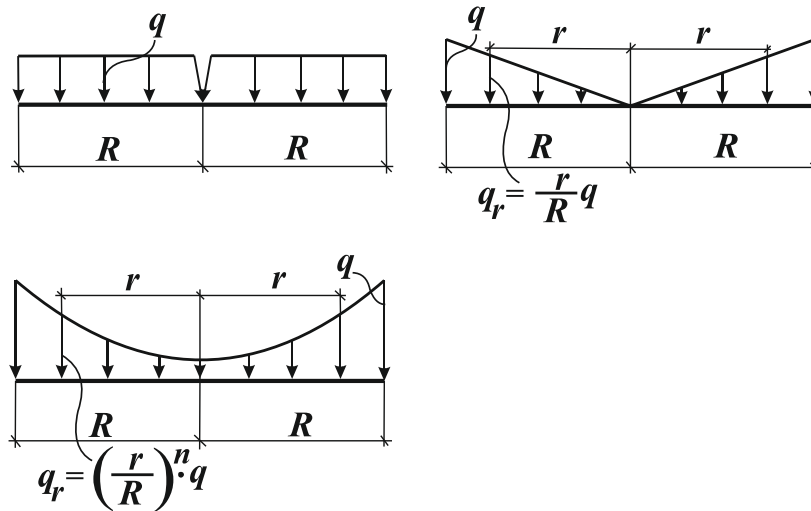


Рис 2.14

При такой нагрузке частное решение дифференциального уравнения имеет вид.

$$W^* = \frac{qr^{n+4}}{D(n+2)^2(n+4)^2 R^n}.$$

В правильности этого выражения можно убедиться, если подставить его в дифференциальное уравнение, которое записано далее.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{1}{D} q \left( \frac{r}{R} \right)^n.$$



Общее решение имеет вид:

$$W = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \frac{q r^{n+4}}{D(n+2)^2 (n+4)^2 R^n}. \quad (2.12)$$

Найдем остальные необходимые выражения:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = 2C_2 r + C_3 \frac{1}{r} + C_4 (2r \ln r + r) + \frac{q r^{n+3}}{D(n+2)^2 (n+4) R^n};$$

$$M_r = -D \left\{ 2(1+\mu) C_2 - (1-\mu) \frac{1}{r^2} C_3 + C_4 [2(1+\mu) \ln r + (3+\mu)] + \frac{q r^{n+2} (n+3+\mu)}{(n+2)^2 (n+4) R^n} \right\};$$

$$M_\theta = -D \left\{ 2(1+\mu) C_2 - (1-\mu) \frac{1}{r^2} C_3 + C_4 [2(1+\mu) \ln r + (1+3\mu)] + \frac{q r^{n+2} (1+\mu(n+3))}{(n+2)^2 (n+4) R^n} \right\};$$

$$Q_{rz} = -D \left[ \frac{4C_4}{r} + \frac{q}{(n+2) R^n} \right].$$

Рассмотрим решение пластины, изображенной на рис. 2.15:

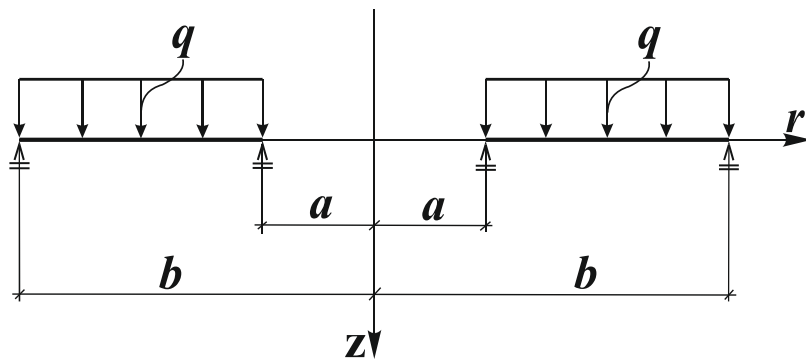


Рис. 2.15

Общее решение пластины имеет вид:

$$W = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}.$$

Запишем граничные условия:

$$r = a, W = 0, M_r = 0;$$

$$r = b, W = 0, M_r = 0$$

Учтем в граничных условиях функцию  $W$ .

$$C_1 + C_2 a^2 + C_3 \ln a + C_4 a^2 \ln a + \frac{qa^4}{64D} = 0.$$

$$-D\left\{2(1+\mu)C_2 - (1-\mu)\frac{1}{a^2}C_3 + C_4\left[2(1+\mu)\ln a + (3+\mu)\right] + \frac{a^2 q(3+\mu)}{16D}\right\} = 0.$$

$$C_1 + C_2 b^2 + C_3 \ln b + C_4 b^2 \ln b + \frac{qb^4}{64D} = 0.$$

$$-D\left\{2(1+\mu)C_2 - (1-\mu)\frac{1}{b^2}C_3 + C_4\left[2(1+\mu)\ln b + (3+\mu)\right] + \frac{b^2 q(3+\mu)}{16D}\right\} = 0.$$

Далее необходимо подставить численные значения констант  $a$ ;  $b$ ;  $q$ ;  $D$ ;  $\mu$  и решить в числах систему уравнений, после чего, по приведенным формулам, могут быть найдены искомые величины перемещений и усилий.

Рассмотрим вторую задачу. Ее схема изображена на рис. 2.16.

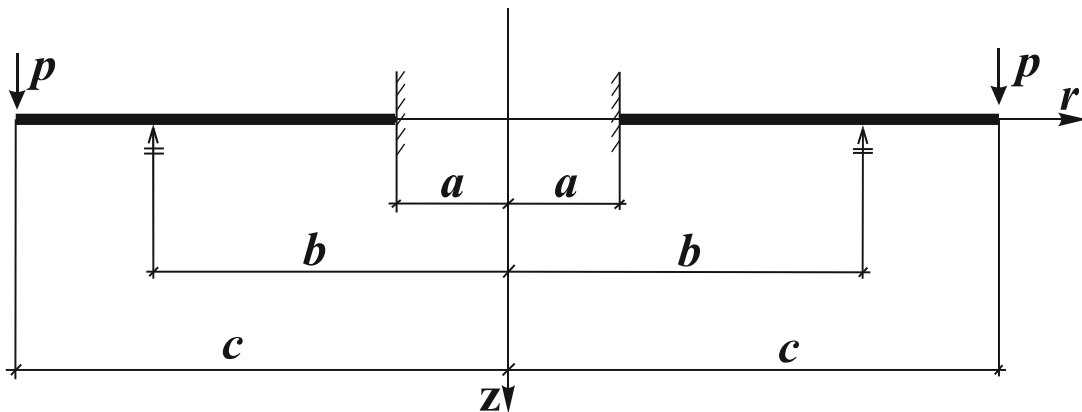


Рис. 2.16

Пластина круглая, в центре существует отверстие, радиус которой равен «а». По контуру отверстия жесткое закрепление. По кругу радиуса «b» размещена шарнирная опора. Крайний край пластины, радиус которого равен «с», свободный. По всей окружности этого радиуса приложена равномерно распределенная силовая нагрузка  $P$ .

