

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Розрахунок вала на кручення та кручення зі згином

Методичні рекомендації, завдання та приклади
виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів, які навчаються
за напрямом підготовки
6.050502 «Інженерна механіка»

Київ 2014

УДК 539.3
ББК 30.121
О-61

Укладачі: О.П. Кошевий, канд. техн. наук, доцент
О.М. Тробюк, асистент

Рецензент О.Ф. Корбаков, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск А.М. Станкевич, канд. техн. наук,
доцент

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів,
протокол № 3 від 9 грудня 2013 року.*

Опір матеріалів. Розрахунок вала на кручення та кручення зі
О-61 згином: методичні рекомендації, завдання та приклади виконання
розрахунково-графічних робіт /уклад.: О.П. Кошевий, О.М. Тробюк –
К.: КНУБА, 2014. – 28 с.

Містять варіанти індивідуальних завдань та детальні плани виконання розрахунково-графічних робіт з курсу "Опір матеріалів", а також приклади розв'язання кожного завдання. Розглянуто короткі теоретичні відомості розділів "Розрахунок вала на кручення" та "Розрахунок вала на кручення зі згином".

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.050502 «Інженерна механіка»

© КНУБА, 2014

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні рекомендації призначені для допомоги студентам виконати розрахунково-графічні роботи з курсу „Опір матеріалів” за розділами:

- „Розрахунок вала на кручення”;
- „Розрахунок вала на кручення зі згином”.

Розрахунково-графічну роботу студент повинен виконати за індивідуальним завданням, умова якого визначається згідно з виданими викладачем вихідними даними (розрахункові схеми та числові значення) , які студент вибирає з додатків (див. дод. 1, 2, 3, 4) за власним шифром у вигляді тризначного числа.

Розрахунково-графічну роботу оформлюють на аркушах формату А4, які скріплюють зліва. Титульний аркуш роботи оформлюють за зразком (див. дод. 5)

Пояснення та розрахунки потрібно виконувати на одній стороні аркуша ручкою, а креслення виконувати олівцем. Дозволяється комп’ютерне виконання креслень.

Для кожного завдання наведено план та рекомендації щодо виконання поетапного розрахунку. Для ілюстрації наведено приклад виконання РГР. Виконуючи кожен етап розрахунку, потрібно спочатку записати розрахункові формули, підставити числові значення та записати результат обчислення у відповідних одиницях виміру (система СІ).

Розрахунково-графічна робота вважається зарахованою після її захисту. У даних методичних вказівках викладено матеріал розрахунку статично визначених стержнів на кручення.

Стержень, що працює на кручення, тобто передає крутний момент, називається валом (вал редуктора, карданний вал автомобіля, вал привідних коліс електровоза). Стержень, що обертається, та нерухомий стержень, який не передає крутний момент і використовується для підтримання частин, що обертаються, називається віссю (вісь колісної пари вагона, осі блоків підйомних механізмів і т.п.).

На напружено-деформований стан валів в основному впливають два види деформацій: кручення та згин, котрі, як правило, і враховуються при їх розрахунку.

Мета виконання даної розрахунково-графічної роботи – ознайомитись з проектуванням валів. Під час його виконання студенти

повинні навчитись розраховувати стержень круглого поперечного перерізу на кручення та кручення зі згином.

Перед розв'язанням даних задач необхідно вивчити теоретичний матеріал з тем «Кручення» і «Згин з крученням» [1, с. 206–233, 338–353].

Схему вала з діючими на нього навантаженням потрібно накреслити в масштабі та розмістити її на 2/3 ширини сторінки. Під схемою потрібно розмістити всі необхідні епюри зусиль і деформацій.

1. РОЗРАХУНОК ВАЛА НА КРУЧЕННЯ

Як правило, в механізмах крутні моменти передаються на вал від електродвигунів або двигунів внутрішнього згорання, потужність яких відповідно виражається в кіловатах (кВт) або в кінських силах (к.с.). Для розрахунку вала необхідно визначити крутні моменти на його шківках, $kH \cdot m$:

$$M_K = 9,549 \frac{N [кВт]}{n [об/хв]}; \quad (1)$$

або

$$M_K = 7,029 \frac{N [к.с.]}{n [об/хв]}. \quad (2)$$

Отримані значення крутних моментів наносять на схему вала. Додатні значення крутних моментів направляють за годинниковою стрілкою (якщо дивитись з додатного напрямку осі, навколо якої відбувається обертання), від'ємні – проти.

1.1. Побудова епюр крутних моментів

Визначення ординат цієї епюри виконують за допомогою правила перерізів: крутний момент у будь-якому перерізі вала дорівнює сумі крутних моментів, які знаходяться з однієї (лівої або правої) сторони від цього перерізу. Крутний момент у перерізі вважається додатним, якщо сумарний крутний момент намагається повернути відсічену частину вала (якщо дивитися в торець перерізу) за годинниковою стрілкою (рис. 1.1).

Додатне значення на епюрі крутних моментів відкладається вниз, від'ємне – вгору.

Для кращого зображення епюри крутних моментів її штрихують спіральною лінією.

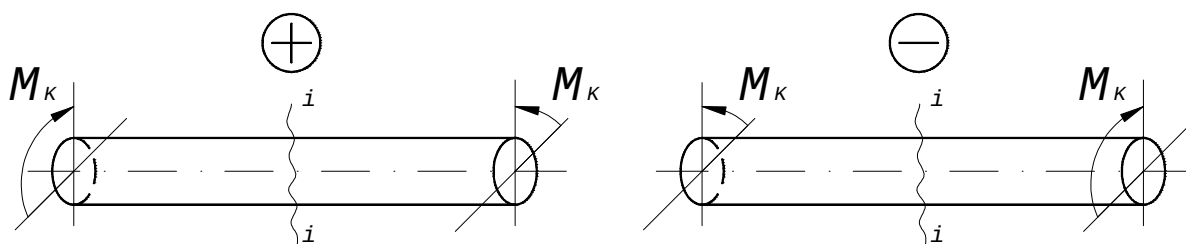


Рис. 1.1

На наступному етапі визначають діаметр вала, який може бути круглого суцільного перерізу, діаметр якого не змінюється по всій довжині вала (суцільний вал), кільцевого поперечного перерізу, діаметр якого також не змінюється по довжині (вал кільцевого перерізу) та круглого суцільного перерізу, в межах однієї ділянки (ступінчатий вал).

1.2. Визначення діаметра суцільного вала

Діаметр суцільного вала за умов міцності:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{max}}{\pi\tau_{adm}}}, \quad (3)$$

де $M_{кр}^{max}$ – максимальний крутний момент у поперечному перерізі вала (береться з епюри $M_{кр}$); τ_{adm} – допустиме напруження на зріз для даного матеріалу;

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_t}{n_t}, \quad (4)$$

τ_t – межа міцності матеріалу (береться за табл.1.1); n_t – коефіцієнт запасу міцності за напруженням, за умови випадкових впливів $n_t = 3 \div 5$.

Таблиця 1.1

Механічні характеристики матеріалів

Матеріал	Модуль зсуву, МПа	σ_B , МПа	τ_t , МПа
Ст.30	$0,8 \cdot 10^5$	500	170
Ст.40	$0,808 \cdot 10^5$	580	190
Ст.45	$0,803 \cdot 10^5$	610	220
Ст.60	$0,806 \cdot 10^5$	690	220
Алюміній	$0,27 \cdot 10^5$	210	80
Латунь	$0,35 \cdot 10^5$	320	110
Мідь	$0,35 \cdot 10^5$	250	100

Діаметр суцільного вала з умов жорсткості:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{max}}{\pi G \theta_{adm}}}, \quad (5)$$

де G – модуль пружності матеріалу вала за умови зсуву (береться з табл. 1.1); θ_{adm} – допустимий відносний кут закручування; ($\theta_{adm} = 0,25$ град/м для динамічних навантажень, $\theta_{adm} = 0,3$ град/м для статичних навантажень, $\theta_{adm} = 0,15$ град/м для ударних навантажень).

