

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

### **Частина 1.**

**Геометричні характеристики поперечних перерізів.**

**Побудова епюр внутрішніх зусиль.**

**Розрахунок статично-визначеної балки.**

Методичні рекомендації, завдання та приклади  
до виконання розрахунково-графічних робіт  
для студентів, які навчаються за спеціальностями

131 - «Прикладна механіка», 133 - «Галузеве машинобудування»

Київ 2016

УДК 539.3  
ББК 30.121  
О-61

Укладачі: О.П. Кошевий, канд. техн. наук, доцент  
О.М. Тробюк, асистент  
М.О. Янсонс, асистент

Рецензент: О.Ф. Корбаков, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск А.М. Станкевич, кандидат технічних наук,  
доцент

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 1  
від 31 серпня 2016 року*

**Опір матеріалів.** Частина 1. Геометричні характеристики поперечних перерізів. Побудова епюр внутрішніх зусиль. Розрахунок статично-визначеної балки.

О-61: Методичні рекомендації, завдання та приклади виконання розрахунково-графічних робіт /уклад.: О.П. Кошевий, О.М. Тробюк, М.О. Янсонс – К.: КНУБА, 2016. – 77 с.

Методичні рекомендації містять варіанти індивідуальних завдань та детальні плани виконання розрахунково-графічних робіт з курсу "Опір матеріалів", а також приклади розв'язку кожного завдання. Розглянуто розділи: «Геометричні характеристики поперечних перерізів», «Побудова епюр внутрішніх зусиль» та «Розрахунок статично-визначеної балки».

Призначено для студентів, які навчаються за спеціальностями 131 - «Прикладна механіка», 133 - «Галузеве машинобудування» для практичного використання під час виконання розрахунково-графічних робіт.

## ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні рекомендації призначені для допомоги студентам виконати розрахунково-графічну роботи з курсу «Опір матеріалів» за розділами:

- «Геометричні характеристики поперечних перерізів»;
- «Побудова епюр внутрішніх зусиль»;
- «Розрахунок статично-визначеної балки».

Розрахунково-графічну роботу студент повинен виконати за індивідуальним завданням, умова якого визначається згідно, виданим викладачем. Вихідні данні (розрахункові схеми та числові значення) студент вибирає з додатків (див. додатки 1, 2, 3) за власним шифром у вигляді тризначного числа.

Оформлюється розрахунково-графічна робота на аркушах формату А4, які скріплюються зліва. Титульний аркуш роботи оформлюється за зразком:

Міністерство освіти і науки України  
Київський національний університет будівництва і архітектури  
Кафедра опору матеріалів  
Розрахунково-графічна робота № \_\_\_\_\_

»\_\_\_\_\_»

/тема/

Виконав:

студент \_\_\_\_\_

/спеціальність, курс, група/

\_\_\_\_\_

/прізвище, ініціали/

Керівник \_\_\_\_\_

/прізвище, ініціали/

Київ - 20\_\_ р.

Пояснення та розрахунки потрібно виконувати на одній стороні аркуша ручкою, а креслення виконувати олівцем. Дозволяється комп'ютерне виконання креслень.

Для кожного завдання наведено план та рекомендації щодо виконання поетапного розрахунку. Для ілюстрації наведено приклад виконання РГР. Виконуючи кожен етап розрахунку, потрібно спочатку записати розрахункові формули, підставити числові значення та записати результат обчислення у відповідних одиницях виміру (система СІ).

Розрахунково-графічна робота вважається зарахованою після її захисту.

## 1. Геометричні характеристики поперечного перерізу стержня

**Постанова задачі.** Визначити головні центральні моменти інерції і моменти опору поперечного перерізу складної форми, побудувати еліпс інерції, використовуючи який знайти центральні моменти інерції відносно заданої системи центральних осей.

**Дано:** Схема перерізу з номерами прокатних профілів і розміри прямокутного елемента.

### План виконання вправи:

1. визначення положення центра ваги заданого складеного поперечного перерізу в прийнятій системі координатних осей (допоміжна система);
2. визначення осьових і відцентрових моментів інерції складного перерізу відносно центральних осей, паралельних початковим осям.
3. визначення положення головних центральних осей перерізу і визначення величин головних центральних моментів інерції складного перерізу;
4. визначення моментів опору перерізу;
5. побудова еліпсу інерції і визначення, використовуючи його, центральних моментів інерції відносно центральних осей, прийнятих при виконанні пункту 2 або вказаних викладачем.

### Графічне оформлення вправи:

1. В масштабі накреслити заданий поперечний переріз, вказати необхідні розміри, положення центрів ваги перерізів і центральних осей кожного елемента складного перерізу.
2. Вказати положення центру ваги заданого поперечного перерізу і центральних осей, паралельних допоміжним, прийнятим при визначенні координат центру ваги, вказати відстані між центральними осями усього перерізу і центральними осями окремих елементів, що складають його.
3. Вказати положення головних центральних осей інерції і відстані до них від найбільш віддалених точок поперечного перерізу.
4. Побудувати еліпс інерції, провести дотичні до нього, паралельні центральним осям (див. пункт 2), вказати відстані від точок дотику до центральних осей.

### Вказівки до виконання вправи.

1. Розбиваємо складний поперечний переріз на ряд елементарних перерізів, геометричні характеристики яких є у довідниках або можуть бути відносно просто пораховані. До елементарних перерізів відносять двотавр, швелер, рівнобічний і нерівнобічний кутик, прямокутник та інші.

Вибираємо допоміжні осі, відносно яких знаходимо положення центру ваги перерізу.

У якості допоміжних осей доцільно приймати осі симетрії окремих елементарних перерізів, які входять у заданий складний переріз.

Координати центру ваги заданого складного поперечного перерізу у вибраній системі допоміжних осей знаходиться як частка від ділення статичного моменту площі на площу перерізу.

Статичний момент площі складного перерізу дорівнює алгебраїчній сумі статичних моментів площ простих фігур, що входять до його складу.

Якщо відома площа перерізу і координата центру ваги цього перерізу відносно вибраної вісі, то статичний момент визначається без використання інтегрування, як добуток площі на координату.

Статичний момент площі може додатнім, від'ємним і рівним нулю.

Знак статичного моменту визначається знаком координати центру ваги елементарного перерізу відносно вибраної осі.

Статичний момент складного перерізу відносно його центральних осей повинен дорівнювати нулю.

Перевірка правильності визначення положення центру ваги складного перерізу можна виконати і графічним шляхом.

Якщо складна фігура розбивається на декілька простих фігур, то центр її ваги знаходиться усередині многокутника, отриманого шляхом послідовного з'єднання центрів ваги простих фігур, обходячи прості фігури в одному напрямку.

2. Всі моменти інерції площі перерізів вимірюються в  $\text{м}^4$ , або  $\text{см}^4$ , або  $\text{мм}^4$ .

Осьовий момент інерції може бути тільки додатнім.

Необхідно одразу звернути увагу що центральні осі прокатного профілю, вказані в сортаменті, можуть бути за умовою вправи повернуті відносно заданих на кут  $90^\circ$ , тобто вісь  $x$  профілю може бути в заданій системі координат віссю  $y_c$ , а вісь  $y$  – віссю  $x_c$ .

Відцентровий момент інерції може бути додатнім, від'ємним і дорівнювати нулю. Знак відцентрового моменту інерції залежить від знаку координат окремих елементів відносно центральних осей складного перерізу. Якщо одна з координатних всієї є віссю симетрії перерізу, то відцентровий момент інерції дорівнює нулю.

Нагадуємо, що відцентровий момент інерції прокатних профілів двотавра і швелера відносно їх центральних осей дорівнюють нулю.

Моменти інерції прокатних профілів (кутик рівнобічний і нерівнобічний, двотавр і швелер) наведені для кожного номеру профілю у відповідних сортаментах прокатних профілів. Використовуючи значення моментів інерції треба звернути особливу увагу на відповідність вибраних осей з осями, відносно яких визначені моменти інерції у таблицях сортаменту. У більшості сортаментів значення моментів інерції наведені у старій системі одиниць ( $\text{см}^4$ ). Для

переведення значень моментів інерції до міжнародної системи одиниць СИ необхідно табличне значення помножити на коефіцієнт  $10^{-8}$ .

В таблицях сортаменту для рівнобічних і нерівнобічних кутиків не приводяться значення відцентрових моментів інерції відносно центральних осей, паралельних полкам. В кожному окремому випадку їх визначають за наступними формулами:

$$I_{x_0, y_0} = \pm(I_{\max} - I_x)$$

Або

$$I_{x_0, y_0} = \pm 0,5(I_{\max} - I_{\min})$$

- для нерівнобічного кутика

$$I_{x_0, y_0} = \pm \sqrt{(I_{\max} - I_x)(I_{\max} - I_y)}$$

В залежності від розташування кутика відносно вибраних центральних осей інерції, паралельним полчкам, відцентровий момент інерції може бути додатнім або від'ємним. Знак відцентрового моменту інерції слід обирати згідно приведеної нижче схеми

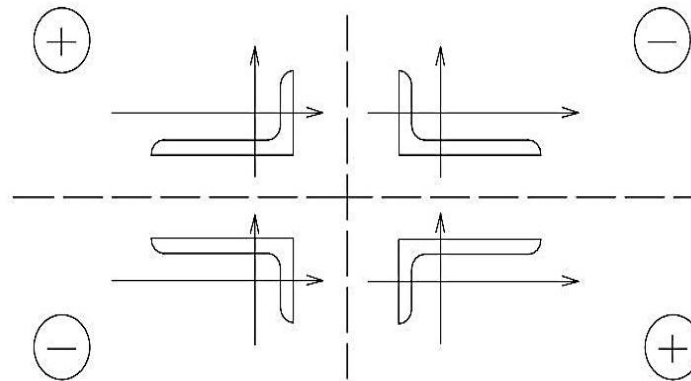


Рис.1.1

Будь яку складну фігуру можна розкласти на ряд простих, моменти інерції яких, відносно вибраної системи координатних осей, визначаються досить просто.

Осьовий момент інерції складної фігури відносно вибраної вісі дорівнює сумі осьових моментів інерції складаючих її простих фігур відносно тієї ж вісі.

Відцентровий момент інерції складної фігури відносно вибраних координатних осей дорівнює алгебраїчній сумі відцентрових моментів інерції складаючих її простих фігур відносно тих самих осей.

Складаючи відцентрові моменти інерції простих фігур, які входять в складну фігуру, необхідно звернути увагу на знаки відцентрових моментів інерції, аналогічно тому як це виконувалось при складанні статичних моментів площ.

Якщо відоме місце знаходження центру ваги складної фігури і величини центральних моментів інерції її складових фігур (осьових і відцентрового), то

величини моментів інерції, відносно центральних осей, паралельних допоміжним (див. пункт 2) дорівнюють

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= \sum_1^n (I_{x_i} + a_{y_i}^2 \cdot A_i); \\ I_{y_c} &= \sum_1^n (I_{y_i} + b_{x_i}^2 \cdot A_i); \\ I_{x_c y_c} &= \sum_1^n (I_{x_i y_i} + a_{y_i} b_{x_i} \cdot A_i); \end{aligned}$$

де  $a_{y_i}$  і  $b_{x_i}$  - відстані між осями

$A_i$  - площа перерізу.

3. Через центр ваги можна провести безліч координатних осей і серед них знайти взаємно перпендикулярні осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Ці осі називаються головними-центральними осями інерції, а моменти інерції відносно них – головними-центральними моментами інерції.

Величини головних-центральних моментів інерції визначаються за наступними формулами:

$$\begin{aligned} I_u &= I_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - I_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \\ I_v &= I_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + I_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} I_u &= I_{x_c} - I_{x_c y_c} \operatorname{tg} \alpha_0; \\ I_v &= I_{y_c} + I_{x_c y_c} \operatorname{tg} \alpha_0; \end{aligned}$$

Відмінністю головних-центральних моментів інерції є те, що один з них максимальний, а інший мінімальний з усіх можливих центральних моментів інерції. Максимальне і мінімальне значення головних-центральних моментів інерції можна визначити за формулами, без врахування кута нахилу  $\alpha$

$$I_{u,v} = I_{\max, \min} = (I_{x_c} + I_{y_c})/2 \pm \sqrt{0,25(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + I_{x_c y_c}^2}$$

Кут нахилу головних-центральних осей інерції відносно системи центральних осей визначається за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}};$$

Кут нахилу ( $\alpha_0$ ) може бути додатнім або від'ємним.

Додатне значення кута  $\alpha_0$  вказує щ на те що головні-центральної осі повернуті відносно даних центральних проти руху годинникової стрілки; від'ємний за рухом годинникової стрілки.

Контроль правильності визначення моментів інерції виконується, використовуючи інваріантність центральних моментів інерції при повертанні осей. Повинна виконуватись умова

$$I_u + I_v = I_{x_c} + I_{y_c};$$

Виконуючи цей контроль варто пам'ятати, що центральні моменти інерції  $I_{x_c}$  і  $I_{y_c}$  повинні мати проміжне значення в порівнянні з головними-центральними моментами інерції  $I_u$  і  $I_v$ , тобто максимальний головний-центральної момент інерції повинен бути більшим за більший по величині центрального моменту інерції, а мінімальний – менше меншого центрального.

4. Момент опору дорівнює частці від ділення головного центрального моменту інерції на відстань від головної-центральної вісі найбільш віддаленої точки поперечного перерізу. Розташування найбільш віддалених точок визначається дотичними до контуру поперечного перерізу, паралельними головним-центральним осям інерції.

Відстань до найбільш віддалених точок визначаються графічно на кресленні або аналітично, використовуючи формули перетворення координат при повороті центральної вісі на кут, рівний куту нахилу головних центральних осей інерції  $\alpha_0$ .

$$h_u = h_x \cos \alpha_0 - h_y \sin \alpha_0;$$

$$h_v = h_x \sin \alpha_0 + h_y \cos \alpha_0.$$

Тут  $h_u, h_v$  - відповідно відстані найбільш віддалених від осей  $U$  і  $V$  точок,  $h_x$  і  $h_y$  - координати цих точок у системі центральних осей перерізу, прийнятих у пункті 2 при визначенні центральних моментів інерції.

5. Еліпс інерції – еліпс, півосі якого рівні головним-центральним радіусам інерції.

Радіуси інерції відносно осей  $U$  і  $V$  є величини

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \quad \text{і} \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$$

де  $I_u, I_v$  - головні центральні моменти інерції,

$A$  - площа перерізу.

Принцип побудови еліпсу інерції складається у наступному: аналітично визначивши головні моменти інерції і визначивши головні-центральної осі інерції,



дотримуючись при цьому наступного правила. Головний радіус інерції,  $i_u$  (півось еліпса інерції) відкладаємо на вісі  $V$ , а  $i_v$  - на вісі  $U$ . Потім, використовуючи рівняння еліпсу інерції

$$\frac{V^2}{i_u^2} + \frac{U^2}{i_v^2} = 1,$$

де  $U$  і  $V$  - координати точок еліпсу, і задаючи одну з координат, визначаємо другу координату.

Для побудови еліпсу інерції необхідно визначити координати мінімум трьох точок еліпсу в одному з квадрантів. Знаючи координати точок еліпсу, визначеними його півосями, можна достатньо точно по п'яти точкам графічно побудувати одну чверть еліпсу. Так як еліпс є фігурою з двома осями симетрії, то отриманих даних достатньо для побудови усього еліпсу інерції.

Використовуючи еліпс інерції, можна графічно визначити радіус інерції, відносно будь-якої центральної вісі, складаючи з головної-центральної віссю кут  $\alpha$  і визначити момент інерції

$$I_\alpha = i_\alpha^2 \cdot A$$

Для знаходження радіусу інерції  $i_\alpha$  проводимо дотичну до еліпсу паралельну вісі, нахиленої до головної-центральної вісі інерції під кутом  $\alpha$ . Відстань від центру еліпса до цієї дотичної буде радіусом інерції  $i_\alpha$ , величина якого визначається з урахуванням при побудові еліпса масштабу кута нахилу  $\alpha$  задається викладачем.

Моменти інерції, визначені за допомогою еліпсу інерції можуть трохи відрізнятись від отриманих аналітично, що пояснюється можливими похибками графічної побудови.

### Приклад:

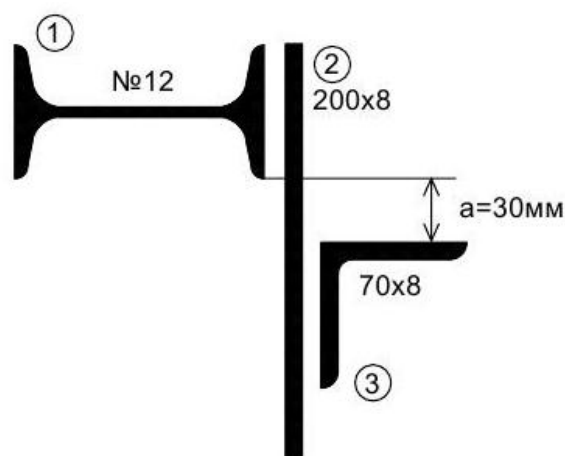
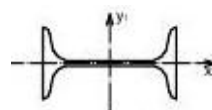


Схема поперечного перерізу

### Вихідні дані:

1. Двотавр №12



$$\begin{aligned} A_1 &= 14,7 \text{ см}^2 \\ I_{x_1} &= 27,9 \text{ см}^4 \\ I_{y_1} &= 350 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

## 2. Прямокутник 20x8 см

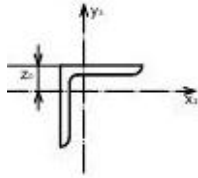


$$A_2 = 16 \text{ см}^2$$

$$I_{x_2} = \frac{0,8 \cdot 20^3}{12} = 533,3 \text{ см}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{20 \cdot 0,8^3}{12} = 0,85 \text{ см}^4$$

## 3. Рівнобічний кутик 70x8



$$z_0 = 2,02 \text{ см}, \quad A_3 = 10,7 \text{ см}^2, \quad I_{y_3} = I_{x_3} = 48,2 \text{ см}^4$$

$$I_{\max} = 76,4 \text{ см}^4, \quad I_{x_3 y_3} = +(76,4 - 48,2) = 28,2 \text{ см}^4$$

I. Визначення положення центра ваги (Рис.1.2) відносно осей  $x_3 y_3$ 

$$a_{13} = 8,22 \text{ см}$$

$$b_{13} = -8,82 \text{ см}$$

$$a_{23} = 8,22 - 6,8 = 1,42 \text{ см} \quad b_{23} = -(2,02 - 0,4) = -2,42 \text{ см}$$

$$a_{33} = 0$$

$$b_{33} = 0$$

$$y_{3c} = \frac{\sum A_i a_{i3}}{\sum A_i} = \frac{8,22 \cdot 14,7 + 1,42 \cdot 16,0}{41,4} = \frac{143,5}{41,4} = 3,47 \text{ см}$$

$$x_{3c} = \frac{\sum A_i b_{i3}}{\sum A_i} = \frac{-8,82 \cdot 14,7 - 2,42 \cdot 16,0}{41,4} = -\frac{168,4}{41,4} = -4,07 \text{ см}$$

Координати центрів ваги окремих елементів складного поперечного перерізу у системі координат  $x_c y_c$ :

$$a_{y_1} = 4,74 \text{ см}$$

$$b_{x_1} = -4,75 \text{ см}$$

$$a_{y_2} = -6,80 + 4,74 = -2,06 \text{ см}$$

$$b_{x_2} = 6,40 - 4,75 = 1,65 \text{ см}$$

$$a_{y_3} = -3,47 \text{ см}$$

$$b_{x_3} = 4,07 \text{ см}$$

Перевірка визначення координат центра ваги поперечного перерізу:

$$S_{x_c} = 0,$$

$$S_{y_c} = 0.$$

$$S_{x_c} = \frac{\sum A_i a_i}{\sum A_i} = \frac{14,7 \cdot 4,74 - 16,0 \cdot 2,06 - 10,7 \cdot 3,47}{41,4} = \frac{69,8 - 69,9}{41,4} \approx 0$$

$$S_{y_c} = \frac{\sum A_i b_i}{\sum A_i} = \frac{-14,7 \cdot 4,75 + 16,0 \cdot 1,65 + 10,7 \cdot 4,07}{41,4} = \frac{-69,8 + 69,9}{41,4} \approx 0$$

## II. Визначення $I_{x_c}$ , $I_{y_c}$ і $I_{x_c y_c}$ (Рис.1.2)

$$I_{x_c} = \sum_1^3 (I_{x_i} + a_{yi}^2 \cdot A_i) = 27,9 + 4,74^2 \cdot 14,7 + 533,3 + 2,06^2 \cdot 16 + 48,2 + 3,47^2 \cdot 10,7 =$$

$$= 28 + 333 + 533 + 67 + 48 + 129 = 1138 \text{ см}^4$$

$$I_{y_c} = \sum_1^3 (I_{y_i} + b_{xi}^2 \cdot A_i) = 350 + 4,75^2 \cdot 14,7 + 0,85 + 1,65^2 \cdot 16 + 48,2 + 4,07^2 \cdot 10,7 =$$

$$= 350 + 333 + 1 + 44 + 48 + 177 = 953 \text{ см}^4$$

$$I_{x_c y_c} = \sum_1^3 (I_{x_i y_i} + a_{y_i} \cdot b_{x_i} \cdot A_i) = 0 - 4,74 \cdot 4,75 \cdot 14,7 + 0 - 2,06 \cdot 1,65 \cdot 16 + 28,2 - 3,47 \cdot 4,07 \cdot 10,7 =$$

$$= -333 - 54 + 28 = -500 \text{ см}^4$$

## III. Визначення кута нахилу $\alpha_0$ головних-центральных осей і визначення головних-центральных моментів інерції $I_u$ і $I_v$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = -\frac{2 \cdot 500}{953 - 1138} = \frac{1000}{185} = 5,405$$

$$2\alpha_0 = 79^\circ 30', \quad \alpha_0 = 39^\circ 45'.$$

$$\sin \alpha_0 = 0,639, \quad \cos \alpha_0 = 0,769, \quad \sin 2\alpha_0 = 0,983, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = 0,832$$

а)  $I_u = 1138 \cdot 0,769^2 + 953 \cdot 0,639^2 + 500 \cdot 0,983 = 672 + 389 + 492 = 1553 \text{ см}^4$

$$I_v = 1138 \cdot 0,639^2 + 953 \cdot 0,769^2 - 500 \cdot 0,983 = 465 + 565 - 492 = 538 \text{ см}^4$$

б)  $I_u = 1138 + 500 \cdot 0,832 = 1138 + 416 = 1554 \text{ см}^4$

$$I_v = 953 - 500 \cdot 0,832 = 953 - 416 = 537 \text{ см}^4$$

в)  $I_{u,v} = 0,5(1138 + 953) \pm \sqrt{0,25(1138 - 953)^2 + 500^2} =$

$$= 1045 \pm \sqrt{8556 + 250000} = 1045 \pm 509$$

$$I_u = 1045 + 509 = 1554 \text{ см}^4, \quad I_v = 1045 - 509 = 536 \text{ см}^4$$

Перевірка інваріантності суми центральных моментів інерції

$$I_u + I_v = I_{x_c} + I_{y_c}$$

$$I_{x_c} + I_{y_c} = 1138 + 953 = 2091 \text{ см}^4$$

(а)  $I_u + I_v = 1553 + 538 = 2091 \text{ см}^4$

(б)  $I_u + I_v = 1553 + 537 = 2091 \text{ см}^4$

(в)  $I_u + I_v = 1554 + 536 = 2090 \text{ см}^4$

#### IV. Визначення моментів опору перерізу (Рис.1.3)

$$h_u = (4,74 + 3,2) \cdot 0,769 - (-4,75 - 6,0) \cdot 0,639 = 6,1 + 5,8 = 11,9 \text{ см}$$

$$h_v = (4,74 - 3,2) \cdot 0,639 + (-4,75 - 6,0) \cdot 0,769 = 1,0 - 8,3 = -7,3 \text{ см}$$

$$W_u = \frac{I_u}{h_u} = \frac{1553}{11,9} = 130 \text{ см}^3,$$

$$W_v = \frac{I_v}{h_v} = \frac{538}{7,3} = 74 \text{ см}^3.$$

#### V. Побудова еліпсу інерції (Рис.1.3)

Головні радіуси інерції

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{1553}{41,4}} = \sqrt{37,5} = 6,1 \text{ см}$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{538}{41,4}} = \sqrt{13,0} = 3,6 \text{ см}$$

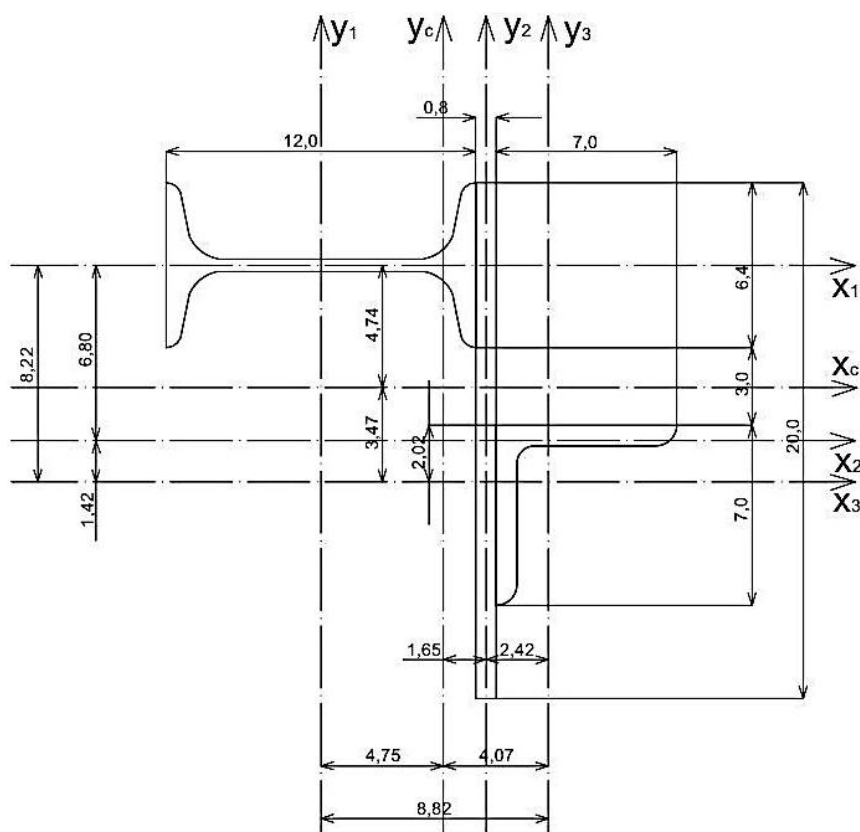


Рис.1.2

Визначення координат точок одної чверті еліпсу інерції

$$V = i_u \sqrt{1 - \frac{U^2}{i_v^2}}$$

$U$	$1 - \frac{U^2}{i_v^2}$	$\sqrt{1 - \frac{U^2}{i_v^2}}$	$V, \text{см}$
$i_v$	0	0	0
0,75	0,44	0,66	4,0
0,5	0,75	0,86	5,2
0,25	0,94	0,97	5,9
0	1	1	6,1

По цим даним на кресленні (Рис.1.3) будуємо еліпс інерції.