При расчете подобной пластины следует принять во внимание, что она состоит из двух частей. Одна часть от радиуса «а» до «b», вторая часть от «b» до «с». Для каждой части пластины следует принять свою функцию перемещений. Их выражения соответствуют формуле (2.12). Отличаться друг от друга они будут значениями констант  $C$ , которые обозначим для участка радиуса «а» и «b»  $C_{11}; C_{21}; C_{31}; C_{41}$ . Для второго участка примем их равными  $C_{12}; C_{22}; C_{32}; C_{42}$ . Учитывая это, запишем выражения перемещений:

$$W_1 = C_{11} + C_{21}r^2 + C_{31} \ln r + C_{41}r^2 \ln r;$$

$$W_2 = C_{21} + C_{22}r^2 + C_{32} \ln r + C_{42}r^2 \ln r.$$

Для получения численного решения, необходимо найти константы  $C_{ij}$ . Это требует составления уравнений на основании граничных условий. Их общее количество должно равняться восьми.

Как известно, на каждом контуре пластины можно записать два условия. Очевидными есть по два условия на кругах радиусов «а» и «с». По кругу радиуса «b» можно составить четыре условия, учитывая способы соединения двух участков пластины. Запишем граничные условия:

– при  $r = a$ ,

$$1) W_1 = 0;$$

$$2) \frac{\partial W_1}{\partial r} = 0.$$

Это соответствует жесткому закреплению:

– при  $r = c$ ,

$$3) M_r = 0;$$

$$4) Q_{rz} = 0.$$

Подобные условия имеют место на свободном краю  
– при  $r = b$ ,

$$5) W_1 = 0;$$

$$6) W_2 = 0;$$

$$7) \frac{\partial W_1}{\partial r} = \frac{\partial W_2}{\partial r};$$

$$8) M_{r1} = M_{r2}.$$

Записанные соотношения обеспечивают жесткое соединение двух участков пластины. При этом, учитывая наличие шарнирной опоры, можно утверждать, что перемещение каждого участка равно нулю. Это обеспечивает совместную нулевую величину перемещений.

Запишем граничные условия в развернутом виде, учитывая выражение величин, входящих в них:

$$1) C_{11} + C_{21}a^2 + C_{31} \ln a + C_{41}a^2 \ln a = 0;$$

$$2) 2C_{21}a + C_{31} \frac{1}{a} + C_{41} (2a \ln a + a) = 0;$$

$$3) 2(1 + \mu)C_{22} - (1 - \mu) \frac{1}{c^2} C_{32} + C_{42} [2(1 - \mu) \ln c + (1 + 3\mu)] = 0;$$

$$4) -D \frac{4C_{42}}{c} = P;$$

$$5) C_{11} + C_{21}b^2 + C_{31} \ln b + C_{41}b^2 \ln b = 0;$$

$$6) C_{12} + C_{22}b^2 + C_{32} \ln b + C_{42}b^2 \ln b = 0;$$

$$7) 2C_{21}b + C_{31} \frac{1}{b} + C_{41} (2b \ln b + b) = \\ = 2C_{22}b + C_{32} \frac{1}{b} + C_{42} (2b \ln b + b);$$

$$8) 2(1 + \mu)C_{21} + (1 - \mu)C_{31} \frac{1}{b^2} + C_{41} [2(1 + \mu) \ln b + (1 + 3\mu)] = \\ = 2(1 + \mu)C_{22} + (1 - \mu)C_{32} \frac{1}{b^2} + C_{42} [2(1 + \mu) \ln b + (1 + 3\mu)].$$

Считая, что все размеры пластины и нагрузки, заданы в численном виде, необходимо подставить их значение в систему уравнений и найти ее решение, определить все  $C_{ij}$ . После чего могут быть найдены величины, связанные с расчетом пластины.

Следующая задача - схема пластины показана на рис. 2.17.

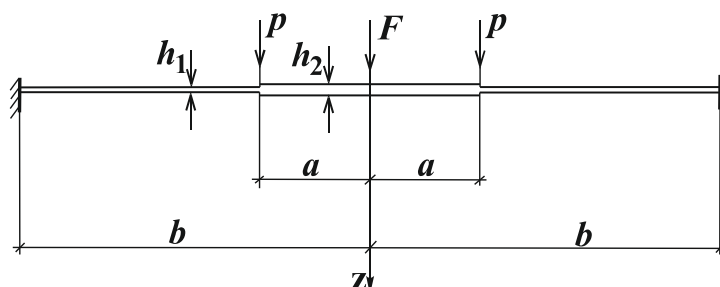


Рис. 2.17

Круглая пластина жестко закреплена по всему наружному периметру. На разных участках она имеет разную толщину  $h_1$  и  $h_2$ . По радиусу «а», где меняется толщина пластины, приложена равномерно распределенная нагрузка  $P$  по всему кругу, имеющему радиус «а». Кроме того в центре пластины приложена сосредоточенная сила  $F$ .

Принимая во внимание переменную толщину, необходимо пластину разделить на две части. Одна из них имеет радиус «а» и пластина сплошная. Вторая представляет собой пластину с отверстием, радиус которого равен «а». На нижней части пластины принимается своя функция прогиба.

Как и в предыдущей задаче, в них войдут восемь неизвестных констант, которые, как обычно, определяются из граничных условий. Запишем оба выражения перемещений:

$$W_1 = C_{11} + C_{21}r^2 + C_{31} \ln r + C_{41}r^2 \ln r;$$

$$W_2 = C_{12} + C_{22}r^2 + C_{32} \ln r + C_{42}r^2 \ln r.$$

Отметим определенную особенность записи граничных условий для сплошной пластины. По ее внешнему контуру граничные условия записываются как обычно. В данной задаче это условие сведения двух участков.

Особенность имеет место в центральной точке. В ней  $r = 0$ , а это говорит о том, что функции  $\ln r$  равны в этой точке минус бесконечности. Поэтому константы при этих функциях следует принять

равными нулю, т.е.  $C_{31} = C_{41} = 0$ . Однако, это только в том случае, когда в центральной точке не приложена сосредоточенная нагрузка, а если она есть, то условия меняются. В этом случае необходимо учесть равновесие элемента, находящегося в этой точке.

Для этого выделим бесконечно малый элемент и запишем условия равенства нулю суммы внутренних усилий и внешней нагрузки на этом участке рис. 2.18.

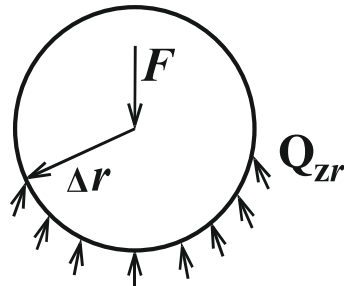


Рис. 2.18

Условие равновесия имеет вид:

$$F - Q_{zr} 2\pi\Delta r = 0.$$

Подставим значения  $Q_{zr}$  :

$$F + D \frac{4C_{41}}{\Delta r} 2\pi\Delta r = 0,$$

откуда получим:

$$C_{41} = -\frac{F}{8\pi D}.$$

Таким образом, найдена одна константа  $C_{41}$ . После этого необходимо составить шесть граничных условий:

– при  $r = b$ ,

- 1)  $W_2 = 0$ ;
- 2)  $\frac{\partial W_2}{\partial r} = 0$ ;

– при  $r = a$ ,

$$3) W_1 = W_2;$$

$$4) \frac{\partial W_1}{\partial r} = \frac{\partial W_2}{\partial r};$$

$$5) M_{r1} = M_{r2};$$

$$6) Q_{zr1} = Q_{zr2}.$$

Запишем эти равенства в развернутом виде. При этом следует учесть, что  $C_{31} = 0$ , а  $C_{41}$  – не равно нулю, поэтому его следует в уравнении учитывать:

$$1) C_{12} + C_{22}b^2 + C_{32} \ln b + C_{42}b^2 \ln b = 0;$$

$$2) 2C_{22}b + C_{32} \frac{1}{b} + C_{42} (2b \ln b + b) = 0;$$

$$3) C_{11} + C_{21}a^2 + C_{41}a^2 \ln a = \\ = C_{12} + C_{22}a^2 + C_{32} \ln a + C_{42}a^2 \ln a;$$

$$4) 2C_{21}a + C_{41}(2a \ln a + a) = \\ = 2C_{22}a + C_{32} \ln a + C_{42}(2a \ln a + a);$$

$$5) 2(1 + \mu)C_{21} + C_{41} [2(1 + \mu) \ln a + (1 + 3\mu)] = \\ = 2(1 + \mu)C_{22} + (1 - \mu)C_{32} \frac{1}{a^2} + C_{42} [2(1 + \mu) \ln a + (1 + 3\mu)];$$

$$6) D \frac{4C_{41}}{a} = D \frac{4C_{42}}{a}.$$

Получили шесть уравнений, из которых найдены шесть констант. Далее, по известным формулам найдем перемещения и усилия, т.е. решим задачу.