Потрібно пам'ятати, що в формулі (5) значення θ_{adm} підставляється в радіанах на метр, тому його треба виразити за формулою:

$$\theta_{adm} = \frac{\pi \theta_{adm}}{180}. \quad (6)$$

З двох знайдених значень діаметрів (за формулами (3) та (5)) приймають більший та заокруглюють його до стандартного значення (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Номінальні значення діаметрів валів

Ряд 1-й	16, 18, 20, 22, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 45, 50, 55, 60, 63, 70, 71, 80, 90, 100, 110
Ряд 2-й	19, 24, 38, 42, 48, 53, 56, 65, 75, 85, 95, 105

1.3. Визначення розмірів поперечного перерізу вала кільцевого перерізу

Зовнішній діаметр вала кільцевого поперечного перерізу за умови міцності:

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{max}}{\pi \tau_{adm} (1 - \alpha^4)}}, \quad (7)$$

де $\alpha = \frac{d_3}{d_B}$, d_3 та d_B – відповідно зовнішній та внутрішній діаметри вала.

Зовнішній діаметр кільцевого вала з умови жорсткості:

$$d_3 = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{max}}{\pi G \theta_{adm} (1 - \alpha^4)}}. \quad (8)$$

З двох отриманих значень за формулами (7) та (8) необхідно взяти більше, заокруглити його до найближчого стандартного розміру (див. табл. 1.2) та знайти внутрішній діаметр, заокругливши його до цілого значення в мм:

$$d_B = \alpha \cdot d_3. \quad (9)$$

1.4. Порівняння маси валів суцільного та кільцевого перерізів

На основі отриманих поперечних розмірів порівнюють маси валів суцільного та кільцевого поперечних перерізів.

Маса вала суцільного перерізу:

$$m_C = \frac{\pi d^2}{4} l \gamma; \quad (10)$$

маса вала кільцевого перерізу:

$$m_K = \frac{\pi (d_3^2 - d_B^2)}{4} l \gamma, \quad (11)$$

де l – довжина вала; γ – густина матеріалу, з якого виготовлений вал (для сталі $\gamma = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$).

$$K = \frac{m_K}{m_C} \cdot 100\%. \quad (12)$$

1.5. Побудова епюри відносних кутів закручування

Ординати цієї епюри визначаються за формулою:

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_p}, \quad (13)$$

де I_p – полярний момент інерції поперечного перерізу вала.

Для круглого перерізу:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4. \quad (14)$$

Полярний момент інерції кільцевого перерізу:

$$I_p = \frac{\pi (d_3^4 - d_B^4)}{32} \approx 0,1 (d_3^4 - d_B^4). \quad (15)$$

Треба взяти, що для валів однакового за довжиною поперечного перерізу значення GI_p постійне, і тому характер епюри θ відповідає епюрі $M_{кр}$. При побудові епюри θ її координати треба відкладати в тому ж напрямку, в якому відкладена ордината епюри крутних моментів на відповідному відрізку вала.

1.6. Побудова епюри кутів закручування

Для побудови епюри кутів закручування φ необхідно пронумерувати зліва направо (починаючи з нульового) характерні перерізи по довжині вала $(0,1,2,\dots,n)$. Цими перерізами є місця стрибків на епюрі $M_{кр}$. Один з перерізів вала треба прийняти за умовно нерухомий, як правило це лівий переріз, в якому $\varphi_0 = 0$.

Для побудови епюри можна використати формулу:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{M_{кр,i} l_i}{GI_p}, \quad (16)$$

де $i=1,2,3,\dots,n$ – номер перерізу, в якому визначається кут повороту; l_i – довжина i -го відрізка вала.

Додатні значення ординат епюри φ відкладаються вниз, від'ємні – вгору. Треба пам'ятати, що між епюрами θ та φ існує диференціальна залежність $d\varphi/dx = \theta$, яка визначає деякі правила для перевірки правильності побудови цих епюр:

- 1) стрибкам на епюрі θ відповідають переломи на епюрі φ ;
- 2) на відрізках, де епюра θ (або $M_{кр}$) додатна, ордината епюри φ зростає, якщо рухатись зліва направо, а коли епюра θ від'ємна – ординати на епюрі φ зменшуються;
- 3) тангенс кута нахилу епюри φ до осі стержня на будь-якому відрізку дорівнює числовому значенню ординат епюри θ на цьому відрізку.

1.7. Побудова епюр дотичних напружень

Під час побудови цієї епюри для вала суцільного поперечного перерізу максимальне дотичне напруження визначають за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{W_p}, \quad (17)$$

де $M_{\text{кр}}^{\max}$ – найбільший крутний момент на епюрі $M_{\text{кр}}$; W_p – полярний момент інерції круглого перерізу;

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (18)$$

Ординати епюри τ для вала кільцевого поперечного перерізу визначають за формулою:

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{I_p} r, \quad (19)$$

де r – радіус точки перерізу вала, в якій визначаються дотичні напруження.

Отримані значення максимальних дотичних напружень в обох випадках не повинні відрізнятись від допустимого дотичного напруження більше чим на $\pm 5\%$.

ПРИКЛАД

Дано: схема, розміри, матеріал, прикладені потужності, частота обертання (об/хв.), та α – співвідношення між зовнішнім та внутрішнім діаметрами кільцевого вала.

Знайти: розрахувати вал круглого та кільцевого поперечного перерізу.

План розрахунку:

1. Розрахувати обертаючі моменти на шківках за відомими потужністю та кутовою швидкістю.
2. Побудувати епюру крутних моментів.
3. Визначити діаметр суцільного вала з умов міцності та жорсткості.
4. Визначити діаметр кільцевого вала з умов міцності та жорсткості.
5. Зрівняти маси цих валів.
6. Побудувати епюри θ та ϕ для суцільного вала.
7. Побудувати епюри дотичних напружень в небезпечному перерізі для суцільного та кільцевого валів.

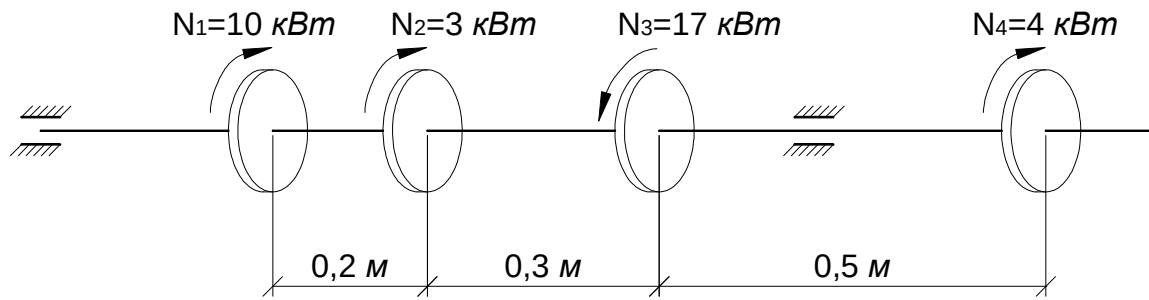


Рис. 1.2

Дано: $N_1 = 10$ кВт; $N_2 = 3$ кВт; $N_3 = 4$ кВт; $n = 430$ об/хв; $\alpha = 0,8$; матеріал Ст – 30; $\theta_{adm} = 0,28$ град/м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\gamma = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³.