Визначення за допомогою еліпса інерції центральних моментів інерції  $I_{x_c}$  і  $I_{y_c}$ .

Знаходимо радіуси інерції графічним шляхом

$$i_{x_c} = 6,1 \text{см},$$

$$i_{y_c} = 3,6 \text{см}.$$

Визначаємо моменти інерції

$$I_{x_c} = i_{x_c}^2 \cdot A = 37,2 \cdot 41,4 = 1540 \text{см}^4,$$

$$I_{y_c} = i_{y_c}^2 \cdot A = 13,0 \cdot 41,4 = 548 \text{см}^4.$$

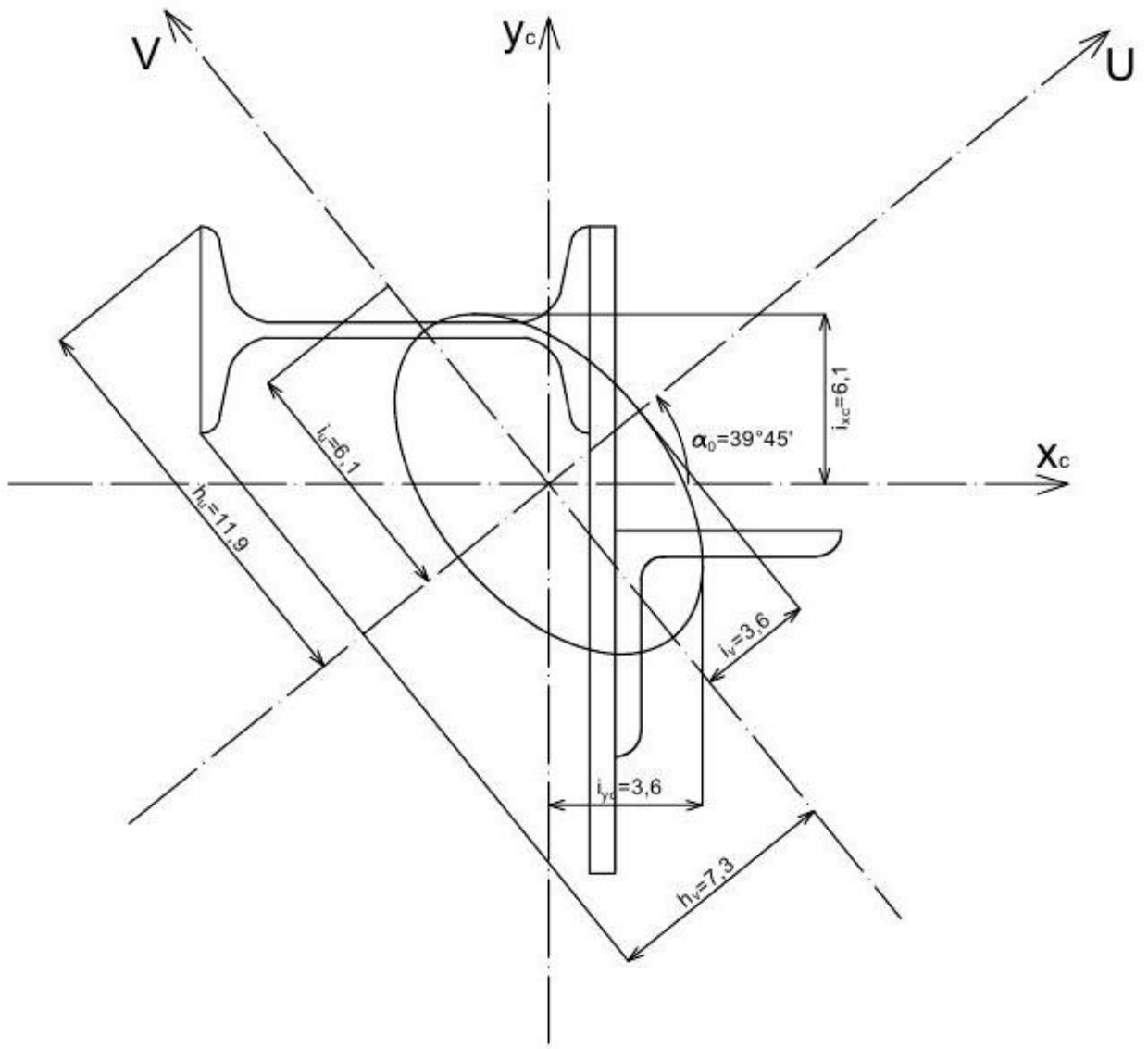


Рис.1.3

## 2. Побудова епюр внутрішніх зусиль.

### 2.1. Загальні положення.

При навантажуванні тіла довільними зовнішніми навантаженнями в ньому відбувається деяка зміна внутрішніх сил взаємодії між частинками цього тіла (молекулами, атомами і т.п.). В опорі матеріалів таку зміну сил взаємодії називають **внутрішніми силами**. Для визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів використовують метод перерізів. Для цього в деякій точці тіло розсікають площиною (як правило перпендикулярною до осі тіла) на дві частини ліву та праву, та розглядають рівновагу однієї з відсічених частин між зовнішніми навантаженнями та внутрішніми силами, що виникають в площині перерізу тіла. Внутрішні сили віднесені до одиниці площі поперечного перерізу називають **напруженнями**. Їх можна звести до центру ваги перерізу. Проекції головного вектору та головного моменту внутрішніх сил на поздовжню вісь  $X$  (або для криволінійної осі на дотичну до цієї осі) та на головні центральні осі поперечного перерізу  $Y$  та  $Z$  називають **внутрішніми зусиллями та моментами** в даному перерізі (Рис. 2.1). В загальному випадку навантажування стержня їх шість.

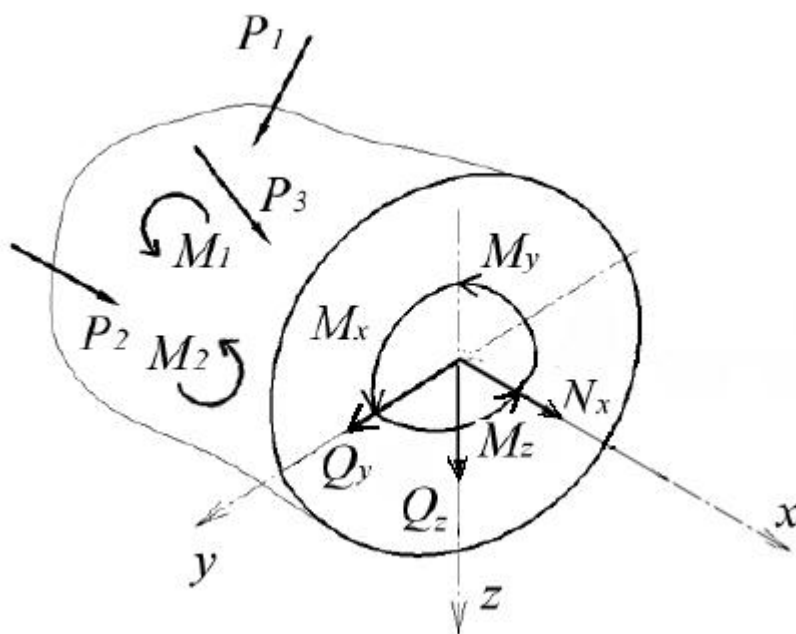


Рис. 2.1

$N$  - поздовжня (нормальна) сила;  $Q_y, Q_z$  - поперечні сили;  
 $M_x (M_{кр})$  - крутний момент ( момент кручення);  $M_y, M_z$  - згинальні моменти.

Тут і надалі під **зовнішніми силами** вважатимемо розподілені сили, зосереджені сили та зосереджені моменти, що прикладені до поздовжньої осі стержня, включаючи реакції в опорах

Поздовжня сила  $N$  в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на поздовжню вісь стержня  $X$  (або на дотичну до неї) всіх зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

Поперечна сила  $Q_y$  (або  $Q_z$ ) в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на перпендикулярну (нормальну) до осі стержня вісь  $Y$  (або  $Z$ ) зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

Згинальний момент  $M_y$  (або  $M_z$ ) в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно головної осі перерізу  $Y$  (або  $Z$ ) всіх зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

Крутний момент  $M_{кр}$  в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно поздовжньої осі стержня  $X$  всіх зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

Якщо вісь стержня та зовнішні навантаження лежать в одній площині, то з шести зусиль відмінними від нуля можуть бути лише три: поздовжня сила  $N$ , поперечна сила  $Q_z = Q$  та згинальний момент  $M_y = M$ . В випадку доцільно користуватись правилом знаків.

### Правила знаків для внутрішніх зусиль в стержні.

1. Поздовжня сила в перерізі додатна, якщо визиває у відсіченій частині стержня розтяг, а від'ємна якщо - стиск.



2. Поперечна сила в перерізі додатна, якщо визиває обертання відсіченої частини стержня навколо точки перерізу за годинниковою стрілкою, а від'ємна, якщо - проти годинникової стрілки.

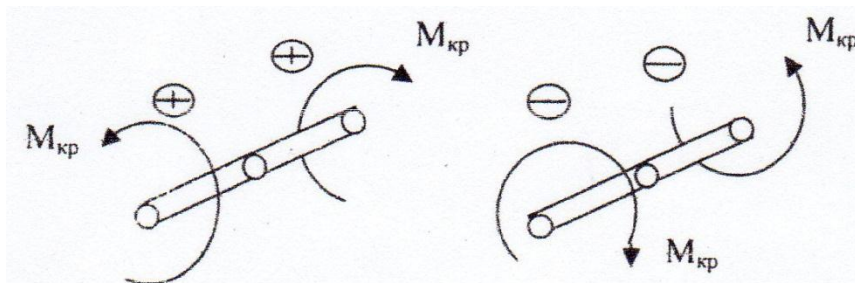


3. Згинальний момент в перерізі додатний, якщо визиває у відсіченій частині стержня розтяг нижнього волокна відносно точки перерізу, а від'ємний, якщо визиває у відсіченій частині стержня розтяг верхнього волокна. Епюра моментів завжди будується на розтягнутому волокні.





4. Крутний момент в перерізі додатній, якщо обертає відсічену частину стержня навколо поздовжньої осі  $X$  за годинниковою стрілкою зі сторони перерізу (тобто з торця відсіченої частини), від'ємний - якщо обертає проти годинникової стрілки.



## 2.2. План виконання завдання.

1. Складання розрахункової схеми.
2. Визначення реакцій опор.
3. Поділ розрахункової схеми на ділянки та визначення характерних поперечних перерізів.
4. Обчислення зусиль в характерних перерізах.
5. Побудова епюр внутрішніх зусиль.
6. Перевірка правильності побудованих зусиль.

## 2.3. Рекомендації до виконання завдання.

1. В наведених у додатку 2 схемах, стержень замінений його віссю (пряма, ламана або крива лінія), на якій позначені довжини і навантаження. Розрахункову схему треба накреслити обов'язково в масштабі, з нанесенням на неї всіх цифрових даних, значення яких, згідно шифру студента, вказані в додатку 2. Навантаження прикладаються до поздовжньої осі стержня та позначаються цифровими значеннями з таблиці Д-2.

2. В розрахункових схемах плоских стержньових систем зустрічаються три типи опор:

шарнірно-рухома опора - має одну в'язь, в якій виникає одна опорна реакція, що виникає вздовж опорного стержня (Рис.2.2.а);

шарнірно-нерухома опора - має дві лінійні в'язі, в яких виникають дві складові опорної реакції (Рис.2.2.б);

жорстко закріплена (затиснена) опора - накладає на стержень три в'язі (дві лінійні і одну кутову), в яких виникають три реакції (дві зосереджені сили та момент) (Рис.2.2.в).

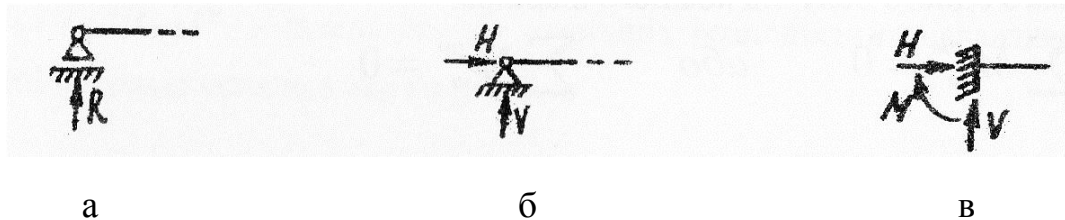


Рис.2.2

Всі опорні реакції вважаються прикладеними в центрі ваги опорного перерізу. Значення опорних реакцій в статично визначуваних системах знаходять з умов рівноваги всієї системи. Рівняння рівноваги для плоских стержньових систем можна записати у трьох варіантах:

- У вигляді сум проекції на дві осі, що перпендикулярні між собою та суми моментів всіх сил відносно довільної точки, що лежить в площині схеми:  $\sum x=0$ ;  $\sum z=0$ ;  $\sum M_o=0$ .
- У вигляді суми проекції на вісь і двох сум моментів відносно точок площини, що не лежать на одному перпендикулярі до цієї осі проекцій:  $\sum x=0$ ;  $\sum M_a=0$ ;  $\sum M_b=0$ .
- У вигляді трьох сум моментів відносно довільних трьох точок площини, що не лежать на одній прямій:  $\sum M_a =0$ ;  $\sum M_b =0$ ;  $\sum M_c=0$ .

Той чи інший варіант складання рівнянь рівноваги (з відповідним вибором точок і напрямку осей) використовують в кожному окремому випадку с таким розрахунком, щоб по можливості уникнути розв'язання системи рівнянь. Для перевірки правильності визначення опорних реакцій рекомендується підставити їх значення в будь-яке рівняння рівноваги, що не застосовували раніше.

Напрямок опорних реакцій при складанні рівнянь рівноваги можна вибирати довільний. Якщо при розрахунку будь-яка реакція буде мати від'ємний знак, то треба замінити її напрям на рисунку протилежним і надалі вважати цю реакцію додатною.

Якщо на стержень діє розподілене навантаження, то при визначенні реакції його замінюють на зосереджену силу площі епюри розподіленого навантаження і прикладється в центрі ваги цієї епюри.

Для шарнірно-консольних балок, крім звичайних рівнянь рівноваги, треба додатково скласти рівняння рівності нулю суми моментів всіх сил, що знаходиться ліворуч або праворуч від кожного шарніру:

$$\Sigma M_{\text{ш}}^{\text{лів}} = 0 \quad \text{або} \quad \Sigma M_{\text{ш}}^{\text{прав}} = 0.$$

Опорні реакції для балок з шарнірами можна визначати, поділивши їх на прості балки.

Доцільна послідовність визначення опорних реакцій для деяких систем наведена в таблиці 2.1.

№ п/п	Розрахункова схема	Рівняння для визначення реакцій	Визначені реакції	Перевірка
1		$\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ $\Sigma X = 0$	$V_B$ $V_A$ $H_A$	$\Sigma Z = 0$
2		$\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ $\Sigma X = 0$	$R_B$ $V_A$ $H_A$	$\Sigma Z = 0$
3		$\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ $\Sigma X = 0$	$R_C$ $R_A$ $R_B$	$\Sigma Z = 0$
4		$\Sigma M_D = 0$ $\Sigma M_B = 0$ $\Sigma M_C = 0$	$V_A$ $V_C$ $V_B$	$\Sigma Z = 0$
5		$\Sigma M_A = 0$ $\Sigma Z = 0$ $\Sigma X = 0$	$V_A$ $V_B$ $H_A$	$\Sigma M_B = 0$
6		$\Sigma M_A = 0$ $\Sigma Z = 0$ $\Sigma X = 0$	$V_A$ $V_B$ $H_A$	$\Sigma M_B = 0$

В розрахунках прямолінійних, криволінійних і ламаних стержнів, що жорстко закріплені одним кінцем, визначення опорних реакцій необов'язкове.

3. Ділянкою (характерним відрізком) системи називають кожну її частину, в межах якої зміни внутрішніх зусиль залишаються постійними. Границями ділянок є поперечні перерізи, в яких прикладені зосереджені сили (в тому числі опорні реакції) або в яких починається та закінчується

розподілене навантаження (або змінюється інтенсивність навантаження за новим законом). В рамках границями ділянок є також вузлові перерізи.

Характерні перерізи - це такі, в яких визначаються величини зусиль. Характерними перерізами є граничні точки всіх ділянок, а на ділянках з рівномірно розподіленим навантаженням - додатково 1-2 поперечних перерізи.

4. Зусилля в характерних перерізах можна обчислювати за складеними рівняннями або без їх складання. При складанні рівнянь на кожній ділянці стержня проводиться довільний переріз, вказується початок відліку координати  $X$  та границі її зміни, відповідно до наведених рекомендацій та правил знаків складають вирази (рівняння) зусиль як функції від координати  $X$ . Складенні вирази можна проконтролювати використовуючи диференціальні залежності:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x; \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q_y; \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z; \quad \frac{dM_{кр}}{dx} = -m; \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z; \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y;$$

де  $q_x$ ;  $q_y$ ;  $q_z$ ;  $m$  - інтенсивність зовнішніх розподілених навантажень, додатні напрями яких вказані на рис.2.3.

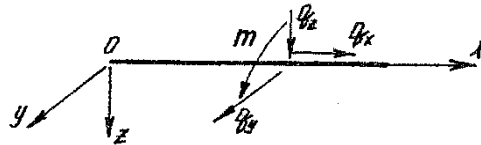


Рис.2.3

Більш раціональним є обчислення зусиль у характерних перерізах безпосередньо, без складання рівнянь.

У плоских криволінійних стержнях, які окреслені по дузі кола радіусом  $R$ , положення довільного перерізу доцільно визначати з допомогою полярних координат. Тоді внутрішні зусилля  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  будуть функціями кута  $\varphi$ . Диференціальні залежності між зусиллями мають вигляд:

$$\frac{dN}{d\varphi} = Q - q_t * R; \quad \frac{dQ}{d\varphi} = -N - q_r * R; \quad \frac{dM}{d\varphi} = Q * R,$$

де  $q_r$  та  $q_t$  - проекції розподіленого навантаження на радіус і дотичну до осі криволінійного стержня в точці перерізу.

5. Обчислені в характерних перерізах значення  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_{кр}$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , є ординатами епюр відповідних зусиль.

Епюра будь-якого зусилля - це графік, який відображає закон зміни величини цього зусилля по довжині стержня. Епюри зусиль для окремих прямолінійних стержнів будують кожен в своєму масштабі на осьових лініях,

які паралельні до осі стержня, а для криволінійних стержнів і рам - безпосередньо на осях стержнєвої розрахункової схеми.

Ординати відкладають перпендикулярно до осі епюр: для  $M_y$  та  $M_z$  - збоку розтягнутого волокна, для інших зусиль вибір напрямку ординат не принциповий. Для окремих горизонтальних стержнів, завантажених плоскою системою сил, доцільно використовувати наступне правило: додатні ординати  $N$ ,  $Q$  відкладають вгору,  $M$  - вниз, від'ємні - навпаки.

б. Для контролю епюр зусиль на самперед використовують правило, що випливають з диференціальних залежностей, наведених у п.4. Зокрема, для плоскої системи, завантаженої в її площині на підставі залежностей

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z; \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z$$

можна визначати: за характером навантаження - обриси ліній епюр  $Q_z$  і  $M_y$ ; за значенням поперечної сили - крутизну нахилу лінії, що обмежує епюру згинальних моментів; за знаком поперечної сили  $Q_z$  - зростання або зменшення ординат епюри  $M_y$ ; за нульовими точками епюри  $Q_z$  - наявність екстремумів в епюрі  $M_y$ .

Точкам прикладання зосереджених сил відповідають злами в епюрі  $M_y$ , у напрямі дії сили та стрибки в епюрі  $Q_z$  на величину цих сил; точкам прикладання зосереджених моментів відповідають стрибки в епюрі  $M_y$  на величину моментів, характер епюри  $Q_z$  в цьому разі не змінюється.

Для перевірки побудови епюр зусиль можна використовувати також умови рівноваги відсіченої частини системи, якщо прикласти до неї зовнішні навантаження, а в проведених перерізах зусилля, взяті з відповідних епюр. У рамках доцільна перевірка рівноваги вирізаних вузлів.