## Лекция 20. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

Были использованы ортогональные криволинейные координаты, которые носят название цилиндрических координат. Они применяются при расчете круглых пластин. Целесообразность их использования, в этих случаях, связана с тем, что координатные линии совпадают с формами пластин. Это дает возможность упростить решение задачи.

Однако, формы конструкций могут иметь другие различные формы, поэтому будет рассмотрен общий вариант (рис. 3.1).

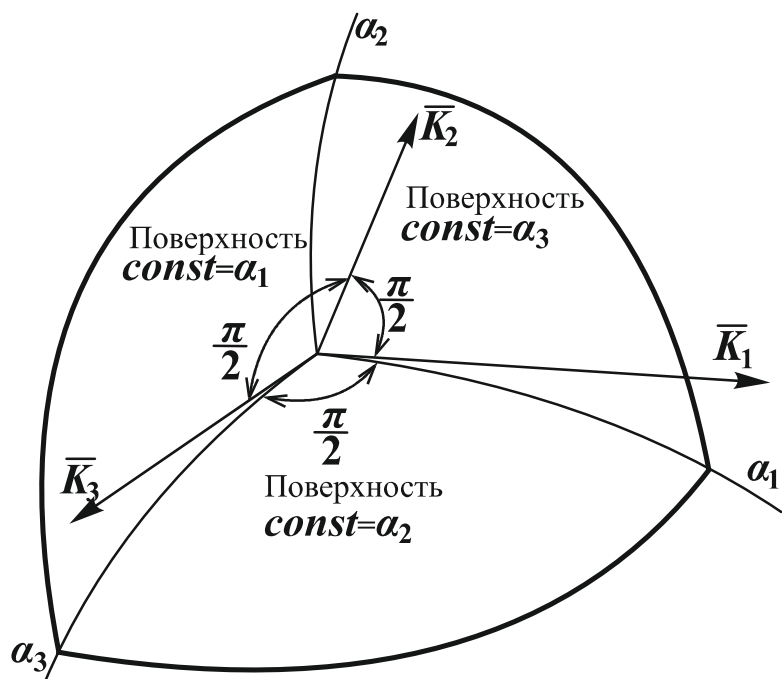


Рис. 3.1

Координатные линии криволинейные, но они взаимно перпендикулярны. Если в любой точке их пересечения провести касательные к ним, то между всеми тремя касательными углы будут равны  $\frac{\pi}{2}$ . Будут рассмотрены только ортогональные координаты, так как они более простые и именно они, в подавляющем большинстве случаев, используются.

В первую очередь введем соотношения между криволинейными параметрами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и прямолинейными  $x, y, z$ .



$$\begin{aligned}
 x &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \\
 y &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \\
 z &= f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Отметим, что координатные линии  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  будут находиться на поверхности  $const = \alpha_1$ . Аналогичны другие координатные линии.

Касательные векторы  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  принимаются единичными и, как было отмечено ранее, они взаимно перпендикулярны. Следует обратить внимание, что положение векторов  $\vec{k}_1; \vec{k}_2; \vec{k}_3$  в разных точках будет различным.

Три уравнения (3.1) могут быть заменены одним вектором  $\vec{R}$ , который зависит от  $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ , т.е.  $\vec{R}(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ .

Этот вектор может быть представлен в следующем виде:

$$\vec{R} = \vec{k}_1 n_1 \alpha_1 + \vec{k}_2 n_2 \alpha_2 + \vec{k}_3 n_3 \alpha_3.
 \tag{3.2}$$

Суть новых величин  $n_1, n_2, n_3$  будет объяснена далее.

Дифференциал от вектора  $\vec{R}$  по  $\alpha_1$  равен:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 = \vec{k}_1 dS.
 \tag{3.3}$$

Отметим, что проекции производной  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1}$  на оси  $x, y, z$  равны

следующим величинам:  $\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}; \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}; \frac{\partial z}{\partial \alpha_1}$ .

Модуль вектора  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1}$  обозначим  $n_1$ , т.е.  $n_1 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} \right|$ . Он будет

равен корню квадратному от суммы квадратов записанных производных:

$$n_1 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right)^2}.
 \tag{3.4}$$

Запишем модуль вектора  $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1}$ , используя формулу (3.3):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha} \right| d\alpha &= |\bar{k}| dS \text{ или } n_1 d\alpha_1 = 1 \cdot dS, \text{ значит:} \\ \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1} \right| d\alpha_1 &= |\bar{k}_1| n_1 d\alpha_1; \\ |\bar{k}_1| &= \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Аналогично можно определить:

$$\begin{aligned} n_2 &= \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right)^2}; \\ \bar{k}_2 &= \frac{1}{n_2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2}; \\ n_3 &= \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right)^2}; \\ \bar{k}_3 &= \frac{1}{n_3} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Подобные соотношения можно определить из формулы (3.2), если продифференцировать вектор  $\bar{R}$  по  $\alpha_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1} &= \bar{k}_1 \cdot n_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_1} = \bar{k}_1 \cdot n_1; \\ \bar{k}_1 &= \frac{1}{n_1} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1}; \\ \bar{k}_2 &= \frac{1}{n_2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2}; \\ \bar{k}_3 &= \frac{1}{n_3} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим определение производных единичных векторов  $\bar{k}_1; \bar{k}_2; \bar{k}_3$ . Их производную можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial \bar{k}_j}{\partial \alpha_i} = C_{\tau ji}^{(1)} \bar{k}_1 + C_{\tau ji}^{(2)} \bar{k}_2 + C_{\tau ji}^{(3)} \bar{k}_3 = \sum_{m=1}^{m=3} C_{\tau ji}^{(m)} \quad (3.8)$$

$C_{\tau ji}^{(m)}$  – представляет собой проекцию вектора  $\frac{\partial \bar{k}_j}{\partial \alpha_i}$  на направление

оси  $\bar{k}_m$ , учитывая это, можно записать:

$$C_{\tau ji}^{(m)} = \bar{k}_m \frac{\partial \bar{k}_j}{\partial \alpha_i}. \quad (3.9)$$

Запишем это выражение в другой форме:

$$C_{\tau ji}^{(m)} = \bar{k}_m \frac{\partial \bar{k}_j}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{n_m n_j} \left[ n_m \frac{\partial (n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i} \bar{k}_m - n_m \frac{\partial n_j}{\partial \alpha_i} \bar{k}_m \cdot \bar{k}_j \right]. \quad (3.10)$$

Проверить правильность записанного соотношения просто. Развернув производную первого члена, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_m n_j} \left[ n_m \frac{\partial n_j}{\partial \alpha_i} \bar{k}_j \cdot \bar{k}_m + n_m \cdot n_j \frac{\partial \bar{k}_j}{\partial \alpha_i} \bar{k}_m - n_m \frac{\partial n_j}{\partial \alpha_i} \bar{k}_m \bar{k}_j \right] = \\ & = \frac{1}{n_m n_j} \left[ n_m \cdot n_j \frac{\partial \bar{k}_j}{\partial \alpha_i} \bar{k}_m \right] = \frac{\partial \bar{k}_j}{\partial \alpha_i} \bar{k}_m \end{aligned}$$

Это совпадает с формулой (3.9).