1. Визначаємо скручувальні моменти на шківках:

$$M_{ск1} = 9,549 \frac{N_1}{n} = 9,549 \frac{10}{430} = 0,222 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ск2} = 9,549 \frac{N_2}{n} = 9,549 \frac{3}{430} = 0,067 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ск3} = 9,549 \frac{N_3}{n} = 9,549 \frac{4}{430} = 0,089 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Невідомий скручувальний момент $M_{ск0}$ визначаємо з умови рівноваги системи (рис. 1.3, а):

$$\sum M_x = 0; \quad 0,222 + 0,067 - M_{ск0} + 0,089 = 0, \quad M_{ск0} = 0,378 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Для побудови епюри крутних моментів визначимо крутні моменти на кожному відрізку вала:

$$M_{ск1} = 0,222 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ск2} = 0,222 + 0,067 = 0,289 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ск3} = 0,222 + 0,067 - 0,378 = -0,089 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюра $M_{кр}$ показана на рис. 1.3, б.

3. Визначаємо діаметр суцільного вала.

Допустиме напруження:

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_t}{n_t} = \frac{170}{4,5} = 37,8 \text{ МПа}.$$

Величину $\tau_t = 170$ МПа приймаємо за табл. 1.1 для сталі 30, а коефіцієнт запасу за напруженням приймаємо $n = 4,5$.

Діаметр суцільного вала за умови міцності:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{max}}{\pi\tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,289 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 37,8}} = 0,0339 \text{ м.}$$

Заокруглюємо до стандартного значення (табл. 1.2), $d = 35 \text{ мм.}$

Діаметр суцільного вала за умови жорсткості:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{max}}{\pi G \theta_{adm}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,289 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,00436}} = 0,0539 \text{ м,}$$

$$\text{де } \theta_{adm} = 0,25 \text{ град/м} = \frac{3,14 \cdot 0,25}{180} = 0,00436 \text{ рад/м.}$$

Заокруглюємо до стандартного значення (табл.1.2), $d = 55 \text{ мм.}$ З двох отриманих діаметрів вала приймаємо більший.

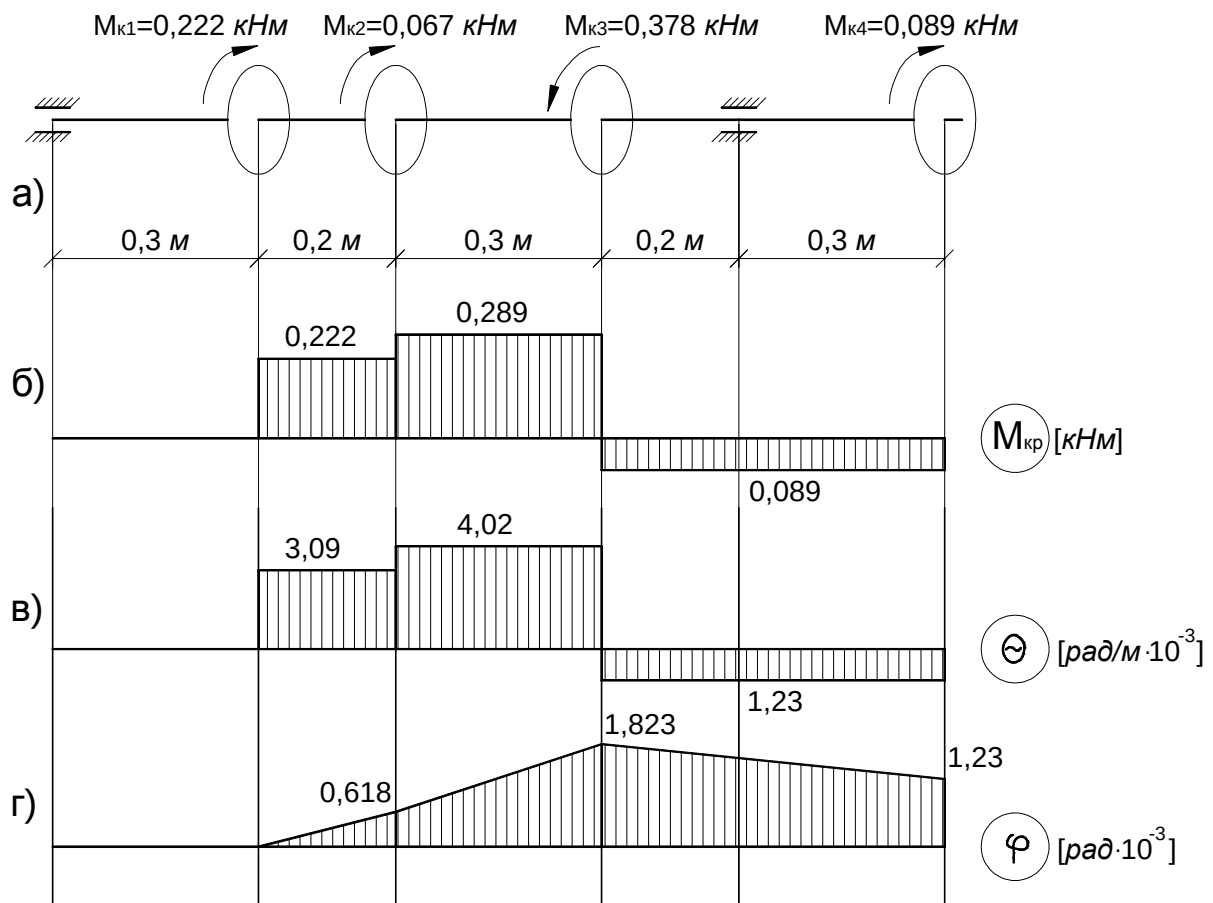


Рис. 1.3

4. Визначаємо діаметр кільцевого вала.

Діаметр кільцевого вала за умови міцності:

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{max}}{\pi\tau_{adm}(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,289 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 37,8 \cdot (1-0,8^4)}} = 0,045 \text{ м,}$$

заокруглюємо до стандартного розміру (див. табл. 1.2), $d_3 = 45$ мм.

Діаметр кільцевого вала за умови жорсткості:

$$d_3 = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{max}}{\pi G \theta_{adm} (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,289 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,00436 (1 - 0,8^4)}} = 0,0615 \text{ м},$$

заокруглюємо до стандартного розміру (табл. 1.2), $d_3 = 60$ мм. З двох отриманих діаметрів беремо більший та знаходимо внутрішній діаметр, заокруглений до цілих, $d_B = d_3 \cdot \alpha = 60 \cdot 0,8 = 48$ мм.

5. Зрівнюємо маси підібраних валів.

Маса суцільного вала:

$$m_C = \frac{\pi d^2}{4} l \gamma = \frac{3,14 \cdot 55^2 \cdot 10^{-6}}{4} \cdot 1,3 \cdot 7,85 \cdot 10^3 = 24,23 \text{ кг}.$$

Маса кільцевого вала:

$$m_K = \frac{\pi (d_3^2 - d_B^2)}{4} l \gamma = \frac{3,14 \cdot (60^2 - 48^2) \cdot 10^{-6}}{4} \cdot 1,3 \cdot 7,85 \cdot 10^3 = 10,38 \text{ кг},$$

$$K = \frac{m_K}{m_C} \cdot 100\% = \frac{10,38}{24,23} \cdot 100\% = 42,85\%,$$

таким чином маса кільцевого вала складає лише 42,85% від маси суцільного вала.

6. Будуємо епюри відносних кутів закручування для суцільного вала.

Визначаємо ординати епюри θ на кожному відрізку:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5,5^4 \cdot 10^{-8}}{32} = 89,79 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\theta_1 = \frac{M_{кр1}}{GI_p} = \frac{0,222 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 89,79 \cdot 10^{-8}} = 0,00309 \text{ рад/м};$$

$$\theta_2 = \frac{M_{кр2}}{GI_p} = \frac{0,289 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 89,79 \cdot 10^{-8}} = 0,00402 \text{ рад/м};$$

$$\theta_3 = \frac{M_{кр3}}{GI_p} = \frac{-0,089 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 89,79 \cdot 10^{-8}} = -0,00123 \text{ рад/м}.$$

Епюра θ зображена на рис.1.3, в.