## Приклади

**Приклад 1.** Горизонтальна балка на двох опорах на яку діє зовнішнє навантаження прикладене в площині балки (Рис.2.4).

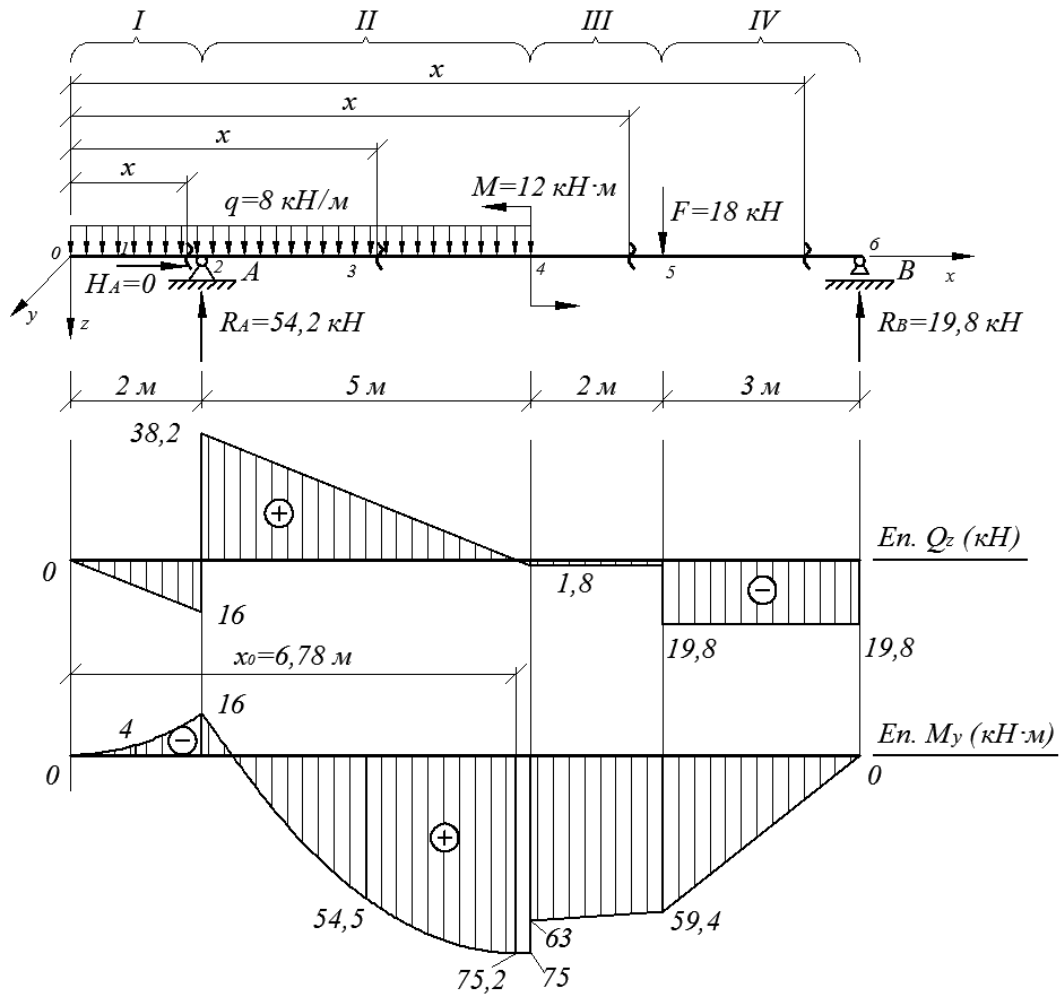


Рис.2.4

Визначаємо реакції опор:

$$\Sigma X = 0; H_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$R_B * 10 - 8 * 7 * 1,5 + 12 - 18 * 7 = 0; R_B = 19,8 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-R_A * 10 + 8 * 7 * 8,5 + 12 + 18 * 3 = 0; R_A = 54,2 \text{ кН};$$

$$\text{Перевірка: } \Sigma Z = 0; 8 * 7 - 54,2 + 18 - 19,8 = 0.$$

Беремо початок відліку координати X на лівому кінці балки. Поділяємо балку на ділянки I, II, III, IV та визначаємо характерні перерізи:

0, 1, 2, ..., 6 ( $x = 0; 1; 2; 4; 5; 7; 9; 12$  м).

Ділянка I ( $0 \leq x \leq 2$  м)

Складаємо вирази для Q та M,

$$Q = -8 * x; M = -8 * x * \frac{x}{2} = -4 * x^2.$$

Ділянка II ( $2 \text{ м} \leq x \leq 7 \text{ м}$ )

$$Q = -8 * x + 54,2;$$

$$M = -8 * x * \frac{x}{2} + 54,2 * (x - 2) = -4 * x^2 + 54,2x - 108,4.$$

Ділянка III ( $7 \text{ м} \leq x \leq 9 \text{ м}$ )

$$Q = -8 * 7 + 54,2 = 1,8 \text{ кН};$$

$$M = -8 * 7 * \left(x - \frac{7}{2}\right) + 54,2 * (x - 2) - 12 = -56 * (x - 3,5) + 54,2 * (x - 2) - 12..$$

Ділянка IV ( $9 \text{ м} \leq x \leq 12 \text{ м}$ )

$$Q = -8 * 7 + 54,2 - 18 = -19,8 \text{ кН};$$

$$M = -8 * 7 * (x - 3,5) + 54,2 * (x - 2) - 12 - 18 * (x - 9) = 0.$$

Визначаємо значення поперечних сил та згинальних моментів в характерних точках на балці підставивши в отримані рівняння значення координат X початку та кінця характерних відрізків, результати зводимо в таблицку.

X[м]	0	1	2	2	4,5	max	7	7	9	9	12
Q[кН]	0	-	-16	38,2	-	0	-1,8	-1,8	-1,8	-	-
M[кНм]	0	-4	-16	-16	-	75,2	75	63	59,4	59,4	0

По результатам розрахунків будуюмо епюри Q та M.

На ділянці II треба визначити екстремальну точку згинального моменту. При  $Q = 0 - M = \text{max}$ .

$$Q = -8 * x_0 + 54,2 = 0; \rightarrow x_0 = 6,78 \text{ м};$$

$$M_{\text{max}} = -4 * 6,78^2 + 54,2 * (6,78 - 2) = 75,2 \text{ кНм}.$$

**Приклад 2.** Балка на двох опорах з консоллю, що навантажена похилим рівномірно-розподіленим навантаженням. (Рис.2.5)

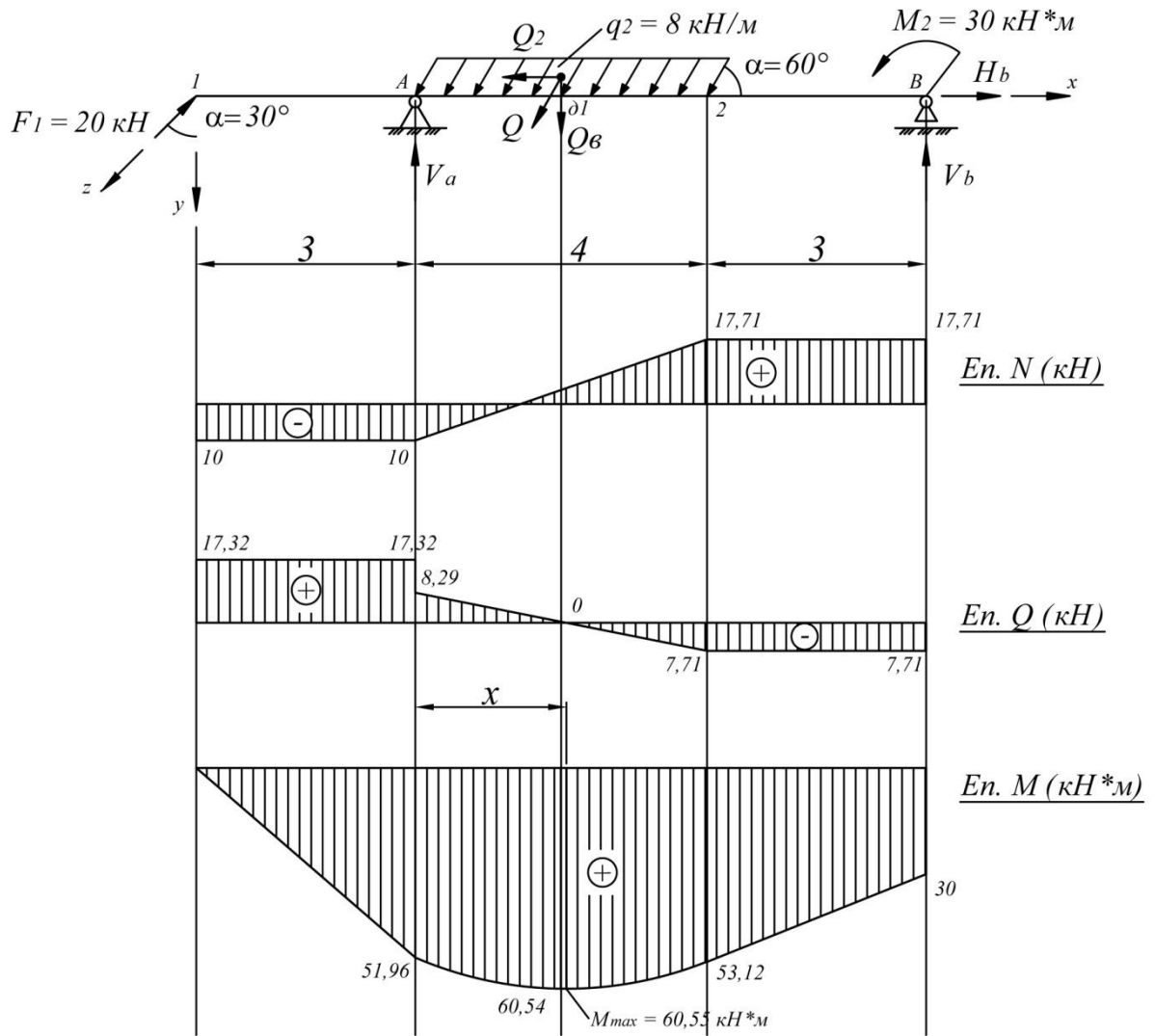


Рис.2.5

Замінюємо рівномірно-розподілене навантаження рівнодіючою силою, та розкладаємо похилі сили на дві складові - вертикальну та горизонтальну:

$$\begin{aligned}
 Q &= q_2 * 4 = 8 * 4 = 32 \text{ кН}; \\
 Q^2 &= Q * \sin 60^\circ = 32 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 27,11 \text{ кН}; \\
 Q^B &= Q * \cos 60^\circ = 32 * \frac{1}{2} = 16 \text{ кН}; \\
 F_1^B &= F_1 * \cos 30^\circ = 20 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,32 \text{ кН}; \\
 F_1^2 &= F_1 * \sin 30^\circ = 20 * \frac{1}{2} = 10 \text{ кН};
 \end{aligned}$$



Визначаємо реакції опор:

$$\Sigma X = 0;$$

$$F_2 - Q_2 + H_b = 0;$$

$$10 - 27,71 = -H_b; H_b = 17,71 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_a = 0;$$

$$F_1^B * 3 + Q^B * 2 - M_2 - V_b * 7 = 0$$

$$V_b = \frac{17,32 * 3 + 16 * 2 - 30}{7} = 7,71 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_b = 0;$$

$$F_1^B * 10 + V_a * 7 - Q^B * 5 - M_2 = 0$$

$$V_a = \frac{-17,32 * 10 + 16 * 5 + 30}{7} = -9,03 \text{ кН};$$

$$\text{Перевірка: } \Sigma Y = 0; F_1^B + V_a - Q^B + V_b = 17,32 + (-9,03) - 16 + 7,71 = 0$$

Беремо початок відліку координати  $x$ , позначаємо характерні точки на балці, та визначаємо ординати епюр зусиль  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (Рис.2.5) в характерних та додаткових точках методом перерізів, розглядаючи при цьому ліву від перерізу частину балки.

Поздовжня сила:  $N_{(x)}$

$$N_1^I = 0 \text{ кН};$$

$$N_1 = -F_1^2 = -10 \text{ кН};$$

$$N_a = -F_1^2 = -10 \text{ кН};$$

$$N_2 = -F_1^2 + Q^2 = -10 + 27,71 = 17,71 \text{ кН};$$

$$N_B^I = -F_1^2 + Q^2 = -10 + 27,71 = 17,71 \text{ кН};$$

$$N_B^II = -F_1^2 + Q^2 - H_b = -10 + 27,71 - 17,71 = 0 \text{ кН};$$

Поперечна сила:  $Q_{(z)}$

$$Q_1^I = 0 \text{ кН};$$

$$Q_1^II = F_1^2 = 17,32 \text{ кН};$$

$$Q_a^I = F_1^2 = 17,32 \text{ кН};$$

$$Q_a^II = F_1^2 + V_a = 17,32 + (-9,03) = 8,29 \text{ кН};$$

$$Q_2 = F_1^2 + V_a - Q^B = 17,32 + (-9,03) - 16 = -7,71 \text{ кН};$$

$$Q_B^I = F_1^2 + V_a - Q^B = 17,32 + (-9,03) - 16 = -7,71 \text{ кН};$$

$$Q_B^II = F_1^2 + V_a - Q^B + V_b = 17,32 + (-9,03) - 16 + 7,71 = 0 \text{ кН};$$

Згинальний момент:  $M_y$

$$M_1 = 0 \text{ кН};$$

$$M_a = F_1^B * 3 = +17,32 * 3 = 51,96 \text{ кН} * \text{м};$$

$$M_1 = F_1^B * 5 + V_a * 2 - q_2 * \cos 60^\circ * 2 * 1 =$$

$$= 17,32 * 5 + (-9,03) * 2 - 8 * \frac{1}{2} * 2 * 1 = 60,54 \text{ кН} * \text{м};$$

$$M_2 = F_1^B * 7 + V_a * 4 - q_2 * \cos 60^\circ * 4 * 2 =$$

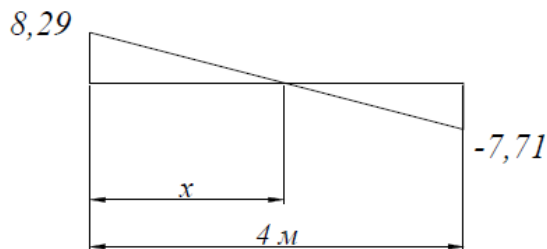
$$= 17,32 * 7 + (-9,03) * 4 - 8 * \frac{1}{2} * 4 * 2 = 53,12 \text{ кН} * \text{м};$$

$$M_b^I = F_1^B * 10 + V_a * 7 - q_2 * \cos 60^\circ * 4 * 5 =$$

$$= 17,32 * 10 + (-9,03) * 7 - 8 * \frac{1}{2} * 4 * 5 = 30 \text{ кН} * \text{м};$$

$$M_b^{II} = M_b^I - M_2 = 30 - 30 = 0 \text{ кН} * \text{м};$$

Визначимо положення  $M_{max}$  на Еп. М. Видалимо відрізок на Еп. Q де Q=0



$$8,29 + 7,71 \rightarrow 4$$

$$8,29 \rightarrow x$$

$$x = \frac{8,29 * 4}{16} = 2,07 \text{ м}$$

Визначаємо  $M_{max}$ , розглянемо переріз на відстані  $x = 2,07$  м від опори А.

$$M_{max} = F_1^B * 5,07 + V_a * 2,07 - q_2 * \cos 60^\circ * 2,07 * \frac{2,07}{2} =$$

$$= 17,32 * 5,07 + (-9,03) * 2,07 - 8 * \frac{1}{2} * 2,07 * \frac{2,07}{2} = 60,55 \text{ кН}$$

Будуємо епюри зусиль (Рис.2.5)

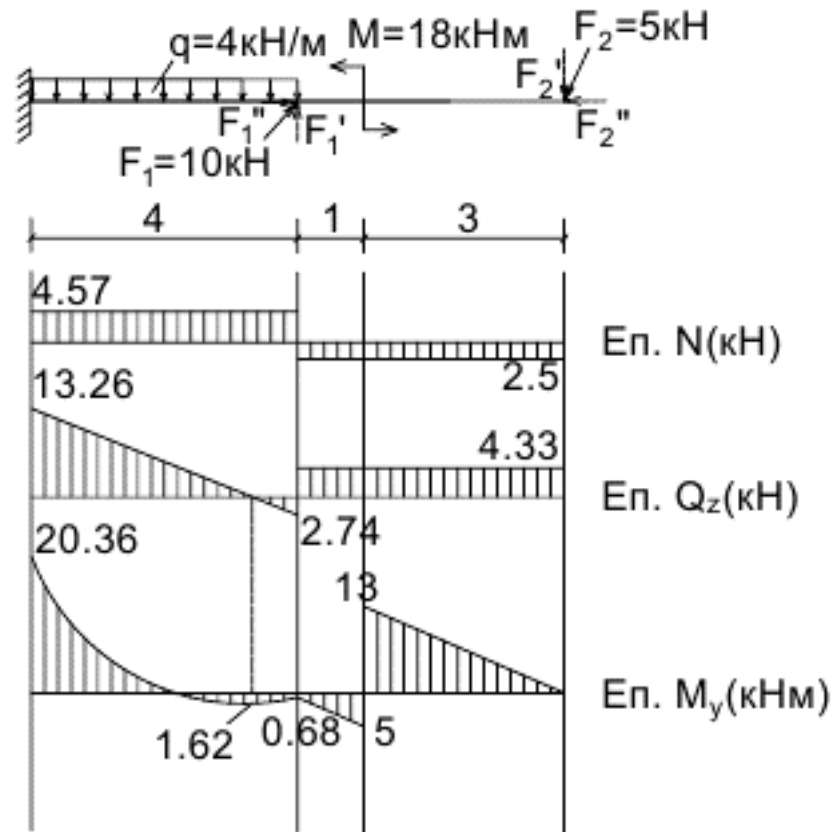
**Приклад 3.** Консоль, завантажена похилими силами.

Рис.2.6

Кожну похилу силу розкладаємо на дві складові: вертикальну та горизонтальну:

$$F_1' = F_1 \cos 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ kH}; \quad F_1'' = F_1 \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ kH};$$

$$F_2' = F_2 \cos 30^\circ = 5 \cdot 0,866 = 4,33 \text{ kH}; \quad F_2'' = F_2 \sin 30^\circ = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ kH}.$$

У цьому випадку опорні реакції в защемленні не обчислюємо. Зусилля визначаємо, розглядаючи умовно відсічену праву частину балки, без складання рівнянь, за характерними перерізами.

Поздовжня сила:  $N_{(x)}$

$$N_0 = -2,5kH;$$

$$N_{2,\Pi} = -2,5kH;$$

$$N_{2,\Lambda} = -2,5 + 7,07 = 4,57kH;$$

$$N_4 = 4,57kH.$$

Поперечна сила:  $Q_{z(x)}$

$$Q_0 = 4,33kH;$$

$$Q_{2,\Pi} = 4,33kH;$$

$$Q_{2,\Lambda} = 4,33 - 7,07 = -2,74kH;$$

$$Q_4 = 4,33 - 7,07 + 4 \cdot 4 = 13,26kH.$$

Згинальний момент:  $M_{y(x)}$

$$M_0 = 0;$$

$$M_{1,\Pi} = -4,33 \cdot 3 = -13kH_M;$$

$$M_{1,\Lambda} = -4,33 \cdot 3 + 18 = 5kH_M;$$

$$M_2 = -4,33 \cdot 4 + 18 = 0,68kH_M;$$

$$M_3 = -4,33 \cdot 6 + 18 + 7,07 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -1,84kH_M;$$

$$M_4 = -4,33 \cdot 8 + 18 + 7,07 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -20,36kH_M;$$

$$M_{\max} = -4,33 \cdot 4,69 + 18 + 7,07 \cdot 0,69 - 4 \cdot \frac{0,69^2}{2} = 1,62kH_M.$$

Будуємо епюри  $N$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$  (Рис.2.6)

**Приклад 4.** Балка прикріплена до основи у трьох точках за допомогою опорних стержнів (Рис.2.7).

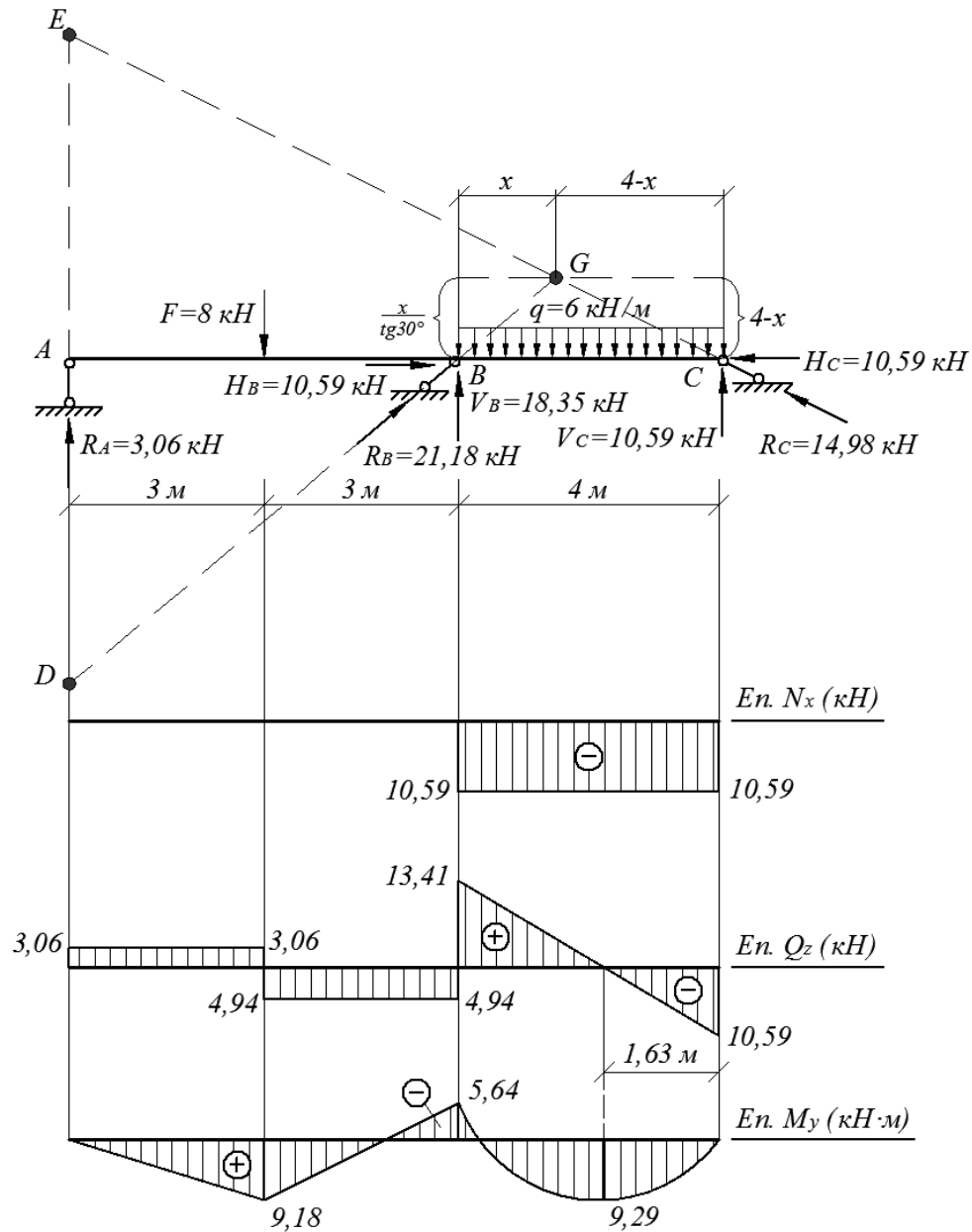


Рис.2.7

Реакції опор діють вздовж стержнів, напрями яких не перетинаються в одній точці. Тому ця система геометрично незмінна.

Точки перетину  $D$  та  $E$  опорних реакцій  $R_A$  з  $R_B$  та  $R_A$  з  $R_C$  лежать на вертикальній прямій, що проходить через точку  $A$  і перебуває від неї відповідно на відстанях:

$$AD = 6 \cdot \text{ctg} 30^\circ = 6 \cdot 1,733 = 10,39 \text{ м}; \text{ і } AE = 10 \cdot \text{ctg} 45^\circ = 10 \cdot 1 = 10 \text{ м}.$$

Знайдемо положення точки перетину  $G$  опорних реакцій  $R_B$  та  $R_C$ .

$$\frac{x}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 4 - x; \quad x = (4 - x) \cdot 0,577; \quad x = 1,46 \text{ м.}$$

Визначаємо опорні реакції та їх вертикальні й горизонтальні складові:

$$\sum M_D = 0; \quad R_C \cdot \cos 45^\circ \cdot 10 + R_C \cdot \sin 45^\circ \cdot 10,39 - 8 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 8 = 0;$$

$$R_C = 14,98 \text{ кН}; \quad V_C = R_C \cdot \cos 45^\circ = 14,98 \cdot 0,707 = 10,59 \text{ кН};$$

$$H_C = R_C \cdot \sin 45^\circ = 14,98 \cdot 0,707 = 10,59 \text{ кН.}$$

$$\sum M_E = 0; \quad R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 6 + R_B \cdot \sin 30^\circ \cdot 10 - 8 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 8 = 0;$$

$$R_B = 21,18 \text{ кН}; \quad V_B = R_B \cdot \cos 30^\circ = 21,18 \cdot 0,866 = 18,35 \text{ кН};$$

$$H_B = R_B \cdot \sin 30^\circ = 21,18 \cdot 0,5 = 10,59 \text{ кН.}$$

$$\sum M_G = 0; \quad -R_A \cdot 7,46 + 8 \cdot 4,46 - 6 \cdot 4 \cdot 0,54 = 0; \quad R_A = 3,06 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum F_x = 0; \quad 10,59 - 10,59 = 0;$$

$$\sum F_z = 0; \quad 3,06 + 18,35 + 10,59 - 8 - 6 \cdot 4 = 0.$$

Обчислюємо зусилля та будуємо епюри  $N_x$ ,  $Q_z$  та  $M_y$  (Рис.2.7).