Для определения  $C_{\tau ji}^{(m)}$  необходимо определить скалярное произведение:

$$n_m \bar{k}_m \cdot \frac{\partial (n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i}.$$

В связи с чем выполним следующую операцию – подставим в тождество:

$$\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j},$$

соотношение:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_i} = n_i \bar{k}_i, \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_j} = n_j \bar{k}_j,$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} n_j \bar{k}_j;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} n_i \bar{k}_i.$$

Поскольку левые части этих равенств соответствуют тождеству, то отсюда следует:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (n_i \bar{k}_i) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (n_j \bar{k}_j). \quad (3.11)$$

Получив эти соотношения, запишем скалярно произведение в следующем виде:

$$n_m \bar{k}_m \frac{\partial (n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2} \left[ n_m \bar{k}_m \frac{\partial (n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i} + n_m \bar{k}_m \frac{\partial (n_i \bar{k}_i)}{\partial \alpha_j} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (n_m n_j \bar{k}_m \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial (n_m n_i \bar{k}_m \bar{k}_i)}{\partial \alpha_j} - n_j \bar{k}_j \frac{\partial (n_m \bar{k}_m)}{\partial \alpha_i} - \right. \\ \left. - n_i \bar{k}_i \frac{\partial (n_m \bar{k}_m)}{\partial \alpha_j} \right]. \quad (3.12)$$

Объединим и преобразуем два последних члена, учитывая соотношение (3.11), на основании которого можно записать:

$$\frac{\partial (n_m \bar{k}_m)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial (n_i \bar{k}_i)}{\partial \alpha_m};$$

$$\frac{\partial (n_m \bar{k}_m)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial (n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_m}.$$

Это дает возможность два последних члена равенства (3.12) записать в следующем виде:

$$-n_j \bar{k}_j \frac{\partial(n_m \bar{k}_m)}{\partial \alpha_i} - n_i \bar{k}_i \frac{\partial(n_m \bar{k}_m)}{\partial \alpha_j} = -n_j \bar{k}_j \frac{\partial(n_i \bar{k}_i)}{\partial \alpha_m} - n_i \bar{k}_i \frac{\partial(n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_m}.$$

Последнюю сумму двух членов можно записать как один член, а именно:

$$-n_j \bar{k}_j \frac{\partial(n_i \bar{k}_i)}{\partial \alpha_m} - n_i \bar{k}_i \frac{\partial(n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_m} = -\frac{\partial(n_i n_j \bar{k}_i \bar{k}_j)}{\partial \alpha_m}.$$

Учтем это в равенстве (3.12). В результате получим: необходимое выражение скалярного произведения:

$$n_m \bar{k}_m \frac{\partial(n_j \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(n_m n_i \bar{k}_m \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial(n_m n_i \bar{k}_m \bar{k}_i)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial(n_i n_j \bar{k}_i \bar{k}_j)}{\partial \alpha_m} \right]. \quad (3.13)$$

Учтем это в формуле (3.10), по которой будем определять значение  $C_{\tau ji}^{(m)}$ :

$$C_{\tau ji}^{(m)} = \frac{1}{n_m n_j} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(n_m n_j \bar{k}_m \bar{k}_j)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial(n_m n_i \bar{k}_m \bar{k}_i)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial(n_i n_j \bar{k}_i \bar{k}_j)}{\partial \alpha_m} \right] - n_m \frac{\partial n_j}{\partial \alpha_i} \bar{k}_m \bar{k}_j \right\}. \quad (3.14)$$

При использовании формулы (3.14) следует учитывать следующее:

$$\bar{k}_p \bar{k}_q = \begin{cases} 1 & \text{при } p = q \\ 0 & \text{при } p \neq q \end{cases}. \quad (3.15)$$

Общее количество выражений  $C_{\tau ji}^{(m)}$ , которые будут определяться, как было сказано, по формуле (3.14), зависят от числа индексов  $i, j, m$ . Каждое из них имеет три значения от 1 до 3. В этом

случае общее количество отличающихся друг от друга индексов, будет 27, т.е. необходимо найти 27 значений  $C_{1ji}^{(m)}$ .

Выполним вычисление некоторых величин  $C_{1ji}^{(m)}$ . Предложим  $i=j=m=1$ . Запишем выражение (3.14), соответствующее этим величинам.

$$\begin{aligned} C_{111}^{(1)} &= \frac{1}{n_1 n_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(n_1 n_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(n_1 n_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(n_1 n_1)}{\partial \alpha_1} \right] - n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_1} \right\} = \\ &= \frac{1}{n_1 n_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_1} + n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_1} \right] - n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_1} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Если  $i=1, j=1, m=2$ . Учитывая (3.15), запишем:

$$\begin{aligned} C_{111}^{(2)} &= \frac{1}{n_2 n_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ -\frac{(n_1 n_1)}{\partial \alpha_2} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{n_2 n_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ -n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} - n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \right] \right\} = -\frac{1}{n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2}. \end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить остальные члены. В результате получим:

$$\begin{aligned} C_{111}^{(1)} &= C_{\tau 22}^{(2)} = C_{133}^{(3)} = C_{112}^{(1)} = C_{\tau 21}^{(2)} = C_{\tau 13}^{(1)} = C_{131}^{(3)} = C_{\tau 23}^{(2)} = C_{\tau 32}^{(3)} = \\ &= C_{\tau 23}^{(1)} = C_{132}^{(1)} = C_{\tau 31}^{(2)} = C_{\tau 13}^{(2)} = C_{112}^{(3)} = C_{\tau 21}^{(3)} = 0; \\ C_{111}^{(2)} &= C_{121}^{(1)} = \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2}; \\ C_{122}^{(1)} &= C_{\tau 12}^{(2)} = \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1}; \\ C_{\tau 33}^{(1)} &= C_{\tau 13}^{(3)} = \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_1}; \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$-C_{\tau 11}^{(3)} = C_{\tau 31}^{(1)} = \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3};$$

$$-C_{\tau 22}^{(3)} = C_{132}^{(2)} = \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3};$$

$$-C_{133}^{(2)} = C_{\tau 23}^{(3)} = \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_2}.$$

Далее по формуле (3.8), имея значения  $C_{1ji}^{(m)}$ , найдем производные от единичных векторов  $\bar{k}_j$ , которые являются касательными к координатным линиям. Проведем вычисление одного из них:

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_1} = C_{111}^{(1)} \bar{k}_1 + C_{111}^{(2)} \bar{k}_2 + C_{\tau 11}^{(3)} \bar{k}_3.$$

Используя значения (3.16), найдем:

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_1} = 0 \cdot \bar{k}_1 - \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \bar{k}_2 - \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} \bar{k}_3.$$

Аналогично будут найдены все остальные:

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \bar{k}_2 - \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} \bar{k}_3;$$

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} \bar{k}_2;$$

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_1} \bar{k}_3;$$

$$\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \bar{k}_1;$$

$$\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} \bar{k}_1 - \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} \bar{k}_3; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{n_2} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_2} \bar{k}_3;$$

$$\frac{\partial \bar{k}_3}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} \bar{k}_1;$$

$$\frac{\partial \bar{k}_3}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} \bar{k}_2;$$

$$\frac{\partial \bar{k}_3}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_1} \bar{k}_1 - \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_2} \bar{k}_2.$$

Эти значения далее будут часто использоваться, найдем еще два соотношения на основании (3.17) или тождества:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_2} \right).$$

Учитывая (3.17), получим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{n_3^2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} \right) - \frac{1}{n_2 n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} = 0. \quad (3.18)$$

На основании двух других аналогичных тождеств можно определить еще четыре подобных соотношений.