Визначаємо ординати епюри кутів закручування φ . За умовно нерухомий приймаємо переріз з координатою $x = 0$, $\varphi_0 = 0$.

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{M_{kp1} l}{GI_p} = 0 + \frac{0,222 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 89,79 \cdot 10^{-8}} = 0,618 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_{kp2} l}{GI_p} = 0,618 \cdot 10^{-3} + \frac{0,289 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 89,79 \cdot 10^{-8}} = 1,823 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_{kp3} l}{GI_p} = 1,823 \cdot 10^{-3} - \frac{0,089 \cdot 10^3 \cdot (0,2 + 0,3)}{8 \cdot 10^{10} \cdot 89,79 \cdot 10^{-8}} = 1,205 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Епюра зображена на рис. 1.3, з.

7. Побудова епюри дотичних напружень в небезпечному перерізі.

Для суцільного перерізу:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 5,5^3 \cdot 10^{-6}}{16} = 32,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}^{\max}}{W_p} = \frac{0,289 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{32,65 \cdot 10^{-6}} = 8,85 \text{ МПа}.$$

Недонапруження пояснюється тим, що діаметр вала взятий за умови жорсткості:

$$\xi = \frac{8,85 - 37,8}{37,8} \cdot 100\% = -76,6\%.$$

$$\text{Для кільцевого перерізу: } r_3 = \frac{d_3}{2} = 3 \text{ см}, r_B = \frac{d_B}{2} = 2,4 \text{ см}.$$

$$I_p = 0,1(d_3^2 - d_B^2) = 0,1(6^2 - 4,8^2) \cdot 10^{-8} = 76,52 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\tau_3 = \frac{M_{kp}^{\max} r_3}{I_p} = \frac{0,289 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{76,52 \cdot 10^{-8}} = 11,53 \text{ МПа};$$

$$\tau_B = \frac{M_{kp}^{\max} r_B}{I_p} = \frac{0,289 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{76,52 \cdot 10^{-8}} = 9,07 \text{ МПа}.$$

$$\text{Недонапруження } \xi = \frac{11,53 - 37,8}{37,8} \cdot 100\% = -70\% \text{ тому, що діаметр}$$

вала підібраний за умови жорсткості.

Епюри дотичних напружень $\tau(\text{МПа})$ показані на рис. 1.4, а – для суцільного перерізу та рис. 1.4, б – для кільцевого перерізу.

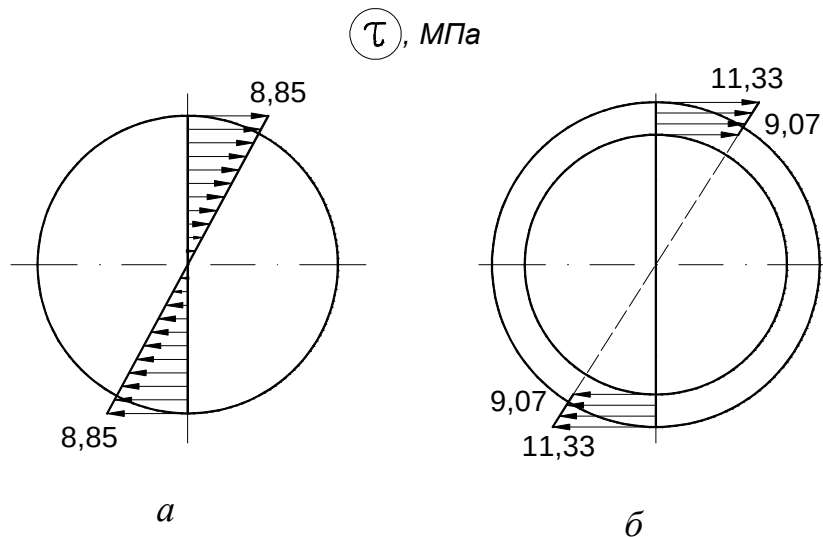


Рис. 1.4

2. РОЗРАХУНОК ВАЛА НА КРУЧЕННЯ ЗІ ЗГИНОМ

2.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль

Для розв'язання задачі обирається система координат з початком, як правило, на лівому кінці стержня. Вісь x направляється вздовж осі вала вправо.

На першому етапі розрахунку будується епюра крутних моментів $M_{кр}$ згідно з підпунктом 1.1.

Далі розглядається зігнутий стан стержня. При цьому його розрахункова схема являє собою балку на двох опорах, яка завантажена просторовою системою зосереджених навантажень. Їх величина визначається залежно від виду передачі скручувального моменту $M_{ск}$.

У разі ремінної передачі (рис. 2.1) натяг T ведучого (збігаючого) ременя береться в два рази більшим, ніж натяг t веденого (набігаючого) ременя: $T = 2t$.

Скручувальний момент $M_{ск}$, який передається шківом діаметра D , зв'язаний з натягом гілок ремінної передачі t (рис. 2.1):

$$t = \frac{M_{ск}}{0,5D}. \quad (20)$$

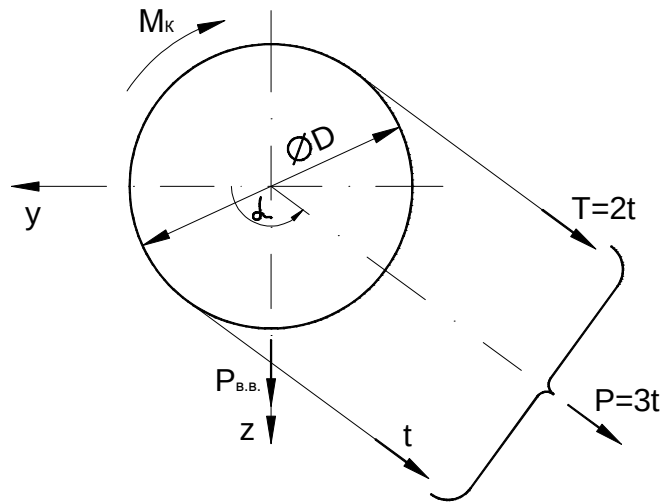


Рис. 2.1

Поперечне навантаження у перерізі:

$$P = T + t = 3t \quad (21)$$

або

$$P = \frac{6M_{ck}}{D}. \quad (22)$$

Власна вага шківа, якщо вона враховується в розрахунку, завжди направлена вниз.

Під час розрахунку вала зубчатої передачі (рис. 2.2) зосереджене поперечне (тангенціальне) навантаження:

$$P = \frac{2M_{ck}}{D}. \quad (23)$$

Якщо стержень має круглий поперечний переріз, то будь-яка центральна вісь поперечного перерізу є головною. Це дозволяє окремо розглянути його навантаження у вертикальній xOz і горизонтальній xOy площині, а потім ці два стани підсумувати. При цьому складові поперечних навантажень у відповідних площинах

для ремінної передачі:

$$\begin{aligned} P_y &= P \cos \alpha; \\ P_z &= P \sin \alpha, \end{aligned} \quad (24)$$

для зубчатої:

$$\begin{aligned} P_y &= P \cos \alpha - 0,4P \cos \beta; \\ P_z &= P \sin \alpha - 0,4P \sin \beta, \end{aligned} \quad (25)$$

де α – кут між додатнім напрямком осі y і додатнім напрямком сили P , завжди відкладається від додатного напрямку осі y в бік додатного напрямку осі z (у даному випадку – проти годинникової стрілки); β – кут між віссю y і лінією центрів зубчатих коліс (рис. 2.2).