**Приклад 5.** Шарнірно-консольна балка (Рис.2.8).

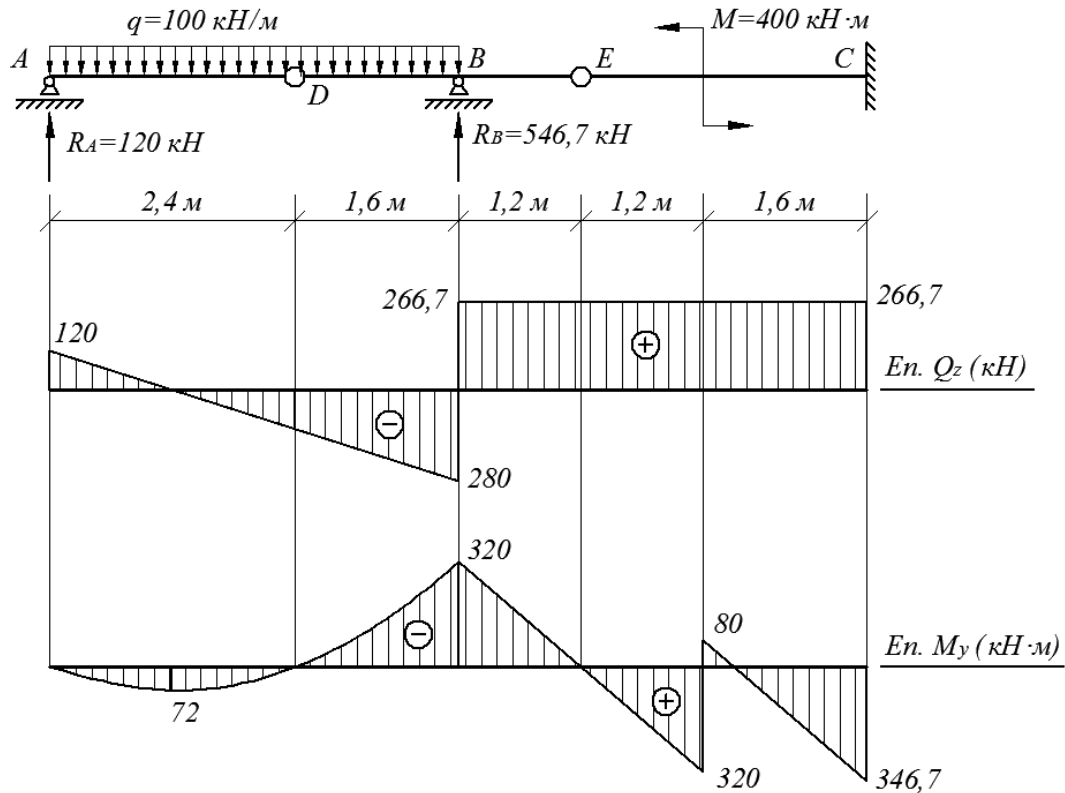


Рис.2.8

Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_D^{Ліє} = 0; \quad -R_A \cdot 2,4 + 100 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 0; \quad R_A = 120 \text{ кН};$$

$$\sum M_E^{Ліє} = 0; \quad -R_B \cdot 1,2 + 100 \cdot 4 \cdot 3,2 - 120 \cdot 5,2 = 0; \quad R_B = 546,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad M_C + 400 - 120 \cdot 8 + 100 \cdot 4 \cdot 6 - 546,7 \cdot 4 = 0; \quad M_C = 346,7 \text{ кНм};$$

$$\sum F_z = 0; \quad R_C - 120 - 546,7 + 100 \cdot 4 = 0; \quad R_C = 266,7 \text{ кН}.$$

Визначаємо ординати епюр зусиль, враховуючи зовнішні навантаження, що містяться зліва від розглянутих перерізів, і будуємо епюри  $Q_z$  та  $M_y$  (Рис.2.8).

Цю систему розраховують, поділяючи її на окремі балки. Послідовність визначення реакцій та побудови епюр зусиль у цей спосіб показана на рис.2.9.

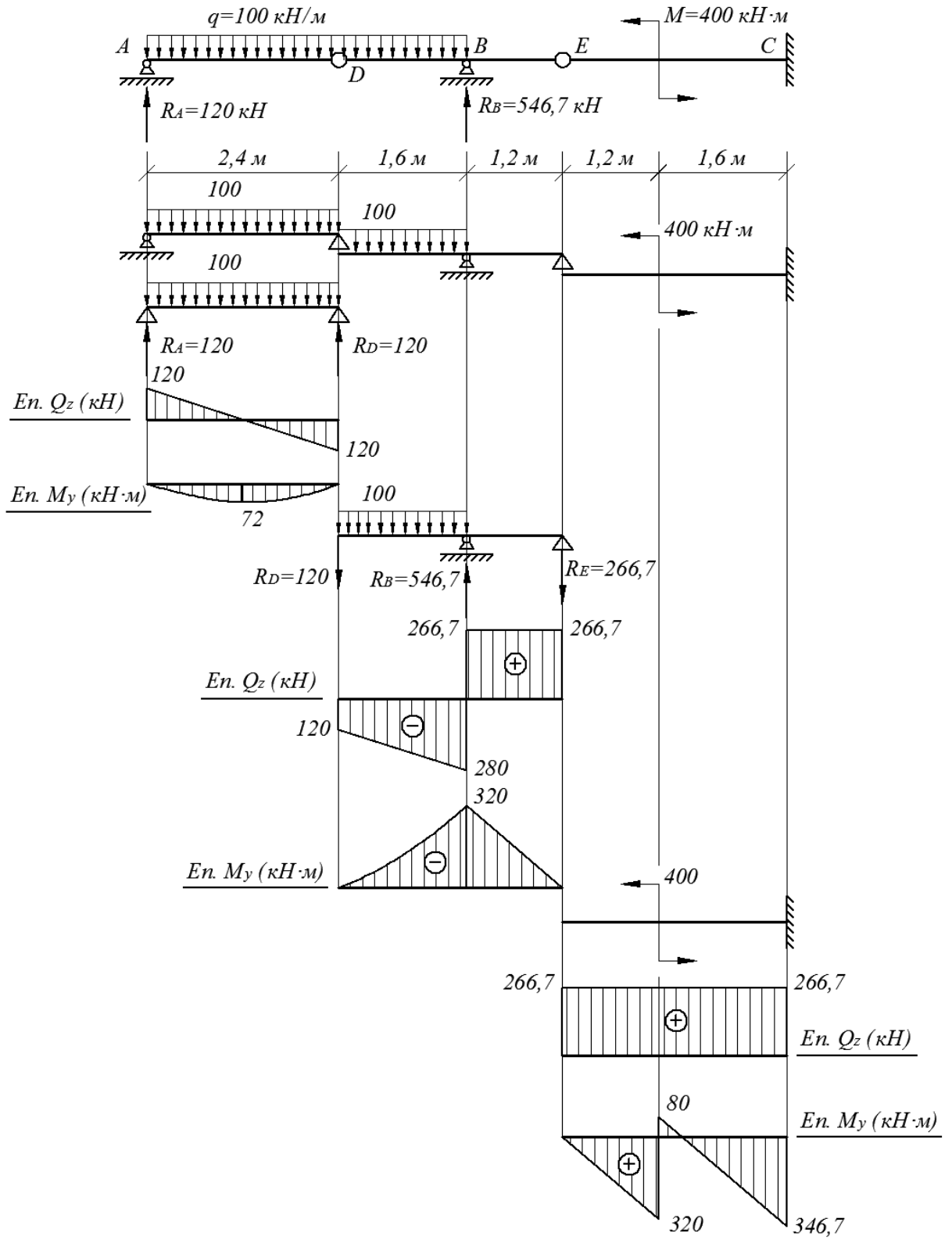


Рис.2.9



**Приклад 6.** Плоска рама з навантаженням, яке діє в площині рами (Рис. 2.10). Спочатку визначаємо кут  $\alpha$  та обчислюємо його тригонометричні функції.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75; \quad \alpha = 36,87^\circ; \quad \sin \alpha = 0,6; \quad \cos \alpha = 0,8.$$

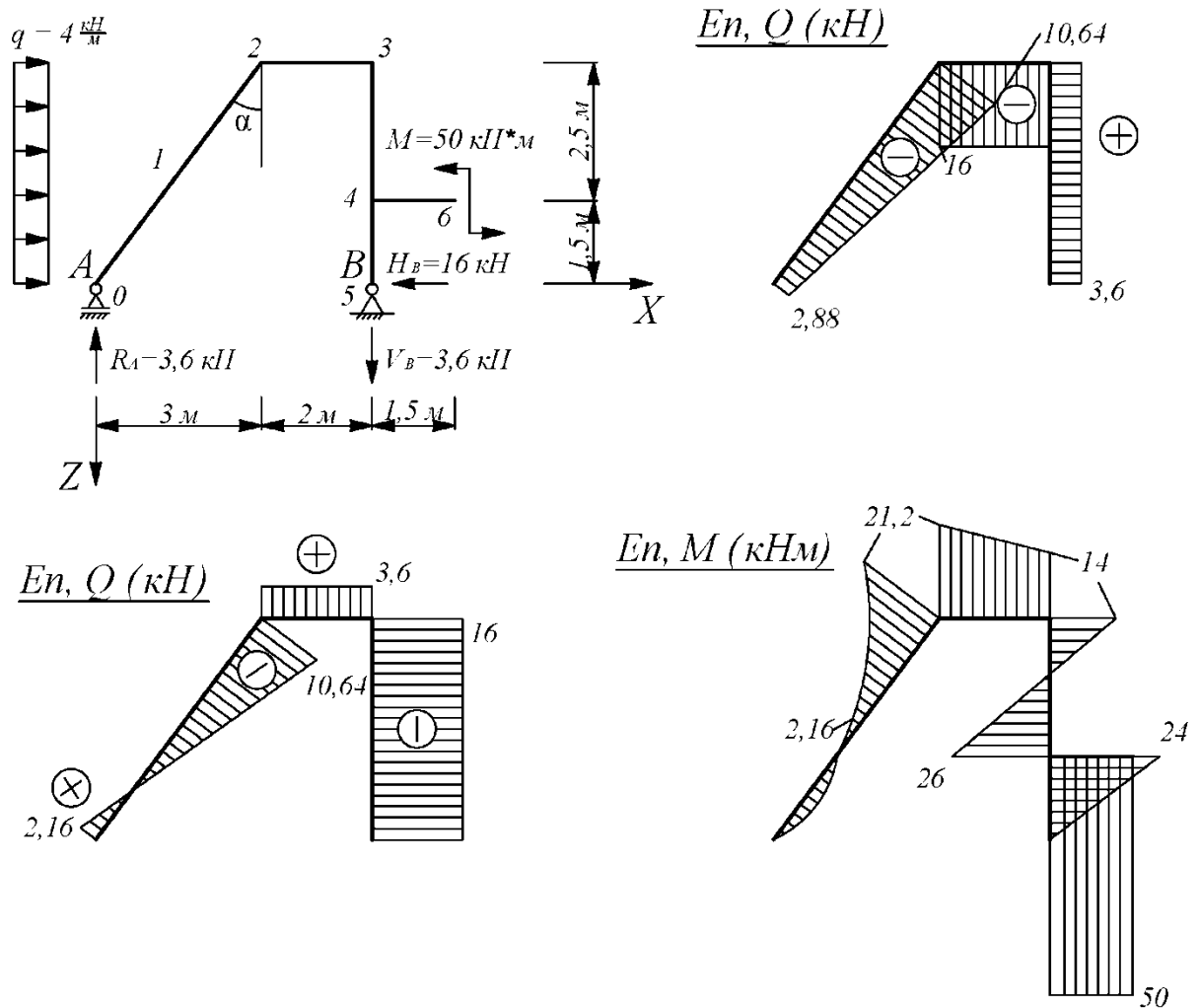


Рис. 2.10

Визначаємо опорні реакції:

$$\Sigma M_b = 0; \quad -R_a \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + 50 = 0; \quad R_a = 3,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad -V_b \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + 50 = 0; \quad V_b = 3,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad -H_b + 4 \cdot 4 = 0; \quad H_b = 16 \text{ кН};$$

Перевірка:

$$\Sigma Z = 0; -3,6 + 3,6 = 0.$$

Визначаємо характерні перерізи та обчислюємо в них значення зусиль.

Повздовжня сила:

$$N_0 = -R_a * \cos \alpha = -3,6 * 0,8 = -2,88 \text{ kH};$$

$$N_2^H = -R_a * \cos \alpha - q * 4 * \sin \alpha = -3,6 * 0,8 - 4 * 4 * 0,6 = -12,48 \text{ kH};$$

$$N_{2-3} = -q * 4 = -4 * 4 = -16 \text{ kH};$$

$$N_{3-5} = V_a = 3,6 \text{ kH};$$

$$N_{4-6} = 0$$

Поперечна сила:

$$Q_0 = R_a * \sin \alpha = 3,6 * 0,6 = 2,16 \text{ kH};$$

$$Q_2^H = R_a * \sin \alpha - q * 4 * \cos \alpha = 3,6 * 0,6 - 4 * 4 * 0,8 = -10,64 \text{ kH};$$

$$Q_2^{\Pi} = Q_3^{\text{Л}} = R_a = 3,6 \text{ kH};$$

$$Q_3^H = Q_5^B = H_B = 16 \text{ kH};$$

$$Q_4^{\Pi} = Q_6 = 0.$$

Згинальний момент:

$$M_0^B = 0;$$

$$M_1 = R_a * \frac{3}{2} - q * 2 * \frac{2}{2} = 3,6 * 1,5 - 4 * 2 * 1 = -2,6 \text{ kH} * \text{m};$$

$$M_2^H = R_a * 3 - q * 4 * \frac{4}{2} = 3,6 * 3 - 4 * 4 * 2 = -21,2 \text{ kH} * \text{m};$$

$$M_3^{\text{Л}} = M_5^{\Pi} = R_a * 5 - q * 4 * \frac{4}{2} = 3,6 * 5 - 4 * 4 * 2 = -14 \text{ kH} * \text{m};$$

$$M_4^{\Pi} = M_6^{\text{Л}} = -50 \text{ kH} * \text{m};$$

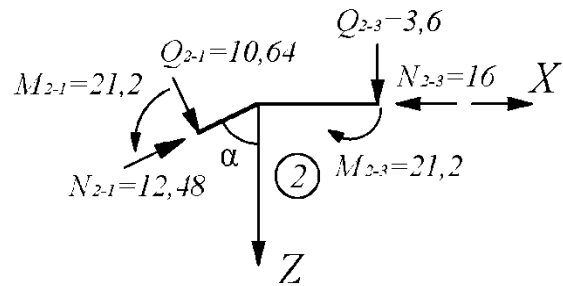
$$M_4^B = H_B * 1,5 - 50 = 16 * 1,5 - 50 = -26 \text{ kH} * \text{m};$$

$$M_4^H = H_B * 1,5 = 16 * 1,5 = 24 \text{ kH} * \text{m};$$

$$M_5^B = 0;$$

Будуємо епюри N, Q та M (Рис. 2.10).

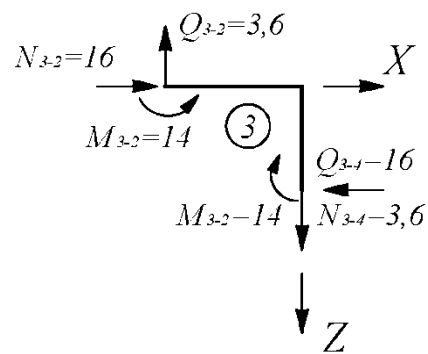
Виконуємо перевірку рівноваги вирізаних вузлів 2, 3 та 4, приклавши до них діючі внутрішні зусилля.

Вузол 2

$$\Sigma X = 0; \quad 10,64 * 0,8 + 12,48 * 0,6 - 16 = 0;$$

$$\Sigma Z = 0; \quad 10,64 * 0,6 - 12,48 * 0,8 + 3,6 = 0;$$

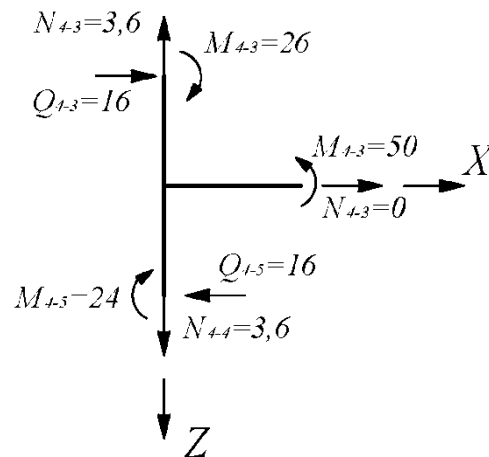
$$\Sigma M = 21,2 - 21,2 = 0.$$

Вузол 3

$$\Sigma X = 16 - 16 = 0;$$

$$\Sigma Z = 3,6 - 3,6 = 0;$$

$$\Sigma M = 14 - 14 = 0.$$

Вузол 4

$$\Sigma X = 16 - 16 = 0;$$

$$\Sigma Z = 3,6 - 3,6 = 0;$$

$$\Sigma M = 50 - 26 - 24 = 0.$$

**Приклад 7.** Плоский криволінійний стержень, вісь якого окреслена по дузі кола (Рис. 2.11).

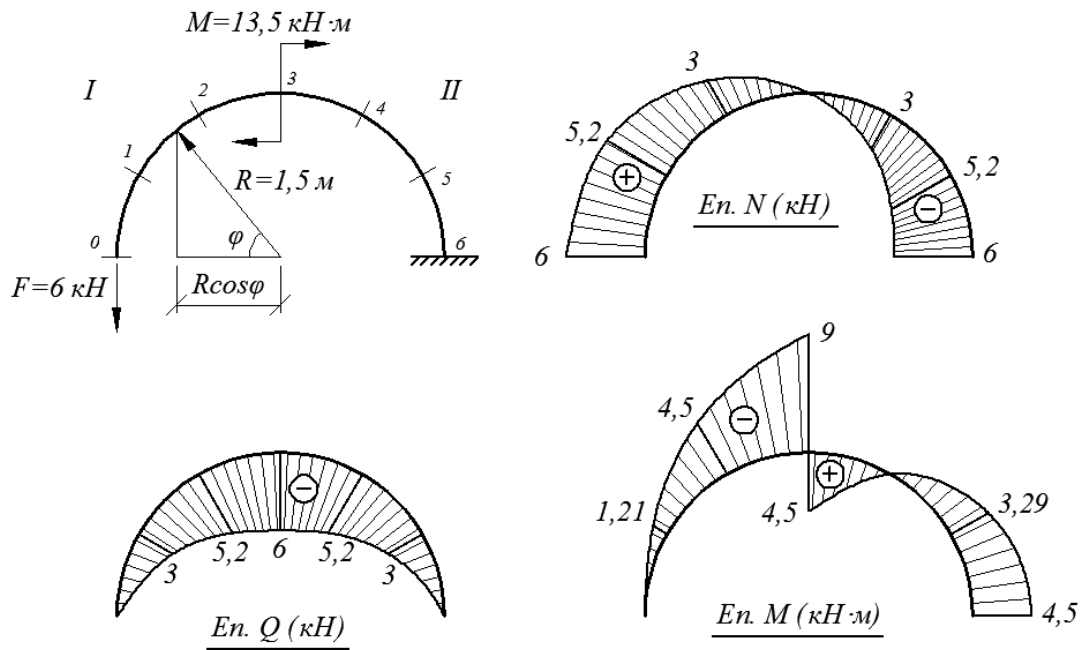


Рис. 2.11

Реакції в защемлені не визначаємо. Поділяємо вісь стержня на дві ділянки та складаємо рівняння для визначення зусиль. Розглядаючи ліву умовно відсічену частину стержня, проектуємо сили на дотичну та нормаль до осі стержня й визначаємо суму моментів відносно центру перерізу.

$$\text{Ділянка I} \left( 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$N(\varphi) = 6 \cdot \cos \varphi;$$

$$Q(\varphi) = -6 \cdot \sin \varphi;$$

$$M(\varphi) = -6 \cdot 1,5 \cdot (1 - \cos \varphi) = -9 \cdot (1 - \cos \varphi).$$

$$\text{Ділянка II} \left( \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \right).$$

$$N(\varphi) = 6 \cdot \cos \varphi;$$

$$Q(\varphi) = -6 \cdot \sin \varphi;$$

$$M(\varphi) = -9 \cdot (1 - \cos \varphi) + 13,5.$$

Обчислення  $N$ ,  $Q$  та  $M$  у перерізах, з інтервалом  $30^\circ$ , наведені в таблиці.

Ділянка	$\varphi$ , градуси	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$N(\varphi)$ , кН	$Q(\varphi)$ , кН	$M(\varphi)$ , кНм
I	0	0	1	6	0	0
	$30^\circ$	0,5	0,866	5,2	-3	-1,21
	$60^\circ$	0,866	0,5	3	-5,2	-4,5
	$90^\circ$	1	0	0	-6	-9
II	$90^\circ$	1	0	0	-6	4,5
	$120^\circ$	0,866	-0,5	-3	-5,2	0
	$150^\circ$	0,5	-0,866	-5,2	-3	-3,29
	$180^\circ$	0	-1	-6	0	-4,5

Будуємо епюри  $N$ ,  $Q$  та  $M$ , відкладаючи ординати по нормалі до криволінійної осі (Рис. 2.11).

**Приклад 8.** Просторова рама, закріплена одним кінцем і складається з трьох взаємно перпендикулярних стержнів (Рис. 2.12)

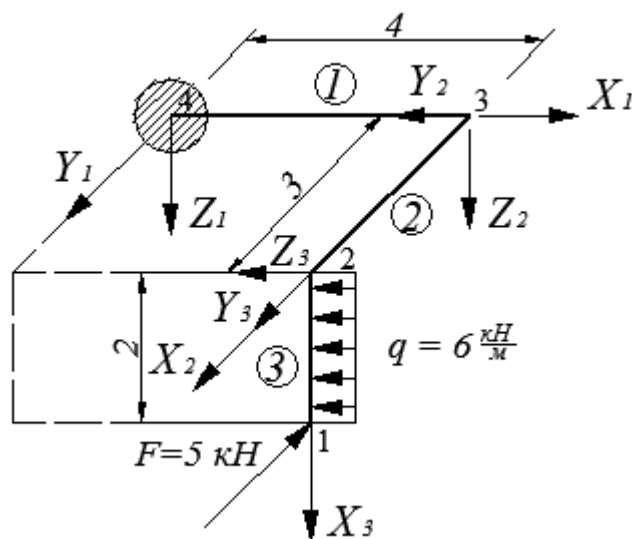
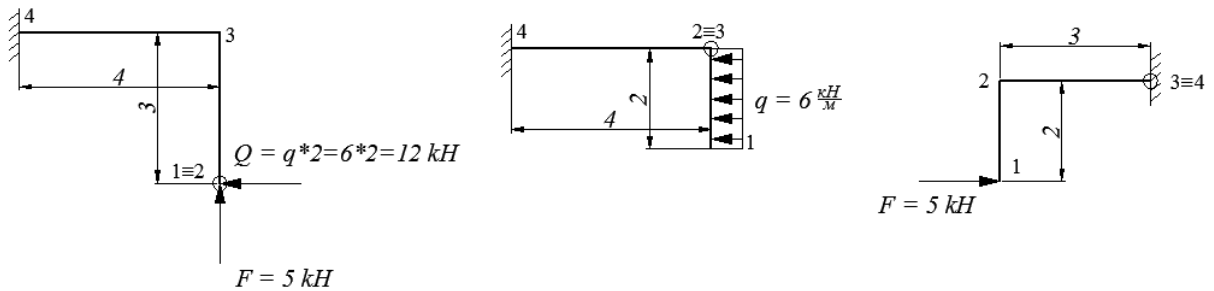


Рис. 2.12

Побудову епюр внутрішніх зусиль можна виконувати двома способами:

**1 спосіб:** Спроекувати просторову конструкцію на горизонтальну, фронтальну та профільну координатні площини з прикладеним навантаженням. Побудувати епюри М-згинальних моментів, Q-поперечних сил, N-повздовжніх сил для кожної площини.