## Лекция 21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ

Перейдем к определению деформаций. Для этого рассмотрим положение двух бесконечно близких производных точек до деформации и после. До деформации назовем их  $M$  и  $N$ , а после деформации  $M^*$  и  $N^*$  (рис. 3.2).

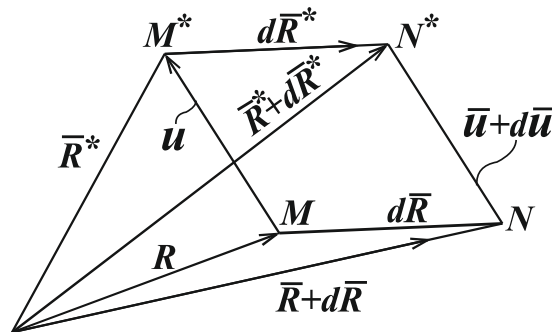


Рис. 3.2



Положение точки  $M$  до деформации определяется радиус-вектором  $\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , а после деформации вектором  $\bar{R}^*$ , который равен:

$$\bar{R}^* = \bar{R} + \bar{U}. \quad (3.19)$$

Вектор  $\bar{U}$  есть линейное перемещение точки. Его можно представить в виде суммы проекций на локальные координатные оси умноженные на единичные векторы:

$$\bar{U} = U_1 \bar{k}_1 + U_2 \bar{k}_2 + U_3 \bar{k}_3. \quad (3.20)$$

Точка  $N$  до деформации определяется радиус-вектором  $(\bar{R} + d\bar{R})$ . При этом данное выражения можно представить в следующем виде:

$$\bar{R} + d\bar{R} = \bar{R} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3. \quad (3.21)$$

Используя формулы (3.5) и (3.6), получим:

$$\begin{aligned} \bar{R} + d\bar{R} &= \bar{R} + \bar{k}_1 n_1 d\alpha_1 + \bar{k}_2 n_2 d\alpha_2 + \bar{k}_3 n_3 d\alpha_3; \\ d\bar{R} &= \bar{k}_1 n_1 d\alpha_1 + \bar{k}_2 n_2 d\alpha_2 + \bar{k}_3 n_3 d\alpha_3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

После деформации точка  $N^*$  фиксируется радиусом  $\bar{R}^* + d\bar{R}^*$ , который равен:

$$\bar{R}^* + d\bar{R}^* = \bar{R} + \bar{U} + d\bar{R} + d\bar{U}.$$

Запишем подробно радиус  $d\bar{R}^*$ , используя обозначенные ранее соотношения:

$$\begin{aligned} d\bar{R}^* &= d\bar{R} + d\bar{U} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 + \\ &+ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 + \frac{\partial (U_1 \bar{k}_1 + U_2 \bar{k}_2 + U_3 \bar{k}_3)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \\
&+ \frac{\partial (U_1 \bar{k}_1 + U_2 \bar{k}_2 + U_3 \bar{k}_3)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial (U_1 \bar{k}_1 + U_2 \bar{k}_2 + U_3 \bar{k}_3)}{\partial \alpha_3} d\alpha_3.
\end{aligned}$$

Далее, используя формулы (3.17), определяющие производные единичных векторов  $\bar{k}_i$ , запишем выражение  $d\bar{R}^*$ , при этом суммы различных величин обозначим некоторыми буквами, значение которых будет выражено:

$$\begin{aligned}
d\bar{R}^* &= \left[ \begin{aligned} &(1+e_{11})n_1 d\alpha_1 + \left(\frac{1}{2}e_{12} - \omega_3\right)n_2 d\alpha_2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right)n_3 d\alpha_3 \end{aligned} \right] \bar{k}_1 + \\
&+ \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right)n_1 d\alpha_1 + (1+e_{22})n_2 d\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right)n_3 d\alpha_3 \end{aligned} \right] \bar{k}_2 + \\
&+ \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right)n_1 d\alpha_1 + \left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right)n_2 d\alpha_2 + (1+e_{33})n_3 d\alpha_3 \end{aligned} \right] \bar{k}_3.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Принятые обозначения равняются следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{n_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{n_1 n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{1}{n_1 n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} U_3; \\
e_{22} &= \frac{1}{n_2} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{n_2 n_3} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} U_3 + \frac{1}{n_2 n_1} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} U_1; \\
e_{33} &= \frac{1}{n_3} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{n_1 n_3} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_1} U_1 + \frac{1}{n_3 n_2} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_2} U_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{12} = e_{21} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \left( \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} h_2 - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} U_2 \right) + \left( \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} h_1 - \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} U_1 \right) \right]; \\
e_{13} = e_{31} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \left( \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} h_3 - \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} U_3 \right) + \left( \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_3} h_1 - \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} U_1 \right) \right]; \\
e_{23} = e_{32} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \left( \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} h_3 - \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2} U_3 \right) + \left( \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_3} h_2 - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} U_2 \right) \right];
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{2h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_3 U_3) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_2 U_2) \right]; \\
\omega_2 &= \frac{1}{2h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_1 U_1) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (h_3 U_3) \right]; \\
\omega_3 &= \frac{1}{2h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (h_2 U_2) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_1 U_1) \right].
\end{aligned}$$

Используем далее некоторые дополнительные обозначения:

модуль вектора  $|\overline{MN}| = |d\overline{R}| = dS$ ;

модуль вектора  $|\overline{M^*N^*}| = |d\overline{R^*}| = dS^*$ .

Запишем деформацию  $\varepsilon$  между точками  $M^*$  и  $N^*$ :

$$\varepsilon = \frac{dS^* - dS}{dS} = \frac{dS^* - dS}{dS} \frac{dS^* + dS}{dS^* + dS} = \frac{(dS^*)^2 - dS^2}{dS(dS^* + dS)}.$$

Учтем, что  $dS^* = \varepsilon \cdot dS + dS$ :

$$\varepsilon = \frac{(dS^*)^2 - dS^2}{dS(\varepsilon dS + dS + dS)} = \frac{(dS^*)^2 - dS^2}{dS^2(\varepsilon + 2)}.$$

Отсюда получим:

$$\varepsilon(\varepsilon + 2)dS^2 = (dS^*)^2 - dS^2$$

или

$$\left( \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 1 \right) dS^2 = \frac{1}{2} \left[ (dS^*)^2 - dS^2 \right]. \tag{3.25}$$