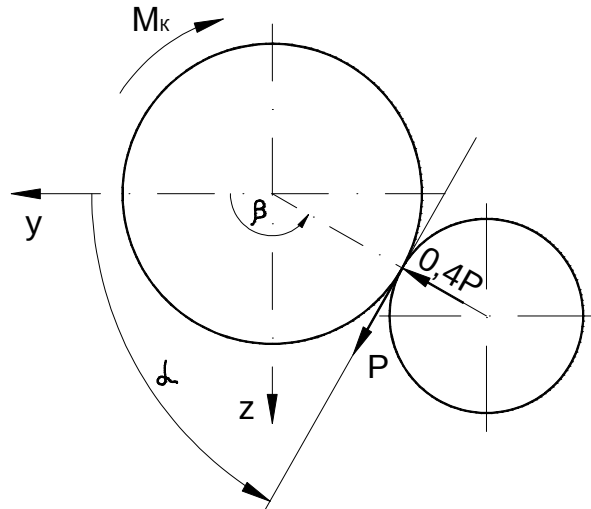


Рис. 2.2

Примітка. Якщо значення P_y або P_z , які визначенні за формулами (24), (25), отримані зі знаком "–", то на схемі їх потрібно відкладати у бік від'ємного напрямку відповідної осі, і в подальшому знак "–" пропускається.

Від отриманих поперечних навантажень будуються епюри згинальних моментів M_y і M_z . Значення їх ординат відкладаються на розтягнутому волокні стержня.

Далі будується еюра сумарних згинальних моментів M_Σ . Її ординати:

$$M_\Sigma = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad (26)$$

де M_y, M_z – ординати відповідних епюр у будь-якому перерізі стержня.

Діаметр вала визначається із умов четвертої теорії міцності:

$$\sigma_{red}^{IV} = \frac{M_{red}^{IV}}{W} \leq \sigma_{adm}, \quad (27)$$

де σ_{red}^{IV} – еквівалентне напруження за четвертою теорією міцності;
 σ_{adm} – допустиме напруження для матеріалу.

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_B}{n_B}, \quad (28)$$

σ_B – межа міцності для заданого матеріалу стержня (табл. 1.1);
 n_B – коефіцієнт запасу міцності за напруженням $n_B = 2, 4 \dots 2, 6$;
 W – осьовий момент опору круглого перерізу

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad (29)$$

M_{red}^{IV} – зведений момент за четвертою теорією міцності.

$$M_{red}^{IV} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75M_{кр}^2}. \quad (30)$$

Під час розрахунку вала на кручення зі згином за третьою теорією міцності зведений момент:

$$M_{red}^{III} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + M_{кр}^2}. \quad (31)$$

В іншому хід розрахунку та розрахункові формули залишаються без змін, потрібно тільки M_{red}^{IV} замінити на M_{red}^{III} .

Під час розрахунку вала постійного діаметра обирають небезпечний переріз, в якому величина M_{red}^{IV} бере максимальне значення.

2.2. Визначення діаметра вала суцільного перерізу

Діаметр вала за умов міцності:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}^{IV}}{\pi\sigma_{adm}}}. \quad (32)$$

Отриманий переріз потрібно перевірити на умову жорсткості (5) і округлити у відповідності з табл. 1.2.

Побудова епюр θ і ϕ проводиться у відповідності з методикою, яка викладена в підпунктах 1.5 та 1.6. Вага вала визначається за формулою (10).

2.3. Визначення розмірів вала кільцевого перерізу

Зовнішній діаметр вала за умови міцності:

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}^{IV}}{\pi\sigma_{adm}(1-\alpha^4)}}. \quad (33)$$

Отриманий розмір округлюється до найближчого із табл. 1.2 і за формулою (9) визначається внутрішній діаметр вала з подальшим

округленням до цілих значень, виражених в міліметрах. Підібраний переріз перевіряється за умовою жорсткості за формулою (8).

Епюри θ і φ будуються згідно методики, яка приведена в підпунктах 1.5 та 1.6. Вага вала кільцевого перерізу визначається за формулою (11) та порівнюється з вагою суцільного перерізу за формулою (12).

ПРИКЛАД

Дано: схема, розміри, матеріал, прикладені потужності, частота обертання (об/хв.), вага шківів, тип передачі (ремінна передача на 1-му і 4-му шківів) та α – співвідношення між зовнішнім та внутрішнім діаметрами кільцевого вала (рис. 2.3).

Знайти: розрахувати вал круглого та кільцевого поперечного перерізу.

План розрахунку:

1. Розрахувати обертальні моменти на шківів за відомими потужністю та кутовою швидкістю.
2. Визначити зосереджені сили від ремінної передачі.
3. Зосереджені сили розкласти на горизонтальні та вертикальні складові.
4. Побудувати епюри $M_y, M_z, M_\Sigma, M_{кр}$.
5. Визначити діаметр суцільного вала за умов міцності та жорсткості.
6. Побудувати епюри θ та φ для суцільного вала.
7. Визначити діаметр кільцевого вала за умов міцності та жорсткості.
8. Порівняти маси суцільного та кільцевого вала.
9. Побудувати епюри дотичних напружень в небезпечному перерізі для суцільного та кільцевого валів.

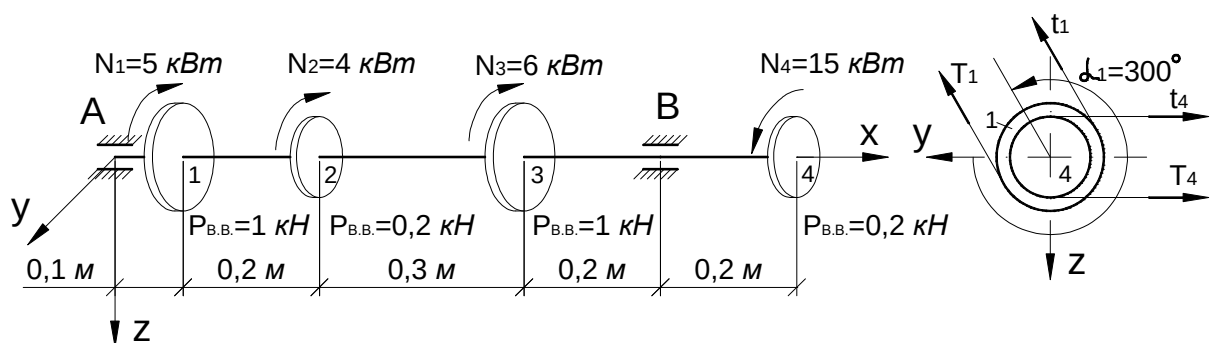


Рис. 2.3

Дано: $N_1 = 5$ кВт; $N_2 = 4$ кВт; $N_3 = 6$ кВт; $D_1 = D_3 = 0,6$ м;
 $D_2 = D_4 = 0,2$ м; $P_{B.B.1} = P_{B.B.3} = 1$ кН; $P_{B.B.2} = P_{B.B.4} = 0,2$ кН; $n = 250$ об/хв;
 $\alpha = 0,8$;

матеріал Ст – 40; $\theta_{adm} = 0,25$ град/м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\gamma = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³.