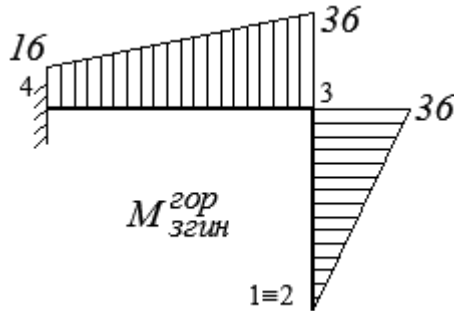


Горизонтальна

Фронтальна

Профільна

а)



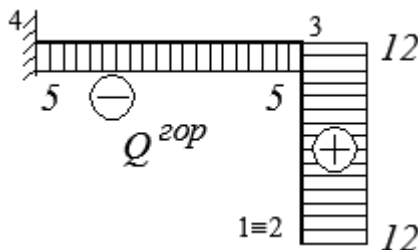
$$M_{1-2} = 0$$

$$M_3^H = Q * 3 = 12 * 3 = 36 \text{ kH} * \text{m}$$

$$M_3^L = Q * 3 = 12 * 3 = 36 \text{ kH} * \text{m}$$

$$M_4 = Q * 3 - F * 4 = 12 * 3 - 5 * 4 = 16 \text{ kH} * \text{m}$$

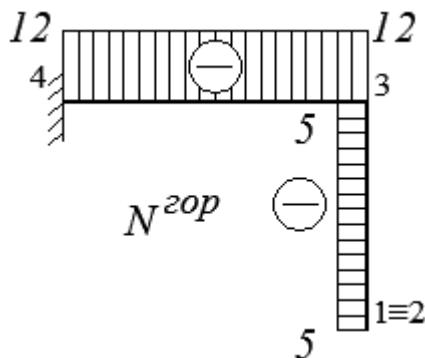
б)



$$Q_{1-2} = Q_3^H = Q = 12 \text{ kH}$$

$$Q_3^L = Q_4 = -F = -5 \text{ kH}$$

в)



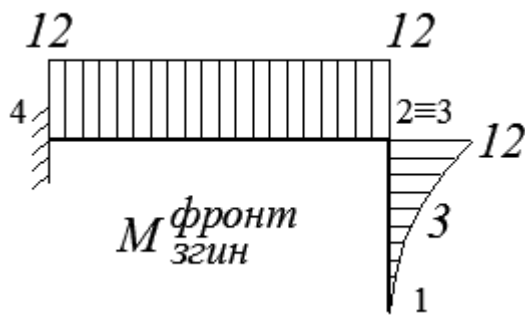
$$N_{1-2} = N_3^H = -F = -5 \text{ kH}$$

$$N_3^L = N_4 = -Q = -12 \text{ kH}$$

Рис. 2.13

Епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) у горизонтальній проекції.

а)



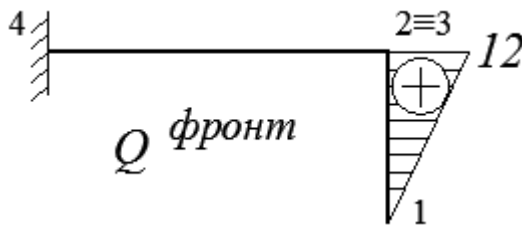
$$M_1 = 0$$

$$M_{2-3}^H = M_{2-3}^H = q * 2 * \frac{2}{2} = 6 * 2 * 1 = 12 \text{ kH} * \text{m}$$

$$M_{q1} = q * 1 * \frac{1}{2} = 6 * 1 * 0,5 = 3 \text{ kH} * \text{m}$$

$$M_4 = q * 2 * \frac{2}{2} = 6 * 2 * 1 = 12 \text{ kH} * \text{m}$$

б)



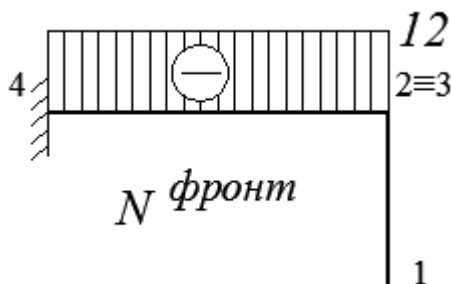
$$Q_1 = 0$$

$$Q_{2-3}^H = q * 2 = 6 * 2 = 12 \text{ kH} * \text{m}$$

$$Q_{2-3}^H = 0$$

$$Q_4 = 0$$

в)



$$N_1 = 0$$

$$N_{2-3}^H = 0$$

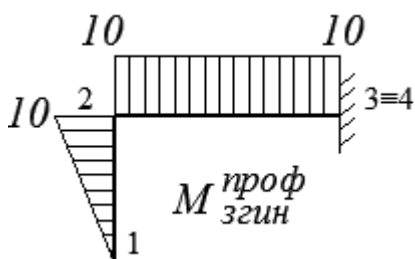
$$N_{2-3}^H = -q * 2 = -6 * 2 = -12 \text{ kH} * \text{m}$$

$$N_4 = -q * 2 = -6 * 2 = -12 \text{ kH} * \text{m}$$

Рис. 2.14

Епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) у фронтальній проекції.

а)

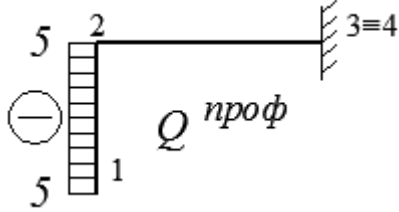


$$M_1 = 0$$

$$M_2 = -F * 2 = -5 * 2 = -10 \text{ kH} * \text{m}$$

$$M_{3-4} = -F * 2 = -5 * 2 = -10 \text{ kH} * \text{m}$$

б)



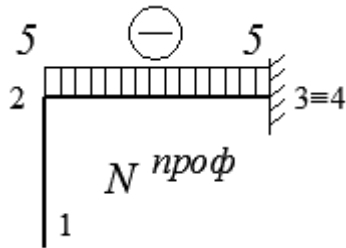
$$Q_1 = -F = -5 \text{ kH}$$

$$Q_2^H = -F = -5 = -5 \text{ kH} * m$$

$$Q_2^H = 0$$

$$Q_{3-4} = 0$$

в)



$$N_1 = N_2^H = 0$$

$$N_2^H = N_{3-4} = -F = -5 \text{ kH}$$

Рис. 2.15

Епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) у профільній проекції.

Далі отримані епюри складують в просторову

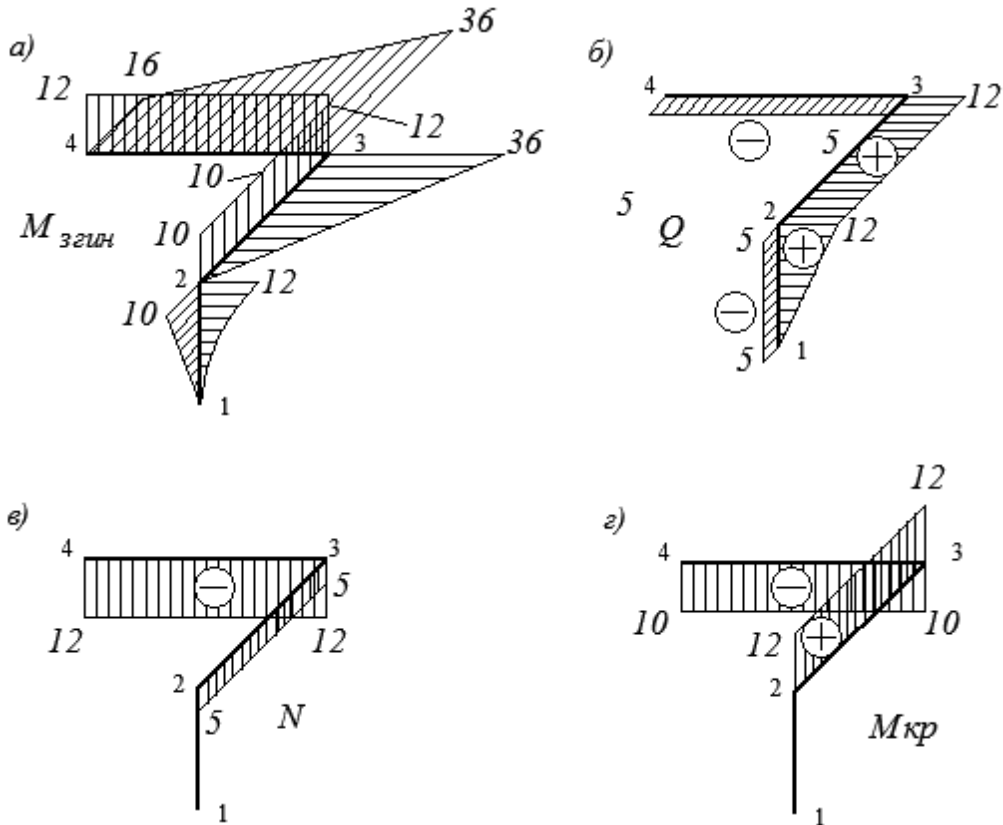


Рис. 2.16

Просторові епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) та крутних моментів (г).



Епюра  $M_{кр}$  (рис.2.16.г) будується на стержнях номери яких співпадають на проекціях епюр згинальних моментів. При цьому величина крутного моменту дорівнює величині згинального моменту в цій точці та розповсюджується по всій довжині стержня.

- горизонтальна проекція 1-2 - згинальний момент  $M_{1-2} = 0 \rightarrow M_{кр1-2} = 0$
- фронтальна проекція 2-3 - згинальний момент  $M_{2-3} = 12 \text{ кН} \rightarrow M_{кр2-3} = 12 \text{ кН*м}$
- профільна проекція 3-4 - згинальний момент  $M_{3-4} = 10 \text{ кН} \rightarrow M_{кр3-4} = -10 \text{ кН*м}$

## 2 спосіб:

При переході від одного стержня до іншого вісь  $X$  направляємо вздовж осі цього стержня, відповідно вказуємо додатні напрями осей  $Y$  та  $Z$ . Тоді беремо правило знаків для зусиль відповідно до рис.2.12 Знаки згинальних моментів можна не враховувати, а ординати відкладати в двох площинах з боку розтягнутих волокон на епюрі  $M$ .

Епюри поперечних та поздовжніх сил і крутних моментів також будуються в двох відповідних площинах. Ці епюри можуть бути орієнтовані як завгодно але ординати завжди відкладаються по нормалі від осі стержня.

В цій системі немає необхідності визначати опорні реакції. Побудову епюр починаємо із стержня 3. Визначаємо результат дії на нього сили  $F$  і рівномірно розподіленого навантаження  $q$ . Ці навантаження викликають у стержні поперечні сили та згинальні моменти, які мають такі значення:

$$Q_{y3} = -5 \text{ кН}; Q_{z3(\max)} = 6 * 2 = 12 \text{ кН};$$

$$M_{z3(\max)} = 5 * 2 = 10 \text{ кНм}; M_{y3(\max)} = 6 * 2 * 1 = 12 \text{ кНм}.$$

Переходимо до стержня 2. Стержень стикується та згинається у вертикальній площині силою  $F$ , а навантаження  $q$  викликає поперечний згин у горизонтальній площині та кручення цього стержня.

$$N_2 = -5 \text{ кН}; Q_{y2} = 6 * 2 = 12 \text{ кН}; Q_{z2} = 0;$$

$$M_{z2(\max)} = 12 * 3 = 36 \text{ кНм}; M_{y2} = 5 * 2 = 10 \text{ кНм};$$

$$M_{кр2} = 12 * 1 = 12 \text{ кНм}.$$

У стержні 1 сила  $F$  викликає поперечний згин та кручення, а навантаження  $q$  - стискає та згинає його у двох площинах.

$$N_1 = -6 * 2 = -12 \text{ кН}; Q_{z1} = 0; Q_{y1} = -5 \text{ кН};$$

$$M_{z1 \text{ защ}} = 36 - 5 * 4 = 16 \text{ кНм}; M_{y1} = 6 * 2 = 12 \text{ кНм};$$

$$M_{кр1} = -5 * 2 = -10 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри зусиль (Рис. 2.16).

### 3. Розрахунок статично визначеної балки

#### Вихідні дані та постановка задачі

Відомі схема балки, навантаження, допустимі нормальне та дотичне напруження.

Потрібно підібрати поперечний переріз балки з прокатного двотавру, виконати повну перевірку міцності балки, визначити переміщення її перерізів та перевірити жорсткість балки.

#### План виконання завдання

1. Побудова епюр зусиль.
2. Підбір поперечного перерізу балки.
3. Повна перевірка міцності балки.
4. Обчислення переміщень поперечних перерізів методом початкових параметрів.
5. Обчислення переміщень поперечних перерізів графоаналітичним методом та методом Мора.
6. Перевірка жорсткості балки.

1. Епюри поперечної сили та згинального моменту будуються від загального навантаження без урахування власної ваги балки з визначенням максимальних значень  $M_y$  та  $Q_z$ .

**Побудова епюр виконується відповідно до завдання «Побудова епюр зусиль».**

2. Поперечний переріз балки підбираємо з умови міцності за нормальними напруженнями. Визначаємо потрібний момент опору

$$W_{nom} = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}},$$

де  $M_{max}$  – найбільший за модулем згинальний момент,  $\sigma_{adm}$  – допустиме напруження.

З таблиці сортаменту прокатної сталі (ГОСТ 8239-72) підбираємо номер профілю двотавра з моментом опору  $W_y$  найближчим до  $W_{nom}$ . Випишуємо розміри перерізу  $h, b, t, d$  та його геометричні характеристики:

момент інерції  $I_y$ , момент опору  $W_y$ , статичний момент половини перерізу  $S_{\max}$  відносно нейтральної осі (у таблиці сортаменту ці величини позначені відповідно  $I_x, W_x, S_x$ ).

При великих значеннях згинального моменту, коли потрібний момент опору  $W_{\text{ном}}$  перевищує максимальне значення  $W_x$  за стандартом, переріз балки у цьому разі можна брати з двох двотаврів, розташованих поряд, момент опору кожного з двотаврів приблизно повинен дорівнювати  $0,5 W_{\text{ном}}$ .

3. При перевірці міцності двотаврової балки можлива заміна дійсного прокатного профілю ідеалізованим перерізом, складеним з трьох вузьких прямокутників (рис. 3.1.а). Повна перевірка міцності балки – це перевірка за нормальними, дотичними та головними напруженнями.

а) Нормальні напруження в поперечних перерізах балки залежать від величини згинального моменту, а по висоті перерізу змінюються за лінійним законом. У точках нейтральної осі у вони дорівнюють нулю, а в найбільш віддалених точках – найбільші за модулем (рис. 3.1.б).

Небезпечна точка лежить в тому поперечному перерізі балки, де діє найбільший за модулем згинальний момент.

Умова міцності визначається за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq \sigma_{\text{adm}},$$

де  $W_y$  – фактичний момент опору прийнятого перерізу відносно нейтральної осі.

За значенням  $\sigma_{\text{adm}}$  будуємо епюру нормальних напружень (рис. 3.1.б).

б) Дотичні напруження залежать від величини поперечної сили. По висоті стінки двотавра вони розповсюджуються за законом квадратної параболи, найбільші дотичні напруження у точках нейтральної осі, в міру віддалення від осі напруження зменшуються. Вертикальні дотичні напруження у полках двотаврів досить малі, і їх можна не враховувати (рис. 3.1.в).

Небезпечна точка міститься в перерізі де діє найбільша за модулем поперечна сила. Ця точка знаходиться на нейтральній осі цього перерізу.

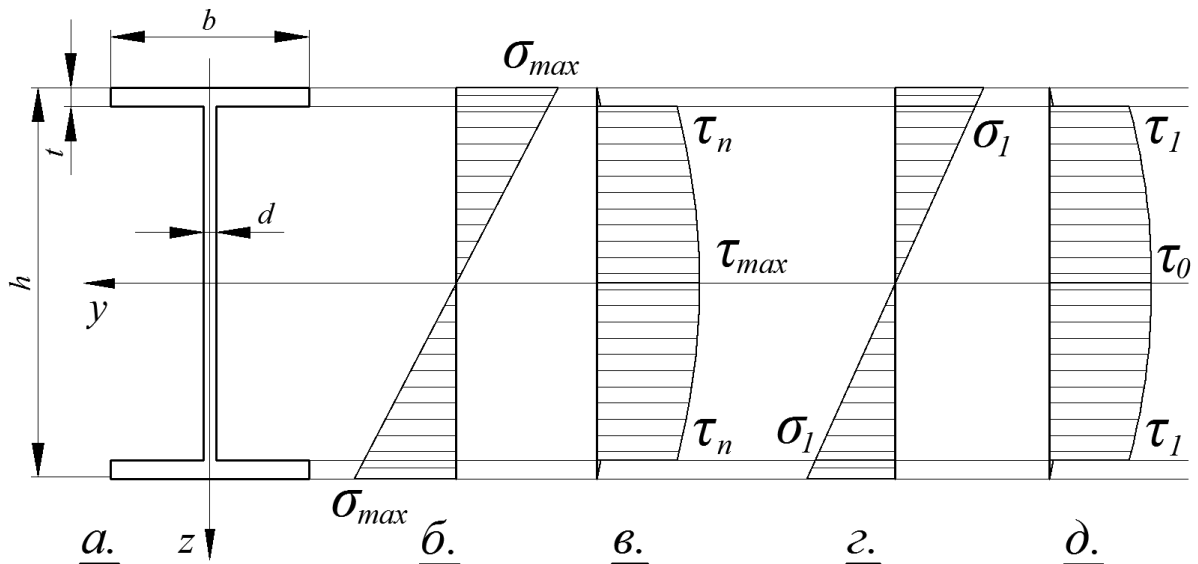


Рис.3.1

Умова міцності за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{d \cdot I_y} \leq \tau_{adm}.$$

Дотичне напруження в точках стику стінки та полки двотавра:

$$\tau_n = \frac{Q_{\max} \cdot S_n}{d \cdot I_y}.$$

У наведених формулах  $Q_{\max}$  – найбільша за модулем поперечна сила;  $d$  – товщина стінки двотавра;  $I_y$  – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі;  $S_{\max}$  – статичний момент половини перерізу відносно нейтральної осі;  $S_n$  – статичний момент полиці двотавра відносно нейтральної осі, значення якого для ідеалізованого двотавра можна визначити так:

$$S_n = b \cdot t \cdot \frac{h-t}{2}.$$

За значеннями  $\tau_{\max}$  та  $\tau_n$  будемо епюру дотичних напружень (рис. 3.1.в).

в) Головні напруження залежать від значення нормальних і дотичних напружень, отже, від зусиль  $M_y$  та  $Q_z$  і положення точки по висоті перерізу.

Небезпечна точка міститься в перерізі, де згинальний момент і поперечна сила набувають досить великих значень, і розташована в місці

переходу полиці до стінки. У цій точці діють нормальне та дотичне напруження. Умова міцності за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} \leq \sigma_{adm},$$

де  $\sigma_{red}$  – еквівалентне напруження;  $\sigma_1, \tau_1$  – нормальне та дотичне напруження в точці стику стінки з полицею,

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{I_y} \left( \frac{h}{2} - t \right); \quad \tau_1 = \frac{Q_z \cdot S_n}{d \cdot I_y}.$$

Дотичне напруження на нейтральній осі цього перерізу:

$$\tau_0 = \frac{Q_z \cdot S_{max}}{d \cdot I_y}.$$

У наведених формулах  $M_y$  та  $Q_z$  – згинальний момент і поперечна сила у визначеному для перевірки перерізі.

Будуємо для даного перерізу епюри  $\sigma$  та  $\tau$  (рис. 3.1.г, д).

В інженерних розрахунках розбіжність між діючими і допустимими напруженнями, як правило, не перевищує  $\pm 5\%$ . Найчастіше розбіжність у межах вказаної норми дістаємо тільки при перевірці за нормальними напруженнями. Дотичні та еквівалентні напруження виявляються значно меншими від допустимих.

Якщо умови міцності виконуються, то переріз вважають підібраним. В іншому випадку слід змінити номер двотавра і знову виконати перевірку. Якщо при перевірці двох поряд розташованих в таблиці сортаменту двотаврів для одного дістаємо перенапруження понад 5%, а для другого – недонапруження більше від 5%, то треба брати другий двотавр з відповідними поясненнями.

4. Для визначення переміщень перерізів балки (кута повороту  $\varphi$  та прогину  $w$ ) використовуємо формули методу початкових параметрів.

$$EI_y \varphi(x) = EI_y \varphi_0 - M_0 \cdot x - \frac{Q_0}{2} x^2 + \sum_i M_i (x - a_i) + \sum_i \frac{F_i}{2} (x - b_i)^2 + \\ + \sum_i \frac{q_i}{6} \left[ (x - c_i)^3 - (x - d_i)^3 \right];$$

$$EI_y w(x) = EI_y w_0 + EI_y \varphi_0 \cdot x - \frac{M_0}{2} \cdot x^2 - \frac{Q_0}{6} x^3 + \sum_i \frac{M_i}{2} (x - a_i)^2 + \\ + \sum_i \frac{F_i}{6} (x - b_i)^3 + \sum_i \frac{q_i}{24} [(x - c_i)^4 - (x - d_i)^4];$$

де  $x$  – відстань від координат до перерізу, в якому визначаються переміщення.

Початок координат завжди знаходиться на лівому кінці балки, вісь  $x$  направлена вправо;  $w_0, \varphi_0, M_0, Q_0$  – початкові параметри (прогин, кут повороту, згинальний момент та поперечна сила на початку координат);  $M_i, F_i, q_i$  – навантаження, які розташовані на балці лівіше перерізу, який розглядається;  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – відповідно відстані від початку координат до перерізів, в яких прикладені зосереджені момент  $M_i$ , сила  $F_i$ , починається та закінчується дія рівномірно розподіленого навантаження  $q_i$  (рис.3.2);  $EI_y$  – згинальна жорсткість балки.

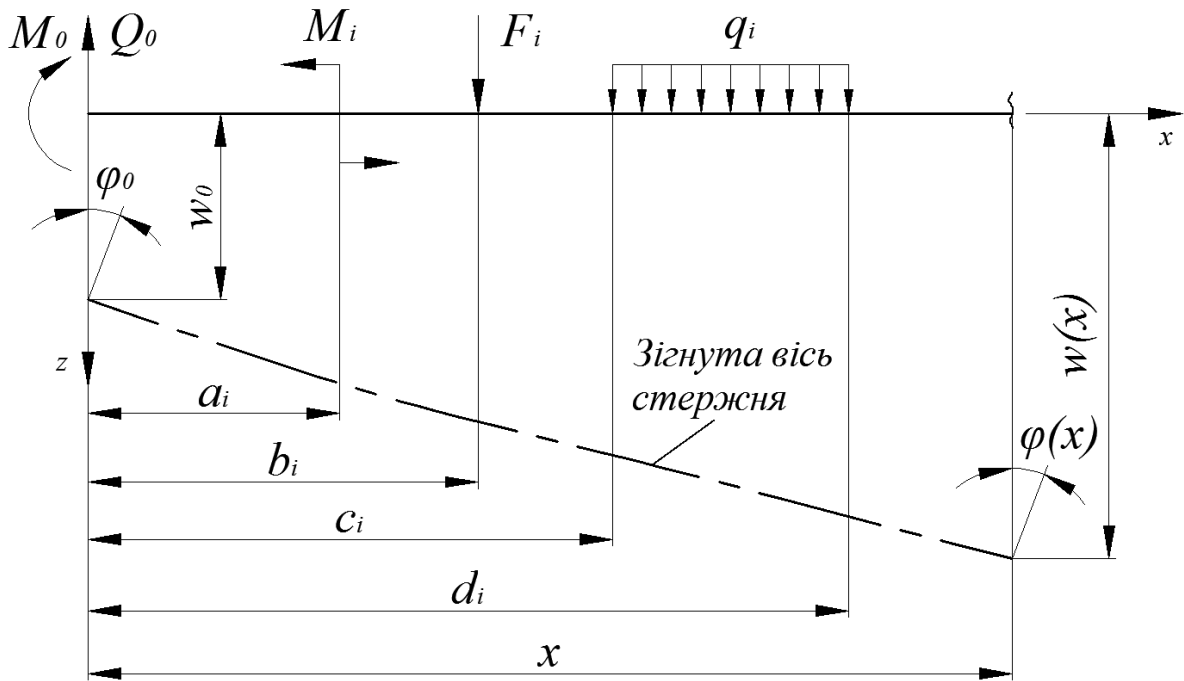


Рис.3.2

Переміщення, обчислені наведеними формулами, одержуємо збільшеними в  $EI_y$  разів. Для визначення переміщень потрібно, щоб, крім зовнішніх навантажень, були відомі усі початкові параметри. Початкові зусилля  $M_0, Q_0$  беруться такими, що дорівнюють ординатам еюр  $M_y$  та  $Q_z$  на лівому кінці балки. Початкові переміщення  $w_0, \varphi_0$  залежать від умов закріплення балки (рис.3.3).