Запишем выражение  $(dS^*)^2 = (d\bar{R}^*)^2$  используя формулу (3.23). При этом необходимо учесть, что единичные векторы  $\bar{k}_1; \bar{k}_2; \bar{k}_3$  взаимно ортогональны, а значит их произведения равны нулю:

$$\begin{aligned}
(dS^*)^2 = & \left[ (1+e_{11})^2 + \left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right)^2 \right] h_1^2 d\alpha_1^2 + \\
& + \left[ \left(\frac{1}{2}e_{12} - \omega_3\right)^2 + (1+e_{22})^2 + \left(\frac{1}{2}e_{23} + \omega_1\right)^2 \right] h_2^2 d\alpha_2^2 + \\
& + \left[ \left(\frac{1}{2}e_{13} + \omega_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right)^2 + (1+e_{33})^2 \right] h_3^2 d\alpha_3^2 + \\
& + 2 \left[ (1+e_{11}) \left(\frac{1}{2}e_{12} - \omega_3\right) + \left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right) (1+e_{22}) + \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right) \right] \\
& \left[ \left(\frac{1}{2}e_{23} + \omega_1\right) \right] h_1 h_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + 2 \left[ (1+e_{11}) \left(\frac{1}{2}e_{13} + \omega_2\right) + \left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right) \left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right) + \right] \\
& \left[ \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right) (1+e_{33}) \right] h_1 h_3 d\alpha_1 d\alpha_3 + \\
& + 2 \left[ \left(\frac{1}{2}e_{12} - \omega_3\right) \left(\frac{1}{2}e_{13} + \omega_2\right) + (1+e_{22}) \left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right) + \right] \\
& \left[ \left(\frac{1}{2}e_{23} + \omega_1\right) (1+e_{33}) \right] h_2 h_3 d\alpha_2 d\alpha_3.
\end{aligned}$$

Учтем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
dS^2 &= h_1^2 d\alpha_1^2 + h_2^2 d\alpha_2^2 + h_3^2 d\alpha_3^2; \\
(1 + e_{11})^2 h_1^2 d\alpha_1^2 &= (1 + 2e_{11} + e_{11}^2) h_1^2 d\alpha_1^2; \\
(1 + e_{22})^2 h_2^2 d\alpha_2^2 &= (1 + 2e_{22} + e_{22}^2) h_2^2 d\alpha_2^2; \\
(1 + e_{33})^2 h_3^2 d\alpha_3^2 &= (1 + 2e_{33} + e_{33}^2) h_3^2 d\alpha_3^2.
\end{aligned}$$

Найдем выражение:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left[ (dS^*)^2 - dS^2 \right] = \\
&= \left\{ e_{11} + \frac{1}{2} \left[ e_{11}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right] \right\} h_1^2 d\alpha_1^2 + \\
&+ \left\{ e_{22} + \frac{1}{2} \left[ e_{22}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right)^2 \right] \right\} h_2^2 d\alpha_2^2 + \\
&+ \left\{ e_{33} + \frac{1}{2} \left[ e_{33}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right)^2 \right] \right\} h_3^2 d\alpha_3^2 + \\
&+ \left\{ e_{12} + e_{11} \left( \frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) + e_{22} \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \right\} \\
&\left\{ \left( \frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right) \right\} h_1 h_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
&+ \left\{ e_{13} + e_{11} \left( \frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right) + e_{33} \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) + \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) \right\} \\
&\left\{ \left( \frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right) \right\} h_1 h_3 d\alpha_1 d\alpha_3 + \\
&+ \left\{ e_{23} + e_{22} \left( \frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right) + e_{33} \left( \frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right) + \left( \frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) \right\} \\
&\left\{ \left( \frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right) \right\} h_2 h_3 d\alpha_2 d\alpha_3.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Каждая строчка в этом выражении представляет собой определенную деформацию, а именно:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \left[ e_{11}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right]^2 ; \\
 \varepsilon_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2} \left[ e_{22}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right)^2 \right]^2 ; \\
 \varepsilon_{33} &= e_{33} + \frac{1}{2} \left[ e_{33}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right)^2 \right]^2 ; \\
 \gamma_{12} &= e_{12} + e_{11} \left( \frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) + e_{22} \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \\
 &\quad \left( \frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right) ; \\
 \gamma_{13} &= e_{13} + e_{11} \left( \frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right) + e_{33} \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) + \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) \\
 &\quad \left( \frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right) ; \\
 \gamma_{23} &= e_{23} + e_{22} \left( \frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right) + e_{33} \left( \frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right) + \left( \frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) \\
 &\quad \left( \frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right) .
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Все величины, входящие в эти выражения, определяются по формулам (3.24). Если их подставить, то получим очень громоздкие соотношения. Однако, главным есть следующее: когда рассматриваются малые величины деформаций, можно пренебречь квадратами и произведениями величин в выражениях (3.27). Выполняя это, получим обычные деформации, которые применяются при расчете различных конструкций. Они будут иметь вид с учетом формул (3.24):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} = e_{11} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} U_3; \\
\varepsilon_{22} = e_{22} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} U_3 + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} U_1; \\
\varepsilon_{33} = e_{33} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} U_1 + \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2} U_2; \\
\gamma_{12} = e_{21} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} h_2 + \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} h_1 - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} U_2 - \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} U_1 \right]; \\
\gamma_{13} = e_{13} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} h_3 + \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_3} h_1 - \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} U_3 - \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} U_1 \right]; \\
\gamma_{23} = e_{23} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} h_3 + \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_3} h_2 - \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2} U_3 - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} U_2 \right].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

### Лекция 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Выделим бесконечно малый элемент, площади которого параллельны координатным плоскостям. На каждой грани действуют три составляющих напряжений параллельные координатным осям. Объединяем эти составляющие на каждой грани в единые векторы. Таким образом, на каждой грани будет действовать одна произвольно направленная сила. Ее величина равняется значению напряжений, умноженному на площадь грани. Изображения показаны на рис. 3.3.

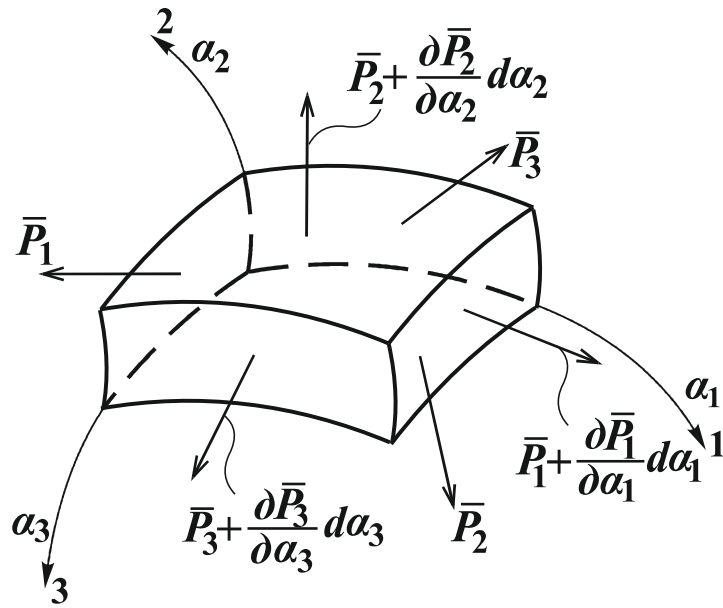


Рис. 3.3

Площади граней имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= h_2 h_3 d\alpha_2 d\alpha_3; \\
 S_2 &= h_1 h_3 d\alpha_1 d\alpha_3; \\
 S_3 &= h_1 h_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Силы, действующие по начальным граням, равны:

$$\begin{aligned}
 &-\bar{P}_1 h_2 h_3 d\alpha_2 d\alpha_3; \\
 &-\bar{P}_2 h_1 h_3 d\alpha_1 d\alpha_3; \\
 &-\bar{P}_3 h_1 h_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

На удаленных гранях они равны:

$$\begin{aligned}
 &\bar{P}_1 h_2 h_3 d\alpha_2 d\alpha_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\bar{P}_1 h_2 h_3) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3; \\
 &\bar{P}_2 h_1 h_3 d\alpha_1 d\alpha_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\bar{P}_2 h_1 h_3) d\alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_3; \\
 &\bar{P}_3 h_1 h_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\bar{P}_3 h_1 h_2) d\alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$



Кроме напряжений будет действовать объемная нагрузка  $F$ , которую необходимо собрать по всему объему рассматриваемого элемента:

$$F n_1 n_2 n_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \quad (3.32)$$

Поскольку рассматриваемый элемент тела находится в равновесии, то сумма всех действующих на него сил равняется нулю.