1. Визначаємо скручуючі моменти на шківках:

$$M_{ck1} = 9,549 \frac{N_1}{n} = 9,549 \frac{5}{250} = 0,191 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ck2} = 9,549 \frac{N_2}{n} = 9,549 \frac{4}{250} = 0,153 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ck3} = 9,549 \frac{N_3}{n} = 9,549 \frac{6}{250} = 0,229 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо невідомий момент M_{ck0} :

$$\sum M_x = 0; \quad 0,191 + 0,153 + 0,229 - M_{ck0} = 0, \quad M_{ck0} = 0,573 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Натяг ведучого ременя визначаємо за формулою (20):

$$t_1 = \frac{M_{ck1}}{0,5D_1} = \frac{0,191}{0,5 \cdot 0,6} = 0,637 \text{ кН};$$

$$t_4 = \frac{M_{ck4}}{0,5D_4} = \frac{0,573}{0,5 \cdot 0,2} = 5,73 \text{ кН}.$$

Повні зусилля від двох гілок пасової передачі визначаємо за формулою (21) і відповідно прикладені до вала в місці кріплення під заданим кутом до осі z (рис. 2.4, а):

$$P_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 0,637 = 1,911 \text{ кН};$$

$$P_4 = 3 \cdot t_4 = 3 \cdot 5,73 = 17,19 \text{ кН}.$$

3. Розкладемо повні зусилля на горизонтальні та вертикальні складові за формулою (24) або формулою (25) залежно від типу передачі:

$$P_{y1} = P_1 \cos \alpha_1 = 1,911 \cos \frac{5}{3} \pi = 0,956 \text{ кН};$$

$$P_{z1} = P_1 \sin \alpha_1 = 1,911 \sin \frac{5}{3} \pi = -1,655 \text{ кН};$$

$$P_{y4} = P_4 \cos \alpha_4 = 17,91 \cos \pi = -17,91 \text{ кН};$$

$$P_{z4} = P_4 \sin \alpha_4 = 17,91 \sin \pi = 0.$$

4. Для побудови епюри згинальних моментів визначаємо реакції у підшипниках А і В. Площина xOz (рис. 2.4, б):

$$\sum M_y = 0; \quad -R_B^z \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,1 - 1,655 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_B^z = 0,993 \text{ кН.}$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -R_A^z + 1 - 1,655 + 0,2 + 1 - 0,993 + 0,2 = 0;$$

$$R_A^z = 0,248 \text{ кН.}$$

Площина xOy:

$$\sum M_z = 0; \quad -R_B^y \cdot 0,8 - 0,956 \cdot 0,1 + 17,19 \cdot 1 = 0;$$

$$R_B^y = 21,368 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A^y + 1 - 0,956 - 21,37 + 17,19 = 0;$$

$$R_A^y = 5,134 \text{ кН.}$$

Далі будуємо епюри згинальних моментів у вертикальній M_y та в горизонтальній площині M_z (рис. 2.4, в, г). Оскільки вал має круглий або кільцевий поперечний переріз, то розрахунок ведеться на спільну дію прямого згину під дією результуючого згинаючого та крутного моментів. Сумарна епюра M_Σ від двох згинальних моментів M_y і M_z будується за координатами характерних точок, які визначаються за формулою (26). Епюра показана на рис. 2.4, д.

Епюра крутних моментів будується за методикою, яка викладена у підпункті 1.1 та показана на рис. 2.4, е. Небезпечний переріз вала визначається при зіставленні двох епюр: сумарної епюри згинальних моментів і епюри крутних моментів. У даному прикладі небезпечний переріз знаходиться в точці В ($M_\Sigma^{\max} = 34,38 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{кр} = 0,573 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

За IV теорією міцності приведений момент за формулою (30):

$$M_{red}^{IV} = \sqrt{M_\Sigma^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{34,38^2 + 0,75 \cdot 0,573^2} = 34,736 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Вал виготовлений із Ст.40. За табл. 1.1 вибираємо $\sigma_B = 580 \text{ МПа}$. Коефіцієнт запасу беремо $n_B = 2,4$. Допустиме напруження за формулою (28):

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_B}{n_B} = \frac{580}{2,4} = 241,7 \text{ МПа.}$$

5. Діаметр вала із умови міцності знаходимо за формулою (32):

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{red}^{IV}}{\pi\sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 34,736 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 241,7 \cdot 10^6}} = 0,0526 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 52,6 \text{ мм.}$$

Найближчий стандартний розмір беремо за табл. 1.2 $d = 55$ мм.

Вал працює при змінних навантаженнях, тому допустимий відносний кут закручування:

$$\theta_{adm} = 0,25 \text{ град/м} = \frac{\pi}{180} \cdot 0,25 \text{ рад/м}.$$

Діаметр вала за умови жорсткості:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{max}}{\pi G \theta_{adm}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,573 \cdot 10^3 \cdot 180}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,25}} = 0,6366 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 63,66 \text{ мм}.$$

Найближчий стандартний розмір беремо за табл. 1.2 $d = 65$ мм.

Із двох отриманих розмірів вибираємо більший діаметр, $d = 65$ мм.

6. Побудову епюр θ і ϕ починаємо з визначення I_p за формулою (14):

$$I_p = 0,1d^4 = 0,1 \cdot 0,065^4 = 178,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо відносний кут закручування вала на кожній ділянці за формулою (13):

$$\theta_1 = \frac{M_{кр1}}{GI_p} = \frac{0,191 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 178,5 \cdot 10^{-8}} = 0,134 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

$$\theta_2 = \frac{M_{кр2}}{GI_p} = \frac{0,344 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 178,5 \cdot 10^{-8}} = 0,241 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

$$\theta_3 = \frac{M_{кр3}}{GI_p} = \frac{0,573 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 178,5 \cdot 10^{-8}} = 0,401 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}.$$

За отриманими відносними кутами закручування вала будуємо епюру θ (рис. 2.4, ж).

Епюру кутів закручування починаємо будувати з прийнятого нерухомого перерізу (крайній лівий шків) $\phi_0 = 0$ (рис. 2.4, з). Ординати визначаємо за формулою (16):

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{M_{кр1}l}{GI_p} = 0 + \frac{0,191 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 178,5 \cdot 10^{-8}} = 0,272 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{M_{кр2}l}{GI_p} = 0,272 \cdot 10^{-3} + \frac{0,344 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 178,5 \cdot 10^{-8}} = 1,007 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\phi_3 = \phi_2 + \frac{M_{кр3}l}{GI_p} = 1,007 \cdot 10^{-3} + \frac{0,573 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 178,5 \cdot 10^{-8}} = 2,643 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