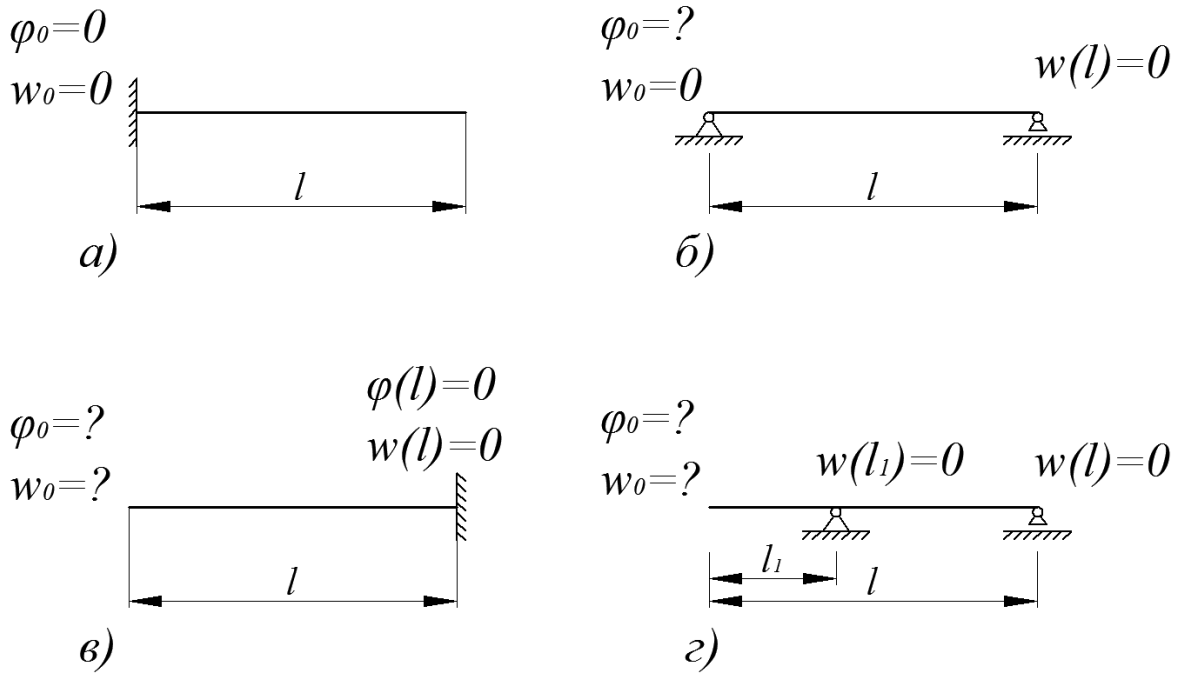


Рис.3.3

Після визначення початкових параметрів, балку розбиваємо на ділянки, границями яких є точки прикладення опорних реакцій, зовнішніх зосереджених моментів і сил, а також точки початку та закінчення дії або зміни інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження. За наведеними формулами складаємо вирази  $EI_y w(x)$  та  $EI_y \varphi(x)$  для кожної ділянки балки і, підставляючи до них значення абсциси  $x$  для характерних точок, обчислюємо збільшені в  $EI_y$  разів кути повороту та прогини.

Використовуючи формули переміщень, слід пам'ятати, що в них враховуються всі прикладені до балки зліва від перерізу зовнішні навантаження (враховуючи і реакції опор).

Потрібно також звернути увагу на знаки величин, що входять у формули. Зовнішні навантаження, що мають напрямки, вказані на рис. 3.2, підставляються із знаком "+", при протилежному напрямку будь-якого навантаження відповідні складові формул змінюють знак на протилежний. Правило знаків для переміщень таке: кут повороту за рухом годинникової стрілки, а прогини вниз вважаються додатними.

За обчисленими значеннями ординат будемо епюри  $EI_y w, EI_y \varphi, M_y, Q_z$ . Між функціями  $EI_y w, EI_y \varphi, M_y, Q_z$  та інтенсивністю навантаження  $q_z$  існують диференціальні залежності:

$$\frac{d(EI_y w)}{dx} = EI_y \varphi; \quad \frac{d(EI_y \varphi)}{dx} = -M_y; \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z; \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z.$$

Потрібно стежити, щоб побудовані епюри відповідали наведеним залежностям (у розумінні правильного розташування точок екстремуму, перегину, нульових точок і т.п.).

5. При використанні графоаналітичного методу фіктивна балка, схему якої вибирають згідно з умовами її формування (деякі схеми наведені на рис. 3.4), завантажується розподіленим фіктивним навантаженням, інтенсивність якого для балки постійного поперечного перерізу можна взяти  $q_z^\phi = M_y$ .

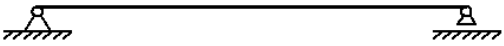
Дана балка	Фіктивна балка
	
	
	
	

Рис.3.4

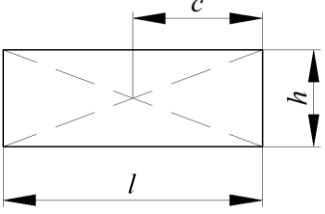
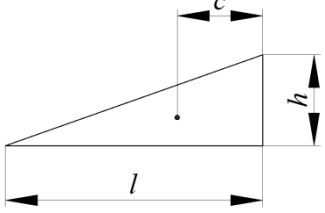
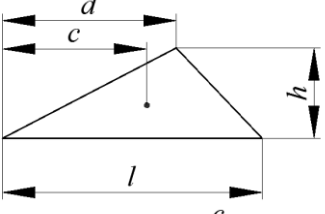
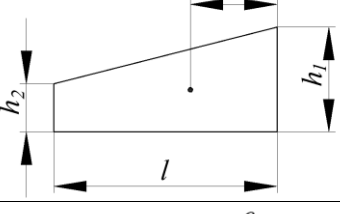
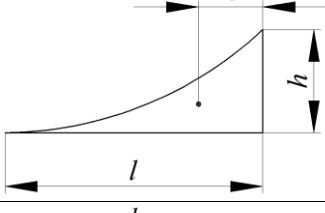
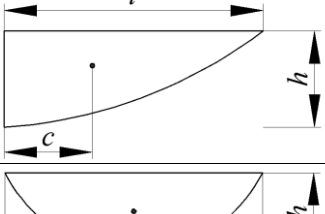
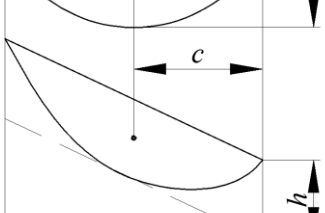
Тоді величини  $EI_y w$ ,  $EI_y \varphi$  перерізів балки визначаються як фіктивна поперечна сила  $Q^\phi$  та фіктивний згинальний момент  $M^\phi$ , обчислені у відповідних у відповідних перерізах фіктивної балки:

$$EI_y w = Q^\phi, \quad EI_y \varphi = M^\phi.$$

Через те, що розподілене фіктивне навантаження може бути складним, поділимо його площу на окремі ділянки у вигляді простих фігур (прямокутник, трикутник, трапеція тощо) і замінимо їх зосередженими фіктивними силами, які дорівнюють площам цих простих фігур і прикладені в центрах ваги простих фігур. Дані про величини площі і положення центрів ваги деяких фігур наведені в табл.3.1.



Величини площ та положення центрів ваги деяких фігур

Фігура	$\Omega$	$c$	
Прямокутник		$h \cdot l$	$\frac{l}{2}$
Прямокутний трикутник		$\frac{1}{2} h \cdot l$	$\frac{l}{3}$
Трикутник		$\frac{1}{2} h \cdot l$	$\frac{l+d}{3}$
Трапеція		$\frac{l(h_1 - h_2)}{2}$	$\frac{l(h_1 + 2h_2)}{3(h_1 + h_2)}$
Квадратна парабола		$\frac{1}{3} h \cdot l = \frac{ql^3}{6}$	$\frac{l}{4}$
Параболічний трикутник		$\frac{2}{3} h \cdot l = \frac{ql^3}{3}$	$\frac{3}{8} l$
Параболічна площа		$\frac{2}{3} h \cdot l = \frac{ql^3}{12}$	$\frac{l}{2}$

Поділ епюри  $M$  (фіктивного навантаження) на елементарні частини треба виконувати так, щоб при визначенні, у заданому перерізі,  $Q^\phi$  та  $M^\phi$  було враховане все фіктивне навантаження, розташоване ліворуч або праворуч від перерізу.

При обчисленні переміщень будь-якого перерізу методом Мора, крім завантаженого стану балки та його епюри згинальних моментів  $M_F$ , потрібно розглянути одиничний стан балки, в якому вона завантажується одиничним навантаженням у напрямку переміщення, яке визначається (при визначенні кута повороту – зосередженим моментом, який дорівнює одиниці, а при визначенні прогину – силою, яка дорівнює одиниці), та побудувати епюру згинальних моментів  $M_i$ .

Переміщення визначається за формулою Мора:

$$\Delta_{iF} = \int_0^l \frac{M_i M_F}{EI_y} dx.$$

Для обчислення інтеграла Мора використовуємо:

1) правило Верещагіна (при множенні прямолінійної епюри на криволінійну)

$$\frac{1}{EI_y} \int_0^l M_i M_F dx = \frac{1}{EI_y} \Omega_F m_i,$$

де  $\Omega_F$  – площа епюри  $M_F$  на ділянці довжиною  $l$ ;  $m_i$  – ордината епюри  $M_i$ , яка відповідає положенню центра ваги епюри  $M_F$  (рис.3.5.а);

2) формула Симпсона–Корноухова

$$\frac{1}{EI_y} \int_0^l M_i M_F dx = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{6} \left( M_i^{\text{Л}} M_F^{\text{Л}} + 4M_i^{\text{Сеп}} M_F^{\text{Сеп}} + M_i^{\text{Пр}} M_F^{\text{Пр}} \right),$$

де  $M_i^{\text{Л}}, M_F^{\text{Л}}, M_i^{\text{Пр}}, M_F^{\text{Пр}}$  – крайні ординати епюр  $M_i$  та  $M_F$  (рис.3.5.б);

$M_i^{\text{Сеп}}, M_F^{\text{Сеп}}$  – ординати епюр посередині ділянки довжиною  $l$  (рис.3.5.б).

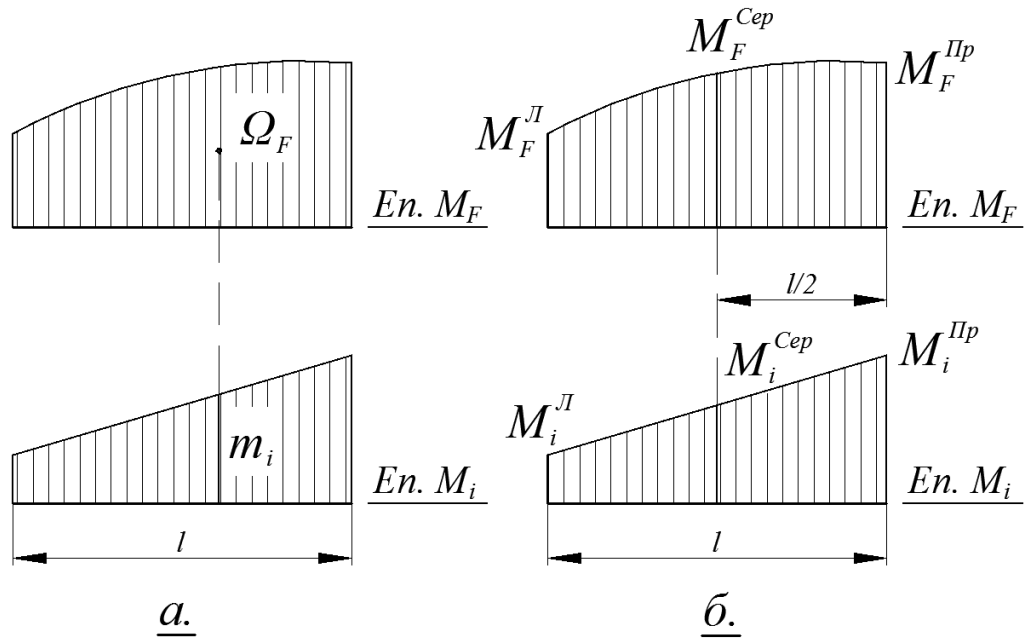


Рис.3.5

### Приклад

**Відомі:** схема балки з навантаженням (рис.3.6), допустимі напруження  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}$ .

**Потрібно:** визначити опорні реакції; побудувати епюри зусиль; підібрати двотавровий переріз та перевірити міцність прийнятого перерізу; побудувати епюри переміщень.

1. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 7 + 40 \cdot 3 - 55 \cdot 4 \cdot 2 + 80 = 0; \quad R_B = 34,3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 7 + 40 \cdot 10 - 55 \cdot 4 \cdot 5 + 80 = 0; \quad R_A = 225,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_z = 0; \quad 40 - 225,7 + 55 \cdot 4 - 34,3 = 0.$$

Будуємо епюри зусиль ( $Q$  та  $M$ ).

Максимальні значення зусиль:

$$Q_{\max} = 225,7 \text{ кН (на лівій опорі);}$$

$$M_{\max} = 193,5 \text{ кН (на відстані 3,38 м від лівої опори).}$$

2. Потрібний момент опору:

$$W_{nom} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{193,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1209 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 1209 \text{ см}^3.$$

З таблиці сортаменту (ГОСТ 8239-72) приймаємо двотавр №45, з такими геометричними характеристиками:

$$I_y = 27450 \text{ см}^4; \quad W_y = 1220 \text{ см}^3; \quad S_{\max} = 699 \text{ см}^3.$$

Розміри перерізу:

$$h = 450 \text{ мм}; \quad b = 160 \text{ мм}; \quad d = 8,6 \text{ мм}; \quad t = 14,2 \text{ мм}.$$

3. Виконуємо повну перевірку міцності балки.

а) По максимальним нормальним напруженням в переріз  $x = 6,38 \text{ м}$ .

$$\sigma_{adm} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{193,5 \cdot 10^3}{1220 \cdot 10^{-6}} = 158,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 158,6 \text{ МПа}.$$

$$\text{Недонапруження: } \Delta = \frac{160 - 158,6}{160} \cdot 100\% = 0,88\%.$$

Для перерізу  $a - a$  будуємо епюру нормальних напружень (рис.3.7).

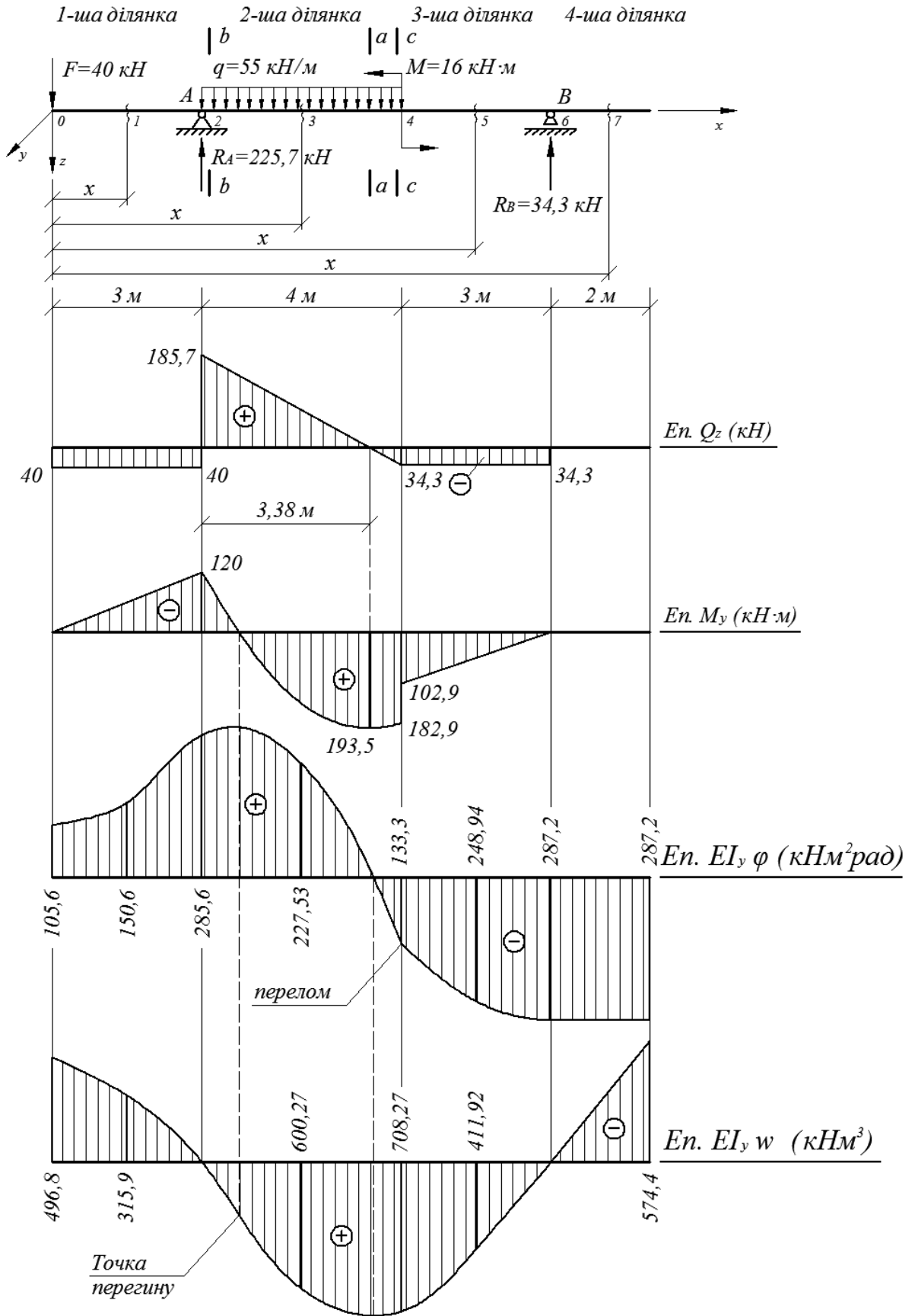


Рис.3.6

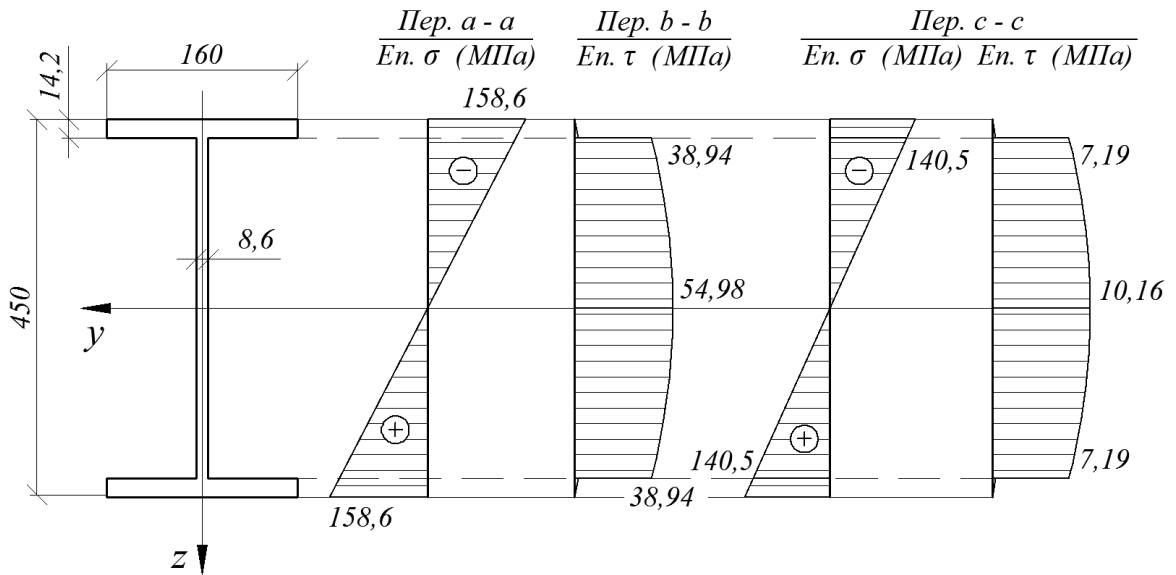


Рис.3.7

б) По максимальним дотичним напруженням перевіряємо в перерізі  $b-b$  (при  $x=3 м$ )

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{d \cdot I_y} = \frac{185,7 \cdot 10^3 \cdot 699 \cdot 10^{-6}}{8,6 \cdot 10^{-3} \cdot 27450 \cdot 10^{-8}} = 54,98 \cdot 10^6 \text{ Па} = 54,98 \text{ МПа}.$$

$$\text{Недонапруження: } \Delta = \frac{100 - 54,98}{100} \cdot 100\% = 45,02\%.$$

Обчислюємо статичний момент полки двотавра відносно центральної осі  $y$ :

$$S_n = b \cdot t \cdot \frac{h-t}{2} = 16 \cdot 1,42 \cdot \frac{45-1,42}{2} = 495 \text{ см}^3,$$

дотичне напруження в точці стику полиці і стінки двотавра:

$$\tau_n = \frac{Q_{\max} \cdot S_n}{d \cdot I_y} = \frac{185,7 \cdot 10^3 \cdot 495 \cdot 10^{-6}}{8,6 \cdot 10^{-3} \cdot 27450 \cdot 10^{-8}} = 38,94 \cdot 10^6 \text{ Па} = 38,94 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру дотичних напружень в перерізі  $b-b$  (рис.3.7).

в) Перевіряємо напруження в перерізі  $c-c$  (при  $x=3 м$ ).

$$M = 182,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q = 34,3 \text{ кН}.$$

Визначаємо нормальне та дотичне напруження в точці стику полиці та стінки двотавра:

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{I_y} \left( \frac{h}{2} - t \right) = \frac{182,9 \cdot 10^3}{27450 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{450}{2} - 14,2 \right) \cdot 10^3 = 140,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 140,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_1 = \frac{Q_z \cdot S_n}{d \cdot I_y} = \frac{34,3 \cdot 10^3 \cdot 495 \cdot 10^{-6}}{8,6 \cdot 10^{-3} \cdot 27450 \cdot 10^{-8}} = 7,19 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,19 \text{ МПа}.$$

За четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = \sqrt{140,5^2 + 3 \cdot 7,19^2} = 141,05 \text{ МПа}.$$

$$\text{Недонапруження: } \Delta = \frac{160 - 141,05}{160} \cdot 100\% = 11,8\% .$$

$$\tau_0 = \frac{Q_z \cdot S_{max}}{d \cdot I_y} = \frac{34,3 \cdot 10^3 \cdot 699 \cdot 10^{-6}}{8,6 \cdot 10^{-3} \cdot 27450 \cdot 10^{-8}} = 10,16 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,16 \text{ МПа} .$$

та будуюмо епюри  $\sigma$  і  $\tau$  у перерізі  $c-c$  (рис.3.7).

4. Обчислюємо переміщення осі балки методом початкових параметрів.

Початкові параметри:

$$w_0 = ?, \quad \varphi_0 = ?, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = -40 \text{ кН}.$$

Невідомі  $w_0$  та  $\varphi_0$  визначаємо з граничних та додаткових умов:

$$\text{при } x = 3 \text{ м} \rightarrow w(3) = 0;$$

$$\text{при } x = 10 \text{ м} \rightarrow w(10) = 0.$$

Використовуючи формулу для обчислення прогину осі балки методом початкових параметрів, запишемо:

$$EI_y w(3) = EI_y w_0 + EI_y \varphi_0 \cdot 3 - (-40) \cdot \frac{3^3}{6} = 0;$$

$$EI_y w(10) = EI_y w_0 + EI_y \varphi_0 \cdot 10 - (-40) \cdot \frac{10^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(10-3)^3}{6} + 80 \cdot \frac{(10-7)^2}{2} + \frac{55}{24} \cdot [(10-3)^4 - (10-7)^4] = 0.$$

або

$$EI_y w_0 + EI_y \varphi_0 \cdot 3 = -180;$$

$$EI_y w_0 + EI_y \varphi_0 \cdot 10 = 559,17.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, знаходимо:

$$EI_y w_0 = -496,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad EI_y \varphi_0 = 105,6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}.$$

Ділимо вісь балки на чотири ділянки та позначаємо характерні точки на границях ділянок і в середині кожної ділянки, крім 4-тої, 0,1,2,...,7 (рис.3.6).

Складаємо вирази для кута повороту і прогину для кожної ділянки та обчислюємо значення  $EI_y \varphi$  та  $EI_y w$ .