Обратим особое внимание на те обстоятельства, что при составлении уравнений равновесия рассматривается недеформированный элемент тела. Все записанные ранее силы как раз и относятся к недеформированному элементу тела, поэтому их можно использовать для записи уравнения равновесия.

Как было сказано выше, запишем сумму всех действующих сил:

$$\begin{aligned} & -\bar{P}_{1n_2n_3} d\alpha_2 d\alpha_3 + \bar{P}_{1n_2n_3} d\alpha_2 d\alpha_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\bar{P}_{1n_2n_3}) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \\ & -\bar{P}_{2n_1n_3} d\alpha_1 d\alpha_3 + \bar{P}_{2n_1n_3} d\alpha_1 d\alpha_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\bar{P}_{2n_1n_3}) d\alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_3 - \\ & -\bar{P}_{3n_1n_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \bar{P}_{3n_1n_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\bar{P}_{3n_1n_2}) d\alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + F n_1 n_2 n_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Сокращая равные члены, имеющие противоположные знаки, а также сокращая на произведении  $d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\bar{P}_{2n_2n_3}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\bar{P}_{2n_1n_3}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\bar{P}_{3n_1n_2}) + F n_1 n_2 n_3 = 0. \quad (3.34)$$

Составлено общее дифференциальное уравнение. Подставим в него выражение сил через напряжения:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_1 &= \sigma_{11}\bar{k}_1 + \tau_{21}\bar{k}_2 + \tau_{31}\bar{k}_3; \\
\bar{P}_2 &= \tau_{12}\bar{k}_1 + \sigma_{22}\bar{k}_2 + \tau_{32}\bar{k}_3; \\
\bar{P}_3 &= \tau_{13}\bar{k}_1 + \tau_{23}\bar{k}_2 + \sigma_{33}\bar{k}_3.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

После чего получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\sigma_{11}n_2n_3\bar{k}_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\tau_{21}n_2n_3\bar{k}_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\tau_{31}n_2n_3\bar{k}_3) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\tau_{12}n_1n_3\bar{k}_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\sigma_{22}n_1n_3\bar{k}_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\tau_{32}n_1n_3\bar{k}_3) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\tau_{13}n_1n_2\bar{k}_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\tau_{23}n_1n_2\bar{k}_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\sigma_{33}n_1n_2\bar{k}_2) + \\
&+ Fn_1n_2n_3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Дифференцируя единичные векторы, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\sigma_{11}n_2n_3)\bar{k}_1 + \sigma_{11}n_2n_3\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\tau_{21}n_2n_3)\bar{k}_2 + \\
&+ \tau_{21}n_2n_3\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\tau_{31}n_2n_3)\bar{k}_3 + \tau_{31}n_2n_3\frac{\partial \bar{k}_3}{\partial \alpha_1} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\tau_{12}n_1n_3)\bar{k}_1 + \tau_{12}n_1n_3\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\sigma_{22}n_1n_3)\bar{k}_2 + \\
&+ (\sigma_{22}n_1n_3)\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\tau_{32}n_1n_3)\bar{k}_3 + \tau_{32}n_1n_3\frac{\partial \bar{k}_3}{\partial \alpha_2} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\tau_{13}n_1n_2)\bar{k}_1 + \tau_{13}n_1n_2\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\tau_{23}n_1n_2)\bar{k}_2 + \\
&+ \tau_{23}n_1n_2\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\sigma_{33}n_1n_2)\bar{k}_3 + \sigma_{33}n_1n_2\frac{\partial \bar{k}_3}{\partial \alpha_3} + Fn_1n_2n_3 = 0.
\end{aligned}$$

Объемную нагрузку  $\bar{F}$  представим как сумму проекций на оси  $\bar{k}_1$ ;  $\bar{k}_2$ ;  $\bar{k}_3$ :

$$\bar{F} = F_1\bar{k}_1 + F_2\bar{k}_2 + F_3\bar{k}_3.$$

Производные от  $\bar{k}_1$ ;  $\bar{k}_2$ ;  $\bar{k}_3$  запишем по формулам (3.17), получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sigma_{11} n_2 n_3) \bar{k}_1 + \sigma_{11} n_2 n_3 \left( -\frac{1}{n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \bar{k}_2 - \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} \bar{k}_3 \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tau_{21} n_2 n_3) \bar{k}_2 + \tau_{21} n_2 n_3 \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} \bar{k}_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tau_{31} n_2 n_3) \bar{k}_3 + \\
& + \tau_{31} n_2 n_3 \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} \bar{k}_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tau_{12} n_1 n_3) \bar{k}_1 + \tau_{12} n_1 n_3 \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} \bar{k}_2 + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sigma_{22} n_1 n_3) \bar{k}_2 + \sigma_{22} n_1 n_3 \left( -\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} \bar{k}_1 - \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} \bar{k}_3 \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tau_{32} n_1 n_3) \bar{k}_3 + \tau_{32} n_1 n_3 \frac{1}{n_3} \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} \bar{k}_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\tau_{13} n_1 n_2) \bar{k}_1 + \\
& + \tau_{13} n_1 n_2 \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_1} \bar{k}_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\tau_{23} n_1 n_2) \bar{k}_2 + \tau_{23} n_1 n_2 \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_2} \bar{k}_3 + \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\sigma_{33} n_1 n_2) \bar{k}_3 + \sigma_{33} n_1 n_2 \left( -\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_1} \bar{k}_1 - \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_2} \bar{k}_2 \right) + \\
& + n_1 n_2 n_3 (F_1 \bar{k}_1 + F_2 \bar{k}_2 + F_3 \bar{k}_3) = 0.
\end{aligned}$$

Далее объединим все слагаемые с одинаковыми членами единичных векторов:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sigma_{11} n_2 n_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tau_{12} n_1 n_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\tau_{13} n_1 n_2) + \tau_{21} n_3 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} + \right. \\
& + \tau_{31} n_2 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_3} - \sigma_{22} n_3 \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} - \sigma_{33} n_2 \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_1} + \bar{F}_1 n_1 n_2 n_3 \left. \right] \bar{k}_1 + \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tau_{21} n_2 n_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sigma_{22} n_1 n_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\tau_{23} n_1 n_2) + \tau_{12} n_3 \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_1} + \right. \\
& + \tau_{32} n_1 \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_3} - \sigma_{11} n_3 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha_2} - \sigma_{33} n_1 \frac{\partial n_3}{\partial \alpha_2} + \bar{F}_2 n_1 n_2 n_3 \left. \right] \bar{k}_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tau_{31} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tau_{32} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\sigma_{33} h_1 h_2) + \tau_{13} h_2 \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} + \right. \\
& \left. + \tau_{23} h_1 \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2} - \sigma_{11} h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} - \sigma_{22} h_1 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} + \bar{F}_{3 h_1 h_2 h_3} \right] \bar{k}_3 = 0.
\end{aligned}$$