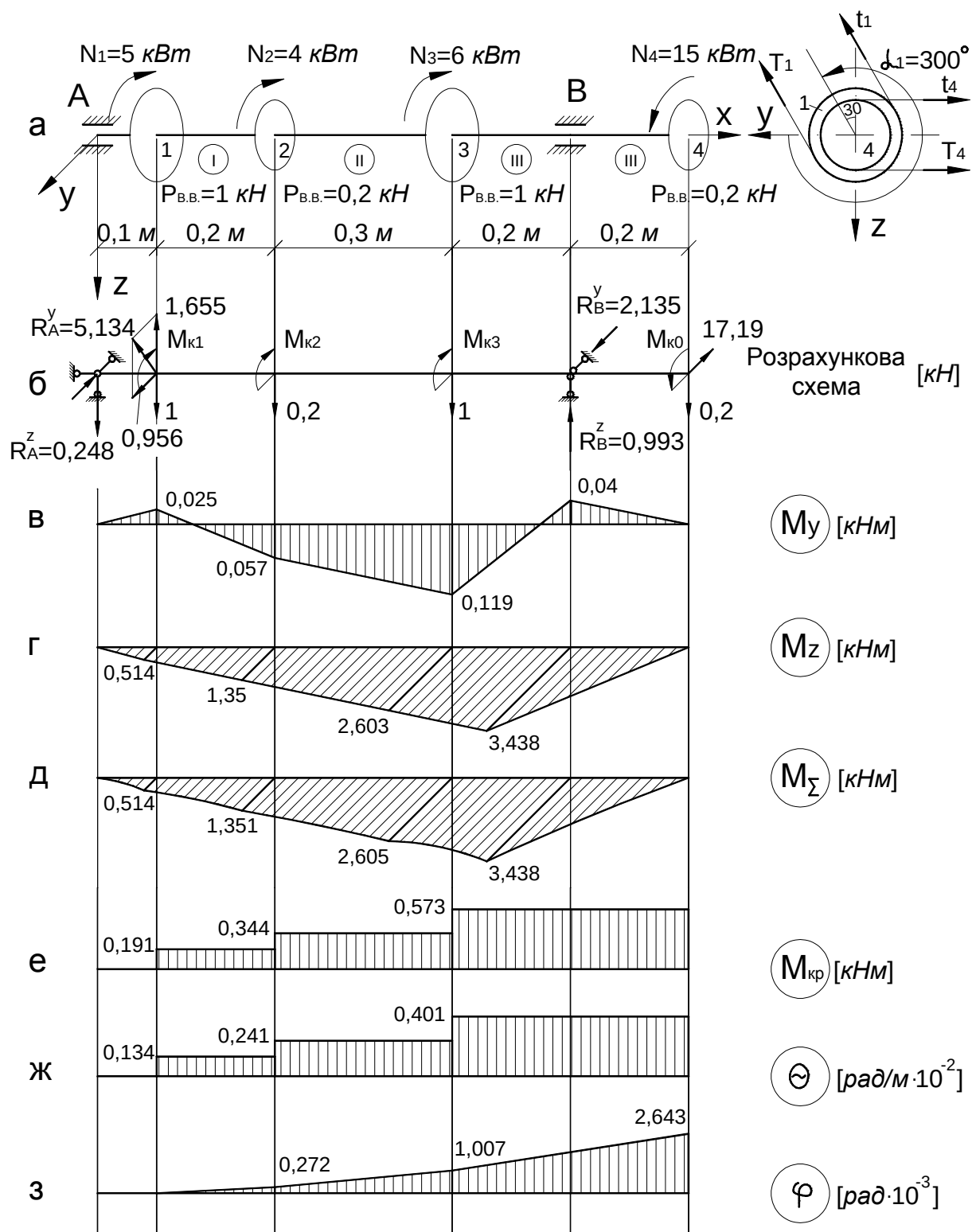


Рис. 2.4

7. Діаметр кільцевого вала визначаємо за умови міцності за формулою (33):

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}^{IV}}{\pi\sigma_{adm}(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 34,736 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 241,7 \cdot 10^6 (1-0,8^4)}} = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 62,8 \text{ мм.}$$

Із умов жорсткості за (8):

$$d_3 = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{\max}}{\pi G \theta_{adm}(1-\alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,573 \cdot 10^3 \cdot 180}{3,14^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,25 \cdot (1-0,8^4)}} = 7,29 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 72,9 \text{ мм.}$$

Найближчий стандартний розмір беремо за табл. 1.2 $d = 75 \text{ мм}$.

Внутрішній діаметр: $d_B = \alpha \cdot d_3 = 0,8 \cdot 75 = 60 \text{ мм}$.

8. Порівнюємо масу суцільного вала з валом кільцевого перерізу за формулою (12):

$$K = \frac{\pi \cdot (d_3^2 - d_B^2) \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot d^2} \cdot 100\% = \frac{3,14 \cdot (7,5^2 - 6^2) \cdot 4}{4 \cdot 3,14 \cdot 6,5^2} \cdot 100\% = 48\%.$$

Маса кільцевого вала складає 48% маси суцільного вала, що добре демонструє економічність їх застосування.

9. Визначаємо дотичні напруження у поперечному перерізі кожного вала і будуємо їх епюри (рис. 2.5).

Суцільний переріз:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{W_p} = \frac{16M_{кр}^{\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 0,573 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6,5^3 \cdot 10^{-6}} = 10,6 \text{ МПа.}$$

Кільцевий переріз:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{W_p(1-\alpha^4)} = \frac{16M_{кр}^{\max}}{\pi d^3(1-\alpha^4)} = \frac{16 \cdot 0,573 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 7,5^3 \cdot 10^{-6} (1-0,8^4)} = 11,72 \text{ МПа.}$$

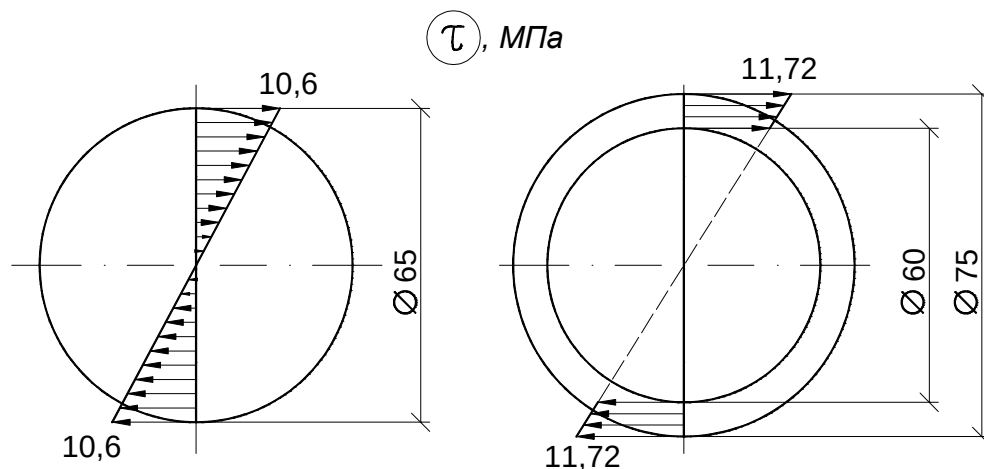


Рис. 2.5

Список літератури

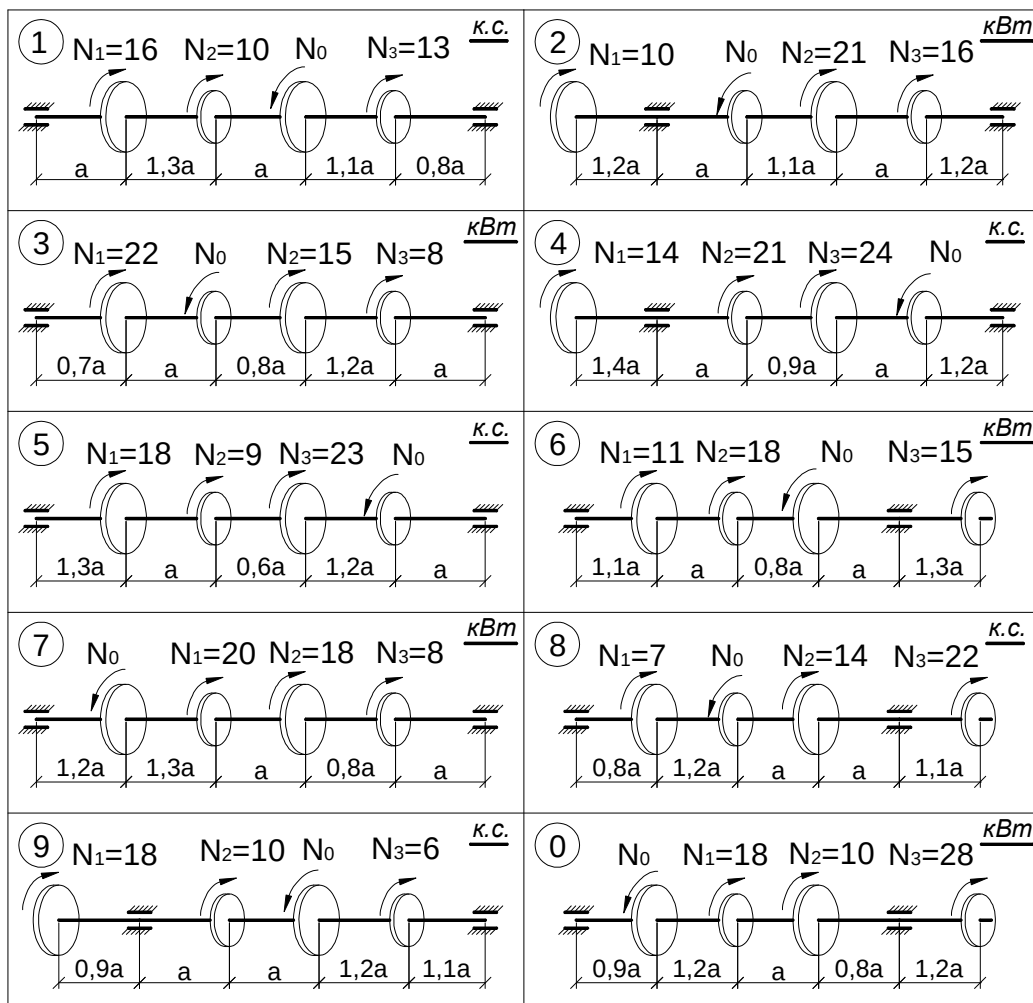
1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
2. Фесик С.П. Справочник по сопроотивленію матеріалов. – К.: Будівельник, 1982. – 280 с.
3. Сборник задач по сопроотивленію матеріалов /под. ред. В.К. Кочурина. – М.: Наука. 1970. – С. 62-180.