Ділянка I ( $0 \leq x \leq 3 \text{ м}$ )

$$EI_y \varphi(x) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$EI_y w(x) = -496,8 + 105,6 \cdot x - (-40) \cdot \frac{x^3}{6}.$$

Точка 0.  $x = 0$ ;

$$EI_y \varphi(0) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{0^2}{2} = 105,6 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(0) = -496,8 + 105,6 \cdot 0 - (-40) \cdot \frac{0^3}{6} = -496,8 \text{ кНм}^3.$$

Точка 1.  $x = 1,5 \text{ м}$ ;

$$EI_y \varphi(1,5) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{1,5^2}{2} = 150,6 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(1,5) = -496,8 + 105,6 \cdot 1,5 - (-40) \cdot \frac{1,5^3}{6} = -315,9 \text{ кНм}^3.$$

Точка 2.  $x = 3 \text{ м}$ ;

$$EI_y \varphi(3) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{3^2}{2} = 285,6 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(3) = -496,8 + 105,6 \cdot 3 - (-40) \cdot \frac{3^3}{6} = 0.$$



Ділянка II ( $3 \leq x \leq 7$  м)

$$EI_y \varphi(x) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{x^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{55}{6} \cdot (x-3)^3;$$

$$EI_y w(x) = -496,8 + 105,6 \cdot x - (-40) \cdot \frac{x^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(x-3)^3}{6} + \frac{55}{24} \cdot (x-3)^4.$$

Точка 2.  $x = 3$  м;

$$EI_y \varphi(3) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{3^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(3-3)^2}{2} + \frac{55}{6} \cdot (3-3)^3 = 285,6 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(3) = -496,8 + 105,6 \cdot 3 - (-40) \cdot \frac{3^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(3-3)^3}{6} + \frac{55}{24} \cdot (3-3)^4 = 0.$$

Точка 3.  $x = 5$  м;

$$EI_y \varphi(5) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{5^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(5-3)^2}{2} + \frac{55}{6} \cdot (5-3)^3 = 227,53 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(5) = -496,8 + 105,6 \cdot 5 - (-40) \cdot \frac{5^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(5-3)^3}{6} + \frac{55}{24} \cdot (5-3)^4 = \\ = 600,27 \text{ кНм}^3.$$

Точка 4.  $x = 7$  м;

$$EI_y \varphi(7) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{7^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(7-3)^2}{2} + \frac{55}{6} \cdot (7-3)^3 = -133,3 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(7) = -496,8 + 105,6 \cdot 7 - (-40) \cdot \frac{7^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(7-3)^3}{6} + \frac{55}{24} \cdot (7-3)^4 = \\ = 708,27 \text{ кНм}^3.$$

Ділянка III ( $7 \leq x \leq 10$  м)

$$EI_y \varphi(x) = 105,6 + 40 \cdot \frac{x^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{55}{6} \cdot [(x-3)^3 - (x-7)^3] + \\ + 80 \cdot (x-7);$$

$$EI_y w(x) = -496,8 + 105,6 \cdot x + 40 \cdot \frac{x^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(x-3)^3}{6} + \\ + \frac{55}{24} \cdot [(x-3)^4 - (x-7)^4] + 80 \cdot \frac{(x-7)^2}{2}.$$

Точка 4.  $x = 7$  м;

$$EI_y \varphi(7) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{7^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(7-3)^2}{2} + \frac{55}{6} \cdot [(7-3)^3 - (7-7)^3] + \\ + 80 \cdot (7-7) = -133,3 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(7) = -496,8 + 105,6 \cdot 7 - (-40) \cdot \frac{7^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(7-3)^3}{6} + \\ + \frac{55}{24} \cdot [(7-3)^4 - (7-7)^4] + 80 \cdot \frac{(7-7)^2}{2} = 708,27 \text{ кНм}^3.$$

Точка 5.  $x = 8,5$  м;

$$EI_y \varphi(8,5) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{8,5^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(8,5-3)^2}{2} + \\ + \frac{55}{6} \cdot [(8,5-3)^3 - (8,5-7)^3] + 80 \cdot (8,5-7) = -248,94 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(8,5) = -496,8 + 105,6 \cdot 8,5 - (-40) \cdot \frac{8,5^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(8,5-3)^3}{6} + \\ + \frac{55}{24} \cdot [(8,5-3)^4 - (8,5-7)^4] + 80 \cdot \frac{(8,5-7)^2}{2} = 411,92 \text{ кНм}^3.$$

Точка 6.  $x = 10$  м;

$$EI_y \varphi(10) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{10^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(10-3)^2}{2} + \\ + \frac{55}{6} \cdot [(10-3)^3 - (8,5-7)^3] + 80 \cdot (10-7) = -287,2 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(10) = -496,8 + 105,6 \cdot 10 - (-40) \cdot \frac{10^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(10-3)^3}{6} + \\ + \frac{55}{24} \cdot [(10-3)^4 - (10-7)^4] + 80 \cdot \frac{(10-7)^2}{2} = 0.$$

Ділянка IV  $10 \leq x \leq 12$  м)

$$EI_y \varphi(x) = 105,6 + 40 \cdot \frac{x^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{55}{6} \cdot [(x-3)^3 - (x-7)^3] + \\ + 80 \cdot (x-7) - 34,3 \cdot \frac{(x-10)^2}{2};$$

$$EI_y w(x) = -496,8 + 105,6 \cdot x + 40 \cdot \frac{x^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(x-3)^3}{6} + \\ + \frac{55}{24} \cdot [(x-3)^4 - (x-7)^4] + 80 \cdot \frac{(x-7)^2}{2} - 34,3 \cdot \frac{(x-10)^3}{6}.$$

Точка 6.  $x = 10$  м;

$$EI_y \varphi(10) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{10^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(10-3)^2}{2} + \\ + \frac{55}{6} \cdot [(10-3)^3 - (10-7)^3] + 80 \cdot (10-7) - 34,3 \cdot \frac{(10-10)^2}{2} = \\ = -287,2 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(10) = -496,8 + 105,6 \cdot 10 - (-40) \cdot \frac{10^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(10-3)^3}{6} + \\ + \frac{55}{24} \cdot [(10-3)^4 - (10-7)^4] + 80 \cdot \frac{(10-7)^2}{2} - 34,3 \cdot \frac{(10-10)^3}{6} = 0.$$

Точка 7.  $x = 12$  м;

$$EI_y \varphi(12) = 105,6 - (-40) \cdot \frac{12^2}{2} - 225,7 \cdot \frac{(12-3)^2}{2} + \\ + \frac{55}{6} \cdot [(12-3)^3 - (12-7)^3] + 80 \cdot (12-7) - 34,3 \cdot \frac{(12-10)^2}{2} = \\ = -287,2 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(12) = -496,8 + 105,6 \cdot 12 - (-40) \cdot \frac{12^3}{6} - 225,7 \cdot \frac{(12-3)^3}{6} + \\ + \frac{55}{24} \cdot [(12-3)^4 - (12-7)^4] + 80 \cdot \frac{(12-7)^2}{2} - 34,3 \cdot \frac{(12-10)^3}{6} = \\ = -574,4 \text{ кНм}^3.$$

За визначеними ординатами будемо епюри  $EI_y \varphi$  та  $EI_y w$  (рис.3.6).

5. Графо-аналітичним методом визначаємо кут повороту та прогин перерізу при  $x = 7$  м (точка 4). Креслимо фіктивну балку (рис.3.8), завантажуюмо її розподіленим фіктивним навантаженням (епюрою згинальних моментів), яке замінюється зосередженими силами.

$$P_1^\phi = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 120 = 180 \text{ кНм}^2; \quad P_2^\phi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 120 = 240 \text{ кНм}^2;$$

$$P_3^\phi = \frac{55 \cdot 4^3}{12} = 293,33 \text{ кНм}^2; \quad P_4^\phi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 182,9 = 365,8 \text{ кНм}^2;$$

$$P_5^\phi = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 102,9 = 154,35 \text{ кНм}^2.$$

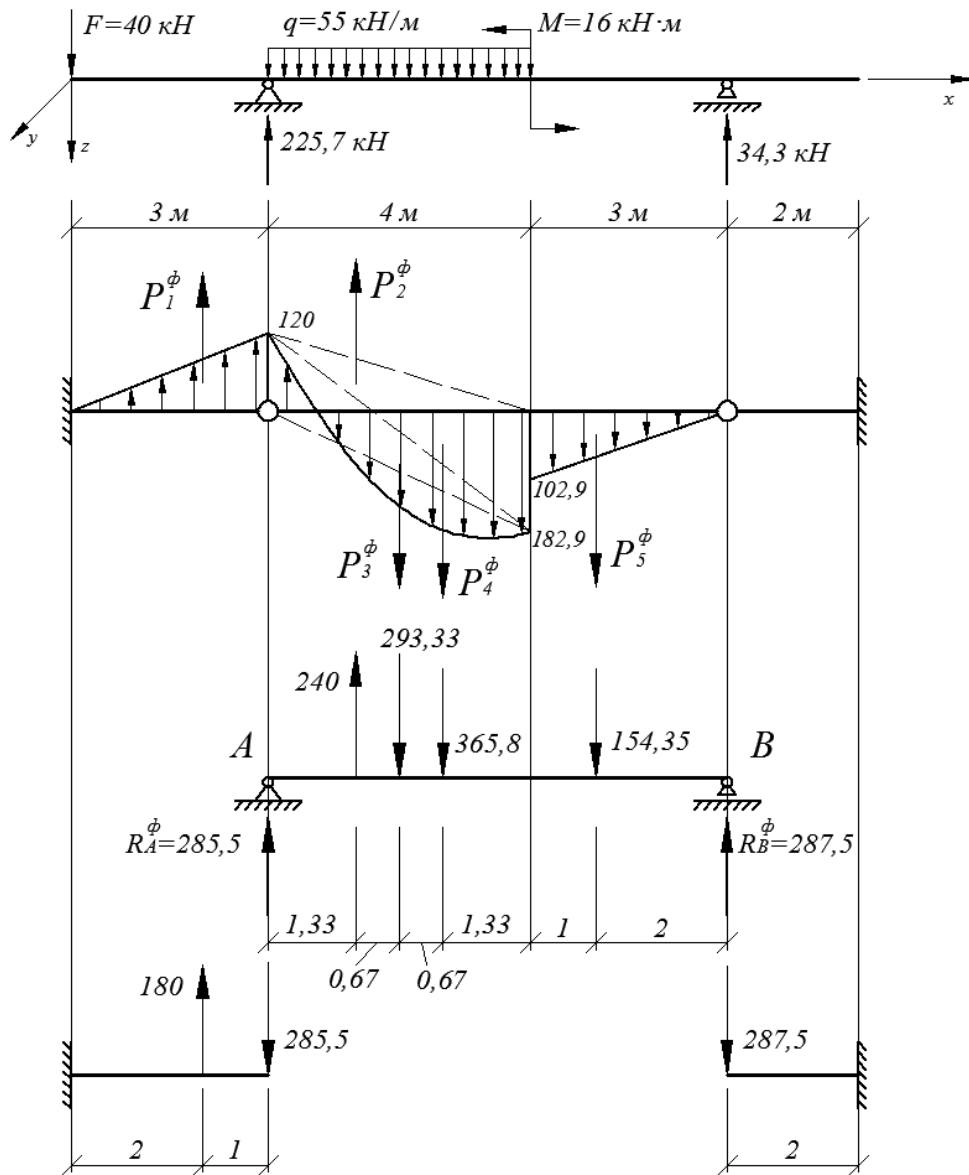


Рис.3.8

Обчислюємо фіктивні опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 7 - 240 \cdot 1,33 + 293,33 \cdot 2 + 365,8 \cdot 2,67 + 154,35 \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = 287,5 \text{ кНм}^2.$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 7 + 240 \cdot 5,67 - 293,33 \cdot 5 - 365,8 \cdot 4,33 - 154,35 \cdot 2 = 0;$$

$$R_B = 285,5 \text{ кНм}^2.$$

Виконуємо перевірку:

$$\sum F_z = 0; \quad -285,5 - 240 + 293,33 + 365,8 + 154,35 - 287,5 = 0,48 \approx 0.$$

Визначаємо значення  $EI_y \varphi$  та  $EI_y w$  при  $x = 7 \text{ м}$ :

$$EI_y \varphi(7) = -287,5 + 154,35 = -133,15 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(7) = 287,5 \cdot 3 - 154,35 \cdot 1 = 708,15 \text{ кНм}^3.$$

Для визначення кута повороту та прогину в перерізі при  $x = 7 \text{ м}$  методом Мора, розглянемо три стани балки: вантажний та два одиничних (рис.3.9).

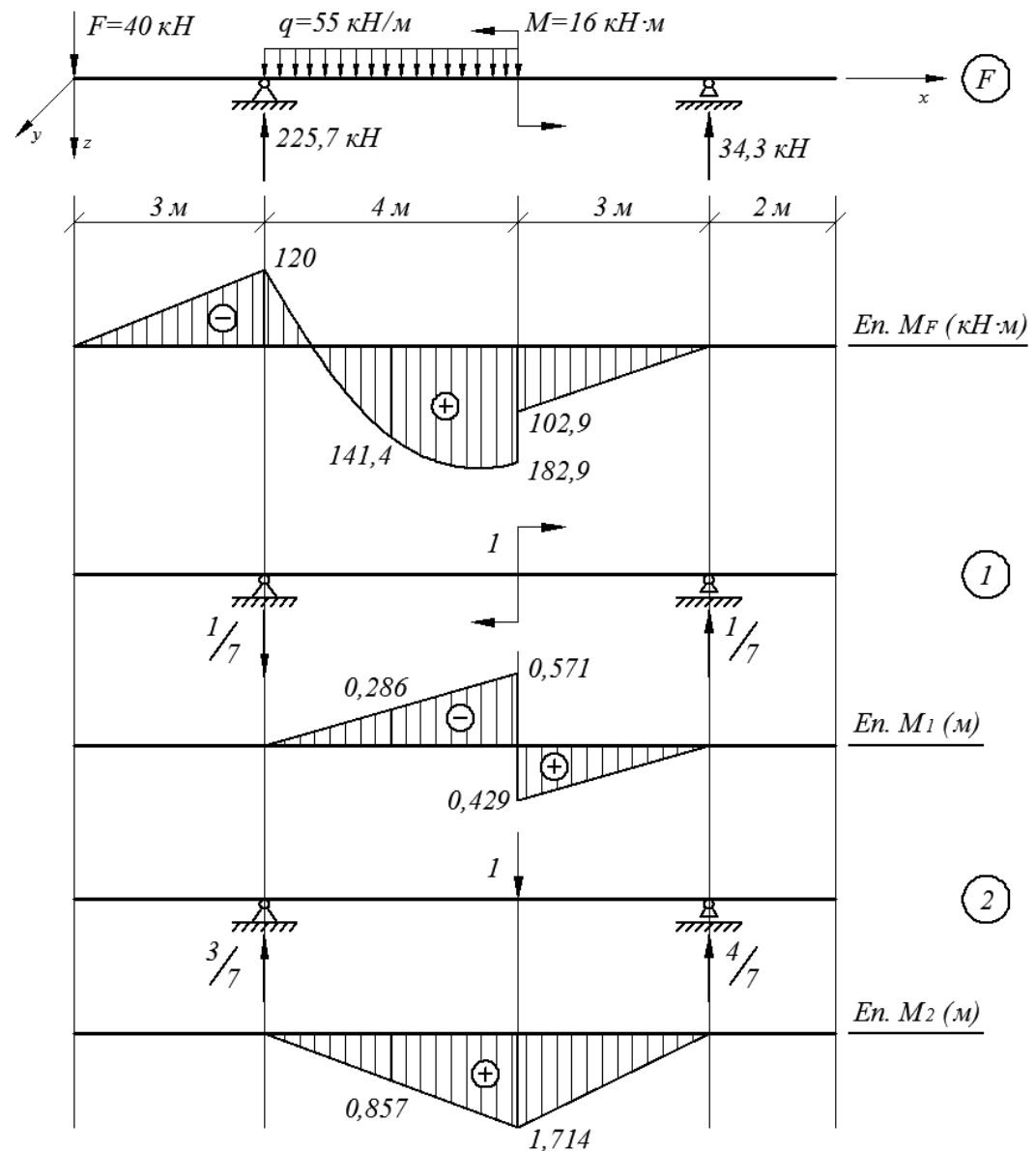


Рис.3.9

Перемножуючи епюри  $M_1$  та  $M_2$  на епюру  $M_F$  (з використання формул Верещагіна та Сімпсона-Корноухова) Отримуємо:

$$EI_y \varphi(7) = EI_y \Delta_{1F} = \int_0^l M_1 \cdot M_F dx = \frac{4}{6} (-4 \cdot 141,4 \cdot 0,286 - 182,9 \cdot 0,571) + \\ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 102,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,429 = -133,22 \text{ кНм}^2 \text{ рад};$$

$$EI_y w(7) = EI_y \Delta_{2F} = \int_0^l M_2 \cdot M_F dx = \frac{4}{6} (-4 \cdot 141,4 \cdot 0,857 - 182,9 \cdot 1,714) + \\ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 102,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 = 708,5 \text{ кНм}^3.$$

Результати обчислення переміщень різними методами наведені в таблиці

$x$ (м)	$EI_y \varphi$ (кНм <sup>2</sup> рад)			$EI_y w$ (кНм <sup>3</sup> )		
	Метод початкових параметрів	Графо-аналітичний метод	Метод Мора	Метод початкових параметрів	Графо-аналітичний метод	Метод Мора
3	285,6	285,5	-	0	0	-
7	133,3	133,15	133,22	708,27	708,15	708,5
10	287,2	287,5	-	0		-

Обчислюємо дійсні значення кута повороту та прогину в перерізі при  $x = 7$  м:

згинальна жорсткість балки  $EI_y = 2 \cdot 10^8 \cdot 27450 \cdot 10^{-8} = 54900 \text{ кНм}^2$ ;

$$\varphi = \frac{133,33}{54900} = 2,43 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$w = \frac{708,27}{54900} = 12,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 12,9 \text{ мм}.$$

Проводимо перевірку жорсткості балки:

$$[W] = \frac{1}{200} l = \frac{1}{200} * 7000 = 35 \text{ мм} > w = 12,9 \text{ мм}$$

Висновок: жорсткість достатня.

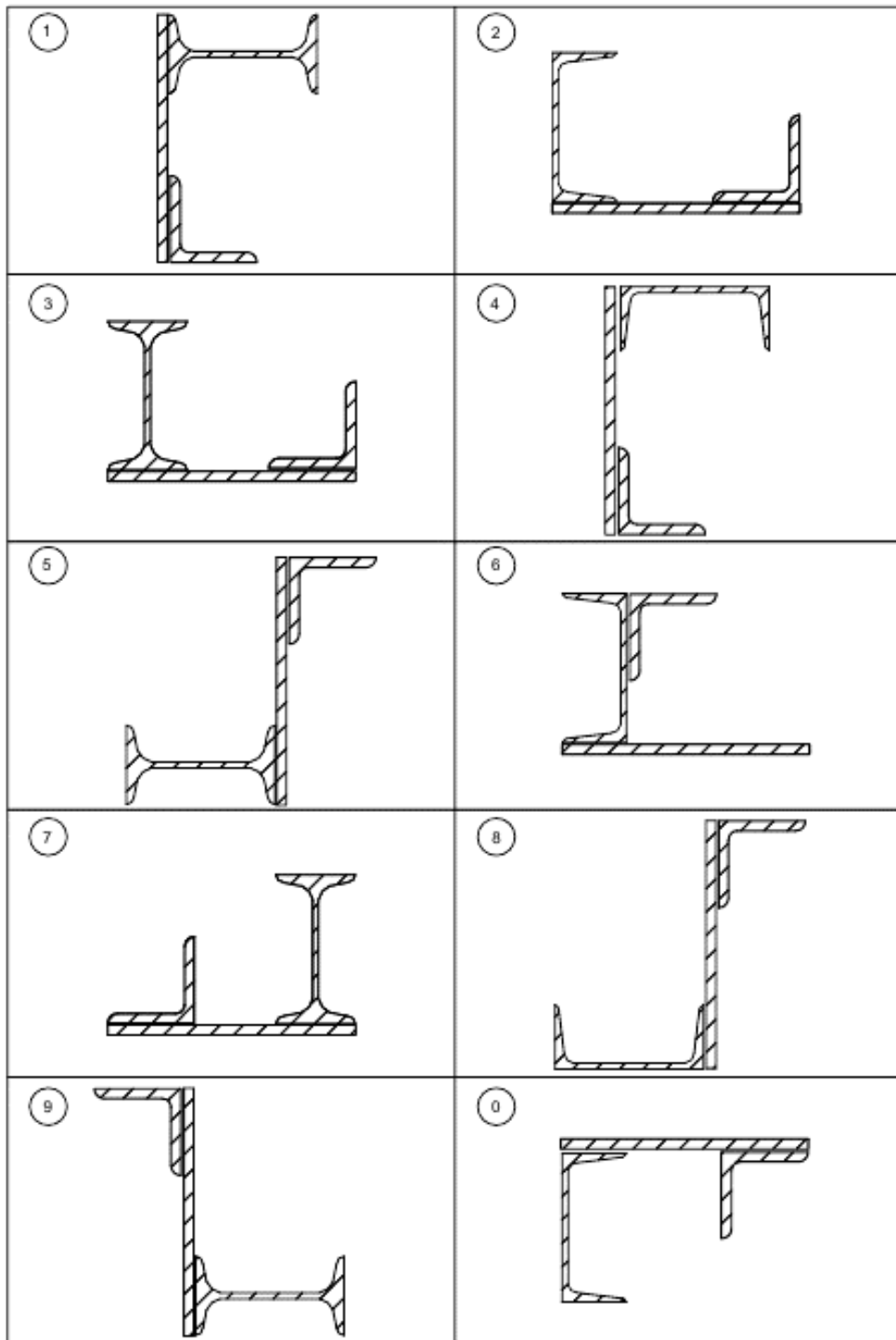


Рис Д-1.1

№	Числові значення по цифрам шифру				
	Перша цифра	Друга цифра		Третя цифра	
	№ схеми	№ двотавра	№ швелера	Розміри кутика	Розміри пластини
0	1	60	14	250x20	200x10
1	2	55	16	220x14	200x12
2	3	50	18	200x20	220x14
3	4	40	20	180x12	220x16
4	5	36	22	140x10	300x18
5	6	30	24	125x10	300x20
6	7	24	27	110x8	350x18
7	8	22	30	180x10	400x16
8	9	20	36	90x8	420x14
9	0	10	40	80x8	440x8