Полученное уравнение может быть разделено на три независимых уравнения. Необходимо приравнять к нулю выражения в квадратных скобках при каждом множителе единичного вектора. В результате получим окончательную систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sigma_{11} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tau_{12} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\tau_{13} h_1 h_2) + \tau_{21} h_3 \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} + \\
& + \tau_{31} h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} - \sigma_{22} h_3 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} - \sigma_{33} h_2 \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} + \bar{F}_{1 h_1 h_2 h_3} = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tau_{21} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sigma_{22} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\tau_{23} h_1 h_2) + \tau_{12} h_3 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + \tau_{32} h_1 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} - \sigma_{11} h_3 \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} - \sigma_{33} h_1 \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2} + \bar{F}_{2 h_1 h_2 h_3} = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tau_{31} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tau_{32} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\sigma_{33} h_1 h_2) + \tau_{13} h_2 \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} + \\
& + \tau_{23} h_1 \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2} - \sigma_{11} h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} - \sigma_{22} h_1 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} + \bar{F}_{3 h_1 h_2 h_3} = 0.
\end{aligned}$$

### **Лекция 23. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАВИСИМОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ**

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, можно использовать для определения соответствующих зависимостей в конкретной системе координат.

1. Цилиндрические координаты (рис. 3.4).

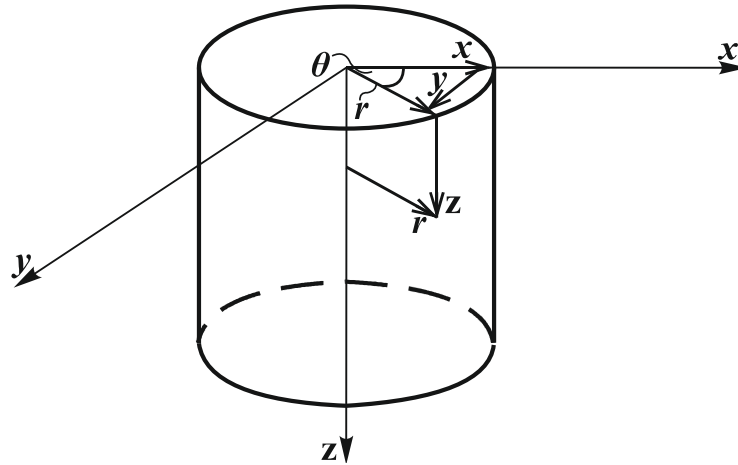


Рис. 3.4

В первую очередь установим зависимости между координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $r, \theta, z$ , на основании чего будут записаны формулы (3.1):

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad \alpha_1 = r;$$

$$y = r \cdot \sin \theta, \quad \alpha_2 = \theta;$$

$$z = z, \quad \alpha_3 = z.$$

Имея равенства, по формулам (3.4) и (3.6) найдем выражения  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ :

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1;$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(-r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} = r;$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0+0+1} = 1.$$

Далее по формуле (3.28) найдем деформации в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} U_r; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} U_\theta; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z}; \\ \gamma_{z\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z}.\end{aligned}$$

По формулам (3.38) определим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{rr}r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz}r) - \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{\partial r}{\partial r} \right) + \bar{F}_1 r &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial r}(\tau_{\theta r}r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{\theta z}) + \tau_{r\theta} \left( \frac{\partial r}{\partial r} \right) + \bar{F}_2 r &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial r}(\tau_{zr}r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz}r) + \bar{F}_3 r &= 0.\end{aligned}$$

После простых преобразований, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \bar{F}_1 &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \bar{F}_2 &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{zz} + \bar{F}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Далее по закону Гука можно выразить напряжения через перемещения, после чего найдем уравнения равновесия в перемещениях и ряд других необходимых преобразований.

2. Сферические координаты (рис. 3.5).

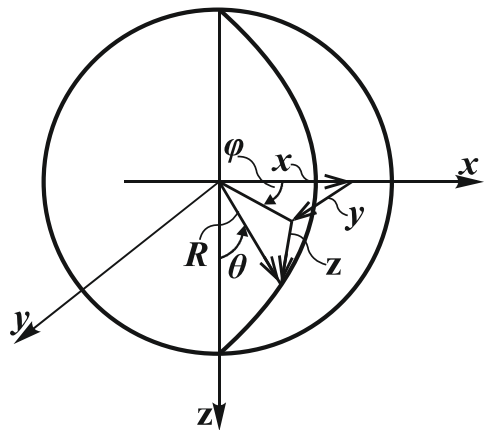


Рис. 3.5

Зависимость по формулам (3.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \varphi, \quad \alpha_1 = \theta; \\y &= R \sin \theta \sin \varphi, \quad \alpha_2 = \varphi; \\z &= R \cos \theta, \quad \alpha_3 = R.\end{aligned}$$

Найдем:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = R \cos \theta \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = R \cos \theta \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -R \sin \theta;$$

$$h_1 = \sqrt{(R \cos \theta \cos \varphi)^2 + (R \cos \theta \sin \varphi)^2 + (R \sin \theta)^2} = R;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -R \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = R \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0;$$

$$h_2 = \sqrt{(-R \sin \theta \sin \varphi)^2 + (R \sin \theta \cos \varphi)^2} = R \sin \theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial R} = \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial R} = \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial R} = \cos \theta;$$

$$h_3 = \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + (\cos \theta)^2} = 1.$$

По формулам (3.28) найдем деформации:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_R \right);$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \cdot U_\theta + U_R \right);$$

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial U_R}{\partial R};$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta U_\varphi \right);$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U_R}{\partial \theta} - U_\theta \right) + \frac{\partial U_\theta}{\partial R};$$

$$\gamma_{\varphi R} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U_R}{\partial \varphi} - U_\varphi \right) + \frac{\partial U_\varphi}{\partial R};$$

По формулам (3.38) получим уравнения равновесия:



$$\frac{\partial \tau_{\theta R}}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{\theta \varphi}}{\partial \varphi} \frac{1}{R \sin \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{R} \tau_{R\theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R} (\sigma_{\theta \theta} - \sigma_{\varphi \varphi}) + \bar{F}_{\theta} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} (2\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi \varphi} - \sigma_{\theta \theta} + \tau_{R\theta} \operatorname{ctg} \theta) + \bar{F}_R = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\varphi \theta}}{\partial \theta} + \frac{3\tau_{R\varphi} + 2\tau_{\varphi \theta} \operatorname{ctg} \theta}{R} + \bar{F}_{\varphi} = 0.$$

### РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Теория упругости* / В.В. Новожилов. – М.: Государственное союзное издательство судостроительной промышленности. – 1958. – 370 с.
2. *Теория упругости* / Б.Н. Жемочкин. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1957. – 255 с.
3. *Теория упругости* / А.М. Кац. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 207с.
4. *Опір матеріалів* / Л.Т. Шкелев, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. – К.: ЗАТ «Віпол», 2011. – 455 с.

Учебное издание

**ШКЕЛЕВ** Леонид Тихонович  
**СТАНКЕВИЧ** Анатолий Николаевич

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Конспект лекций

Редактирование и корректура *А.А. Бакиевой*  
Компьютерная верстка *Т.И. Кукаревой*

Підписано до друку 20.10.2014. Формат 60 × 84<sub>1/16</sub>  
Ум. друк. арк. 8,83. Обл.-вид. арк. 9,5.  
Тираж 25 прим. Вид. № 37/І-13. Зам. №

Видавець і виготовлювач  
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680  
E-mail: red-isdat@ukr.net, тел. (044)241-54-22, 241-54-87

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.