Додаток 1

№ пор.	Перша цифра		Друга цифра		Третя цифра			
	№ схеми	n, об/хв	$\alpha,$ $\left(\frac{d_3}{d_B}\right)$	a, м	Вага шківів/Кут нахилу ремня			
					$P_{B.B.,0}, \alpha_0$ кН, град	$P_{B.B.,1}, \alpha_1$ кН, град	$P_{B.B.,2}, \alpha_2$ кН, град	$P_{B.B.,3}, \alpha_3$ кН, град
1	0	210	0,6	0,75	0,6/—	0,7/45°	1,1/—	0,4/215°
2	9	230	0,9	0,4	0,8/115°	1,0/—	0,6/210°	1,3/—
3	8	280	0,5	0,6	1,2/32°	0,6/—	1,4/310°	0,8/—
4	7	300	0,8	0,7	0,7/—	1,2/135°	0,8/—	0,9/26°
5	6	250	0,7	0,5	0,8/64°	0,6/—	1,3/206°	0,5/—
6	5	320	0,5	0,3	0,4/—	1,0/70°	0,6/—	1,2/240°
7	4	310	0,6	0,65	0,9/24°	1,1/—	0,7/320°	0,8/—
8	3	290	0,7	0,35	1,2/—	0,5/45°	0,8/—	1,2/160°
9	2	180	0,9	0,45	1,0/64°	0,4/—	1,2/210°	0,6/—
0	1	200	0,8	0,55	0,7/—	0,8/70°	1,0/—	1,2/260°

Примітка. Діаметр більшого шківів – 0,6 м, меншого – 0,2 м.

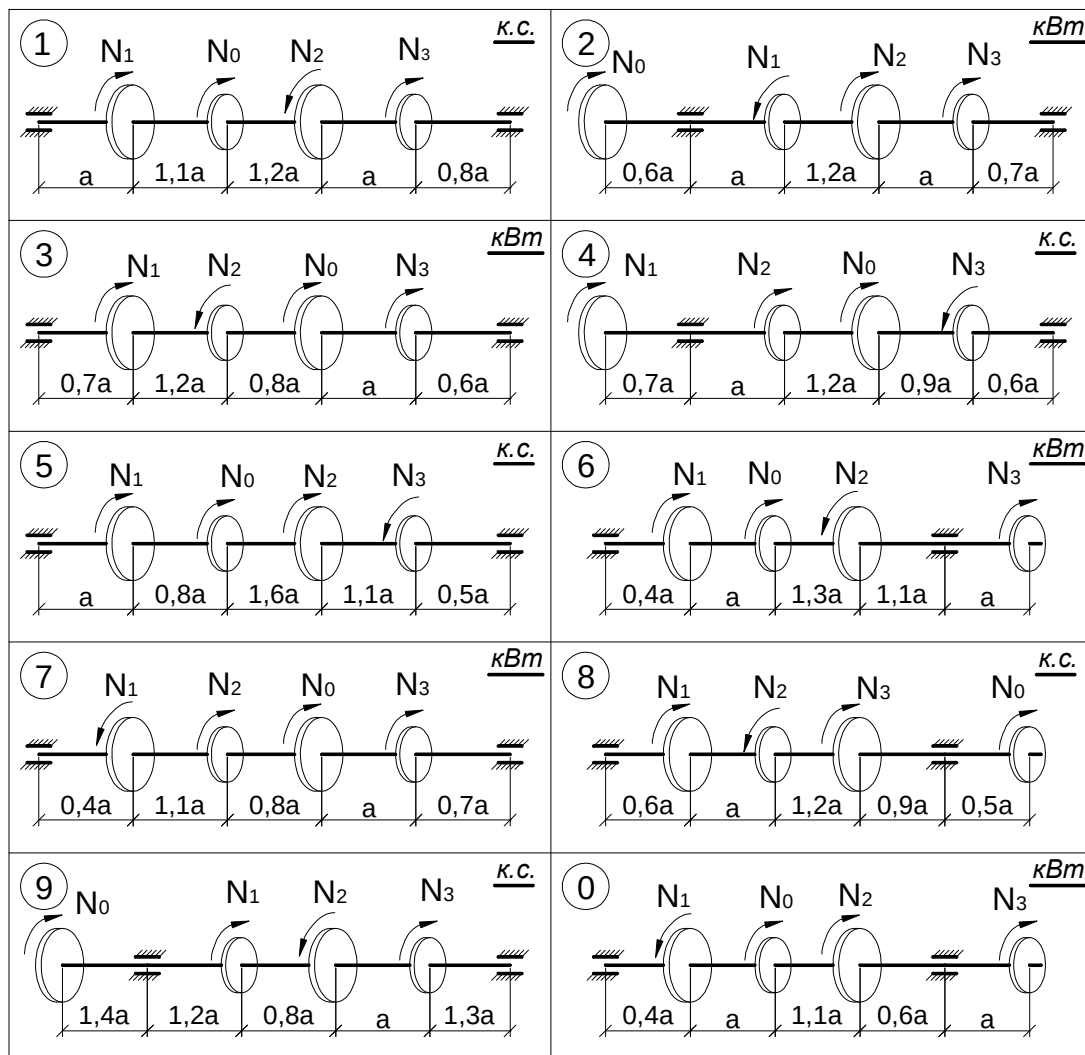
Додаток 2



Додаток 3

№ пор.	Перша цифра		Друга цифра			Третя цифра		
	№ схе- ми	n , об/хв	α , $\left(\frac{d_3}{d_B}\right)$	a , м	Мате- ріал	Потужність		
						N_1	N_2	N_3
1	1	310	0,5	0,25	Ст.30	15	9	18
2	2	280	0,6	0,3	Ст.40	8	16	12
3	3	180	0,7	0,35	Ст.45	6	15	9
4	4	200	0,8	0,4	Ст.60	14	8	17
5	5	210	0,9	0,45	Ст.30	22	18	10
6	6	220	0,5	0,5	Ст.40	24	11	15
7	7	230	0,6	0,55	Ст.45	19	10	16
8	8	290	0,7	0,6	Ст.60	17	7	13
9	9	250	0,8	0,65	Ст.30	21	17	11
0	0	230	0,9	0,7	Ст.40	9	20	14

Додаток 4



Зразок оформлення титульного аркуша

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

Розрахунково-графічна робота №____
”_____”
/тема/

Виконав:
студент_____
/спеціальність, курс, група/

/прізвище, ініціали/

Керівник _____
/прізвище, ініціали/

Київ - 20__ р.

Навчально-методичне видання

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Розрахунок вала на кручення та кручення зі згином

Методичні рекомендації, завдання та приклади
виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів, які навчаються
за напрямом підготовки
6.050502 «Інженерна механіка»

Укладачі: КОШЕВИЙ Олександр Петрович
ТРОБЮК Олександр Михайлович

Редагування та коректура *О.В. Карпенко*
Комп'ютерне верстання *Ю.Г. Томащука*

Підписано до друку 11.02. 2014. Формат 60 × 84 _{1/16}

Ум. друк. арк.1,63. Обл.-вид. арк.1,75.

Електронний документ. Вид. № 1/III-14.

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

Е-mail: red-isdat@ukr.net, тел. (044)241-54-22, 241-54-87

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів

Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.