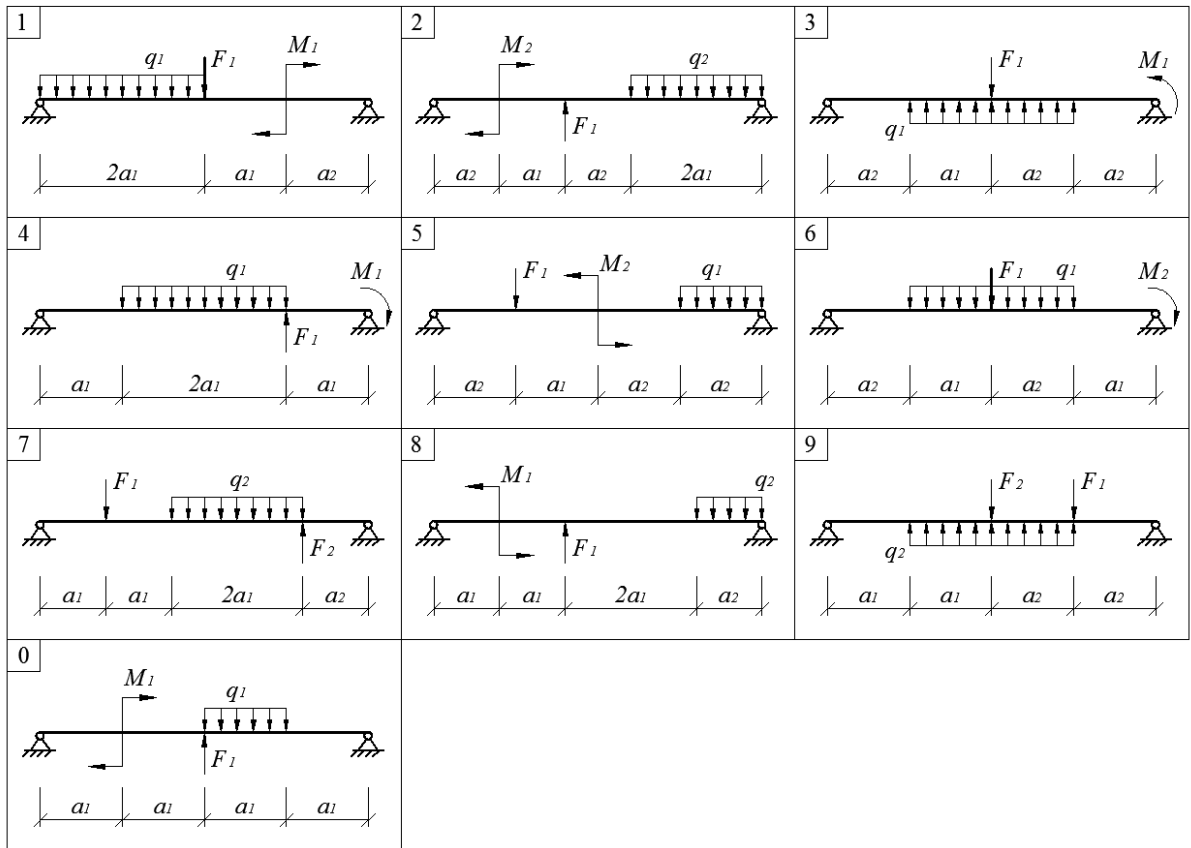


Рис. Д-2.1

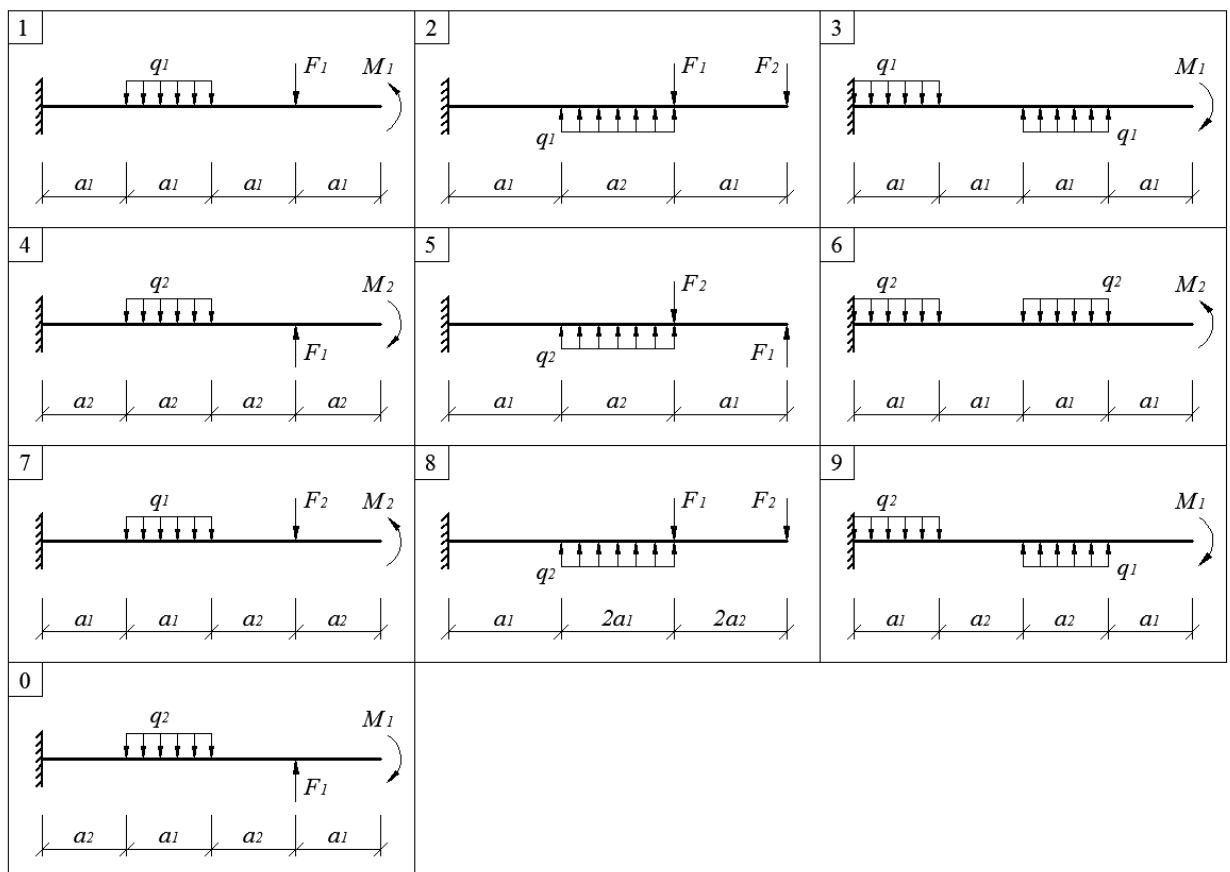


Рис. Д-2.2

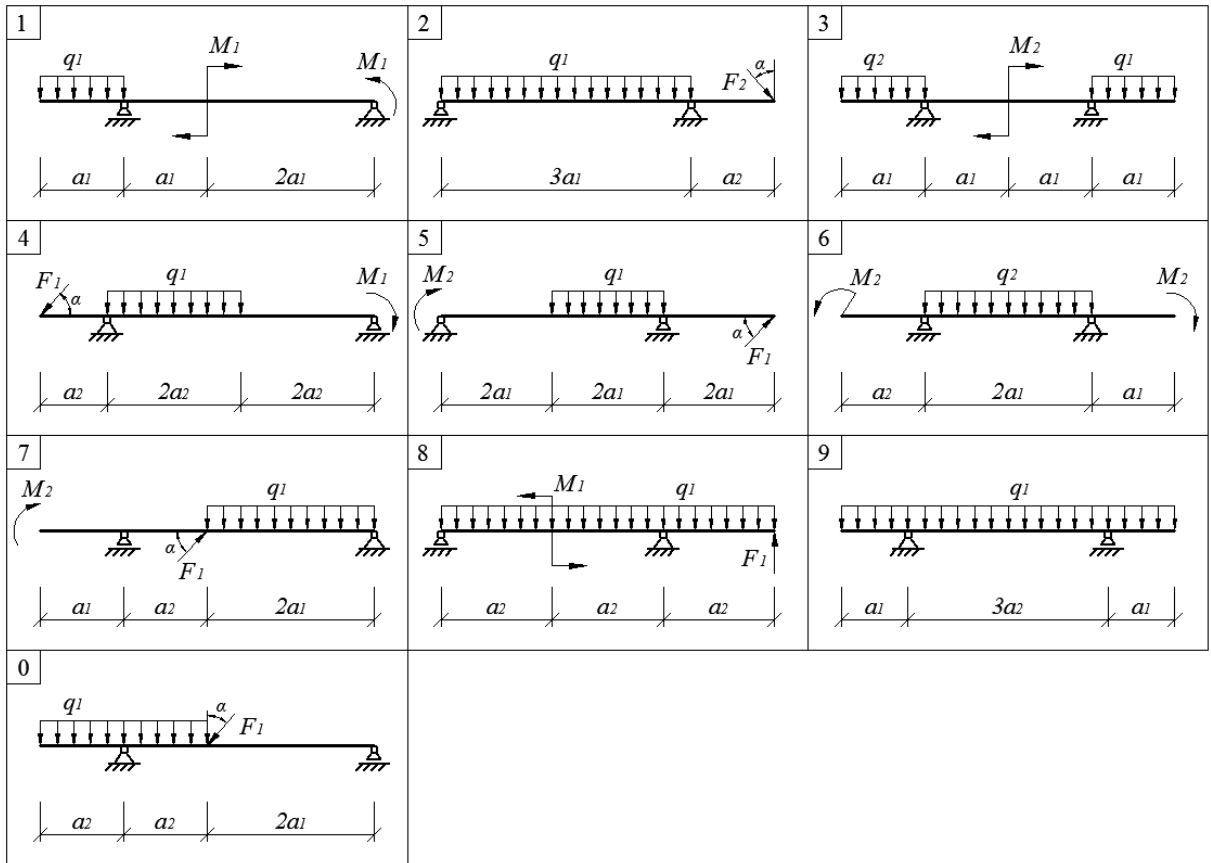


Рис. Д-2.3

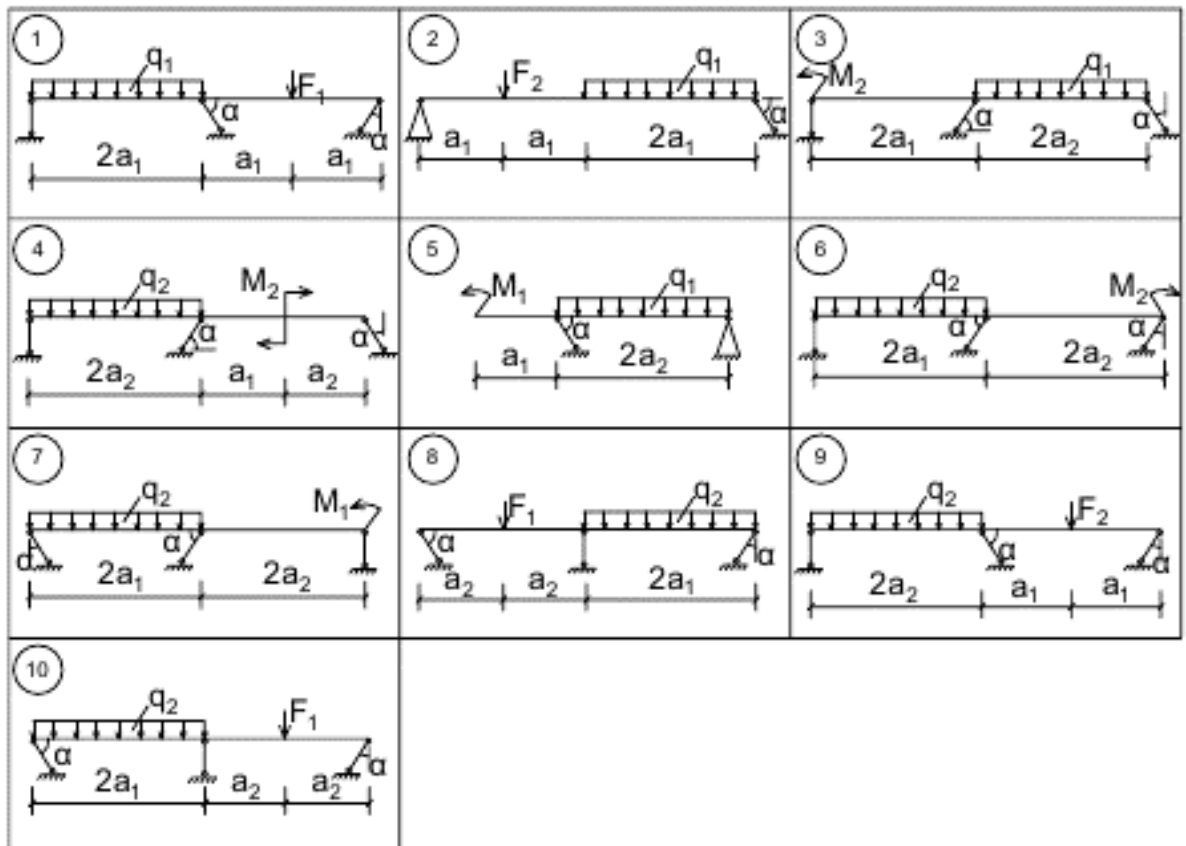


Рис. Д-2.4

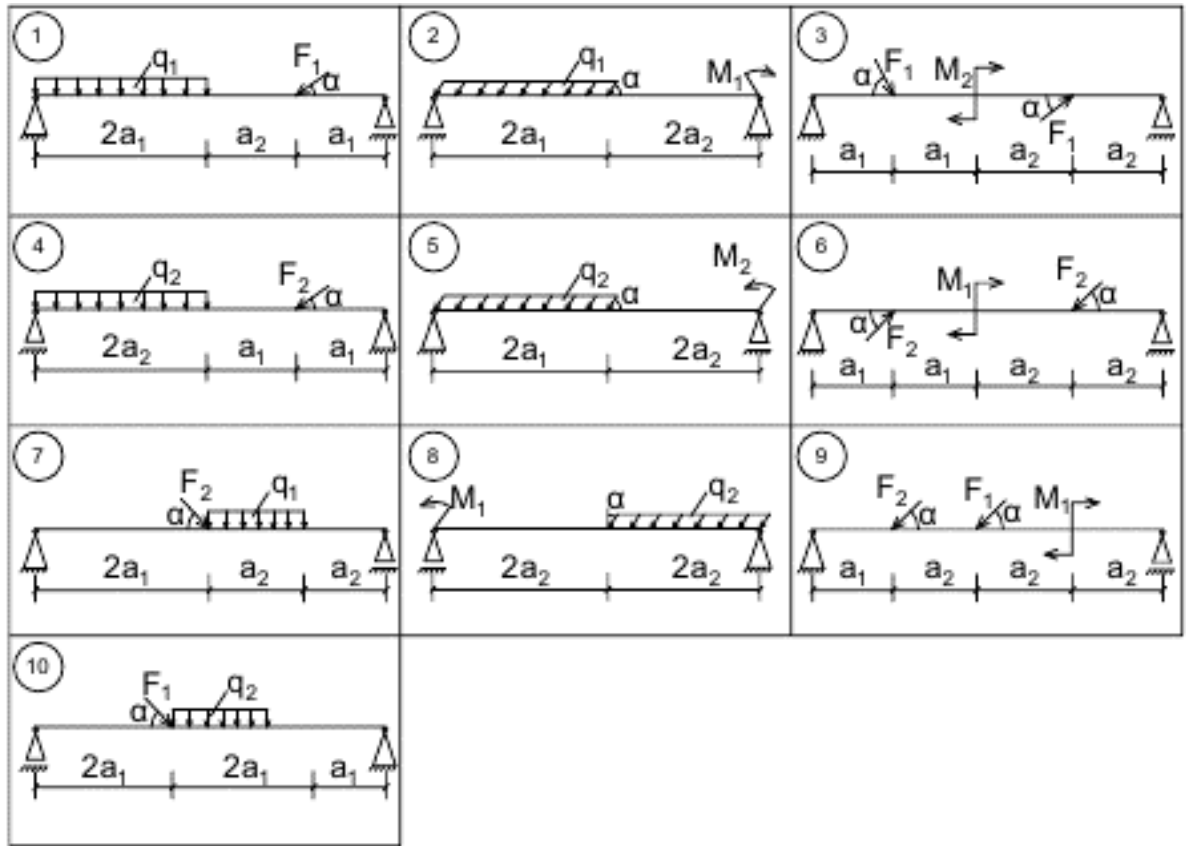


Рис. Д-2.5

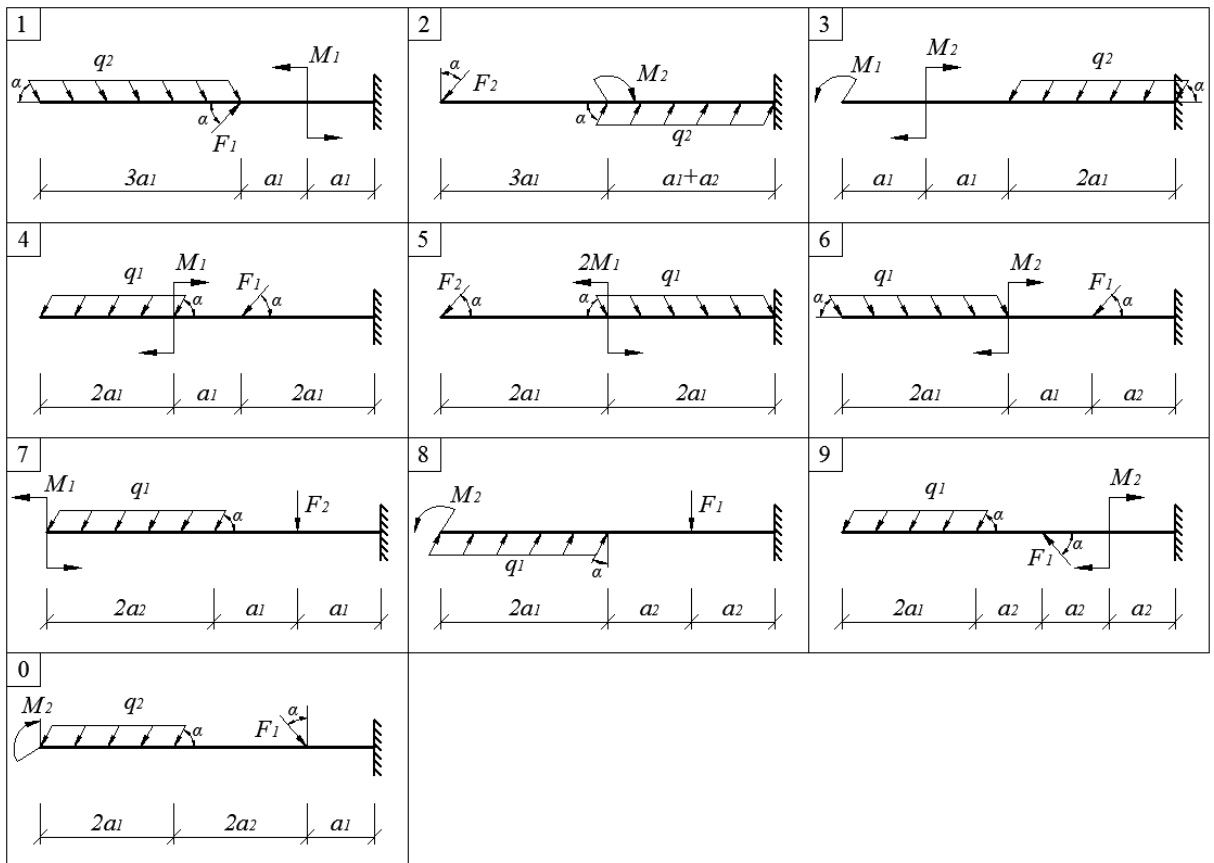


Рис. Д-2.6

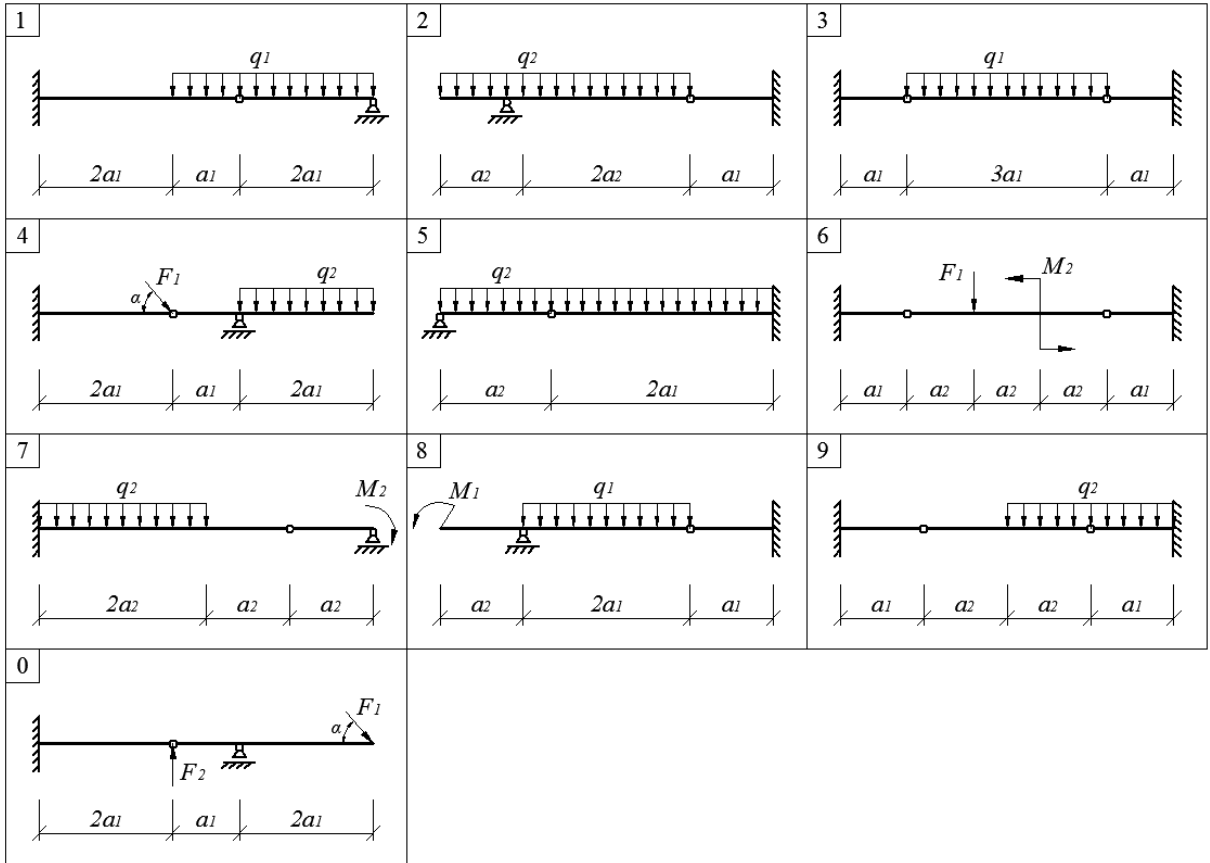


Рис. Д-2.7

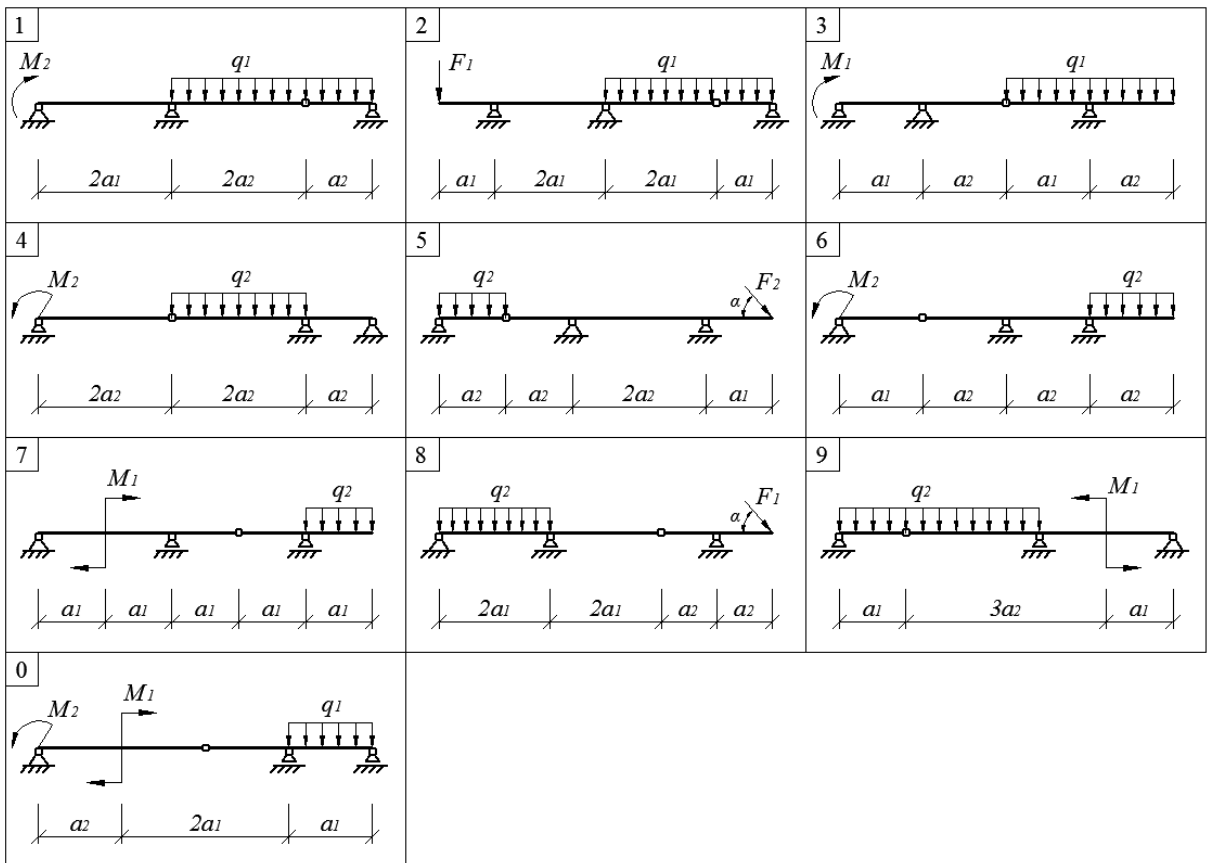


Рис. Д-2.8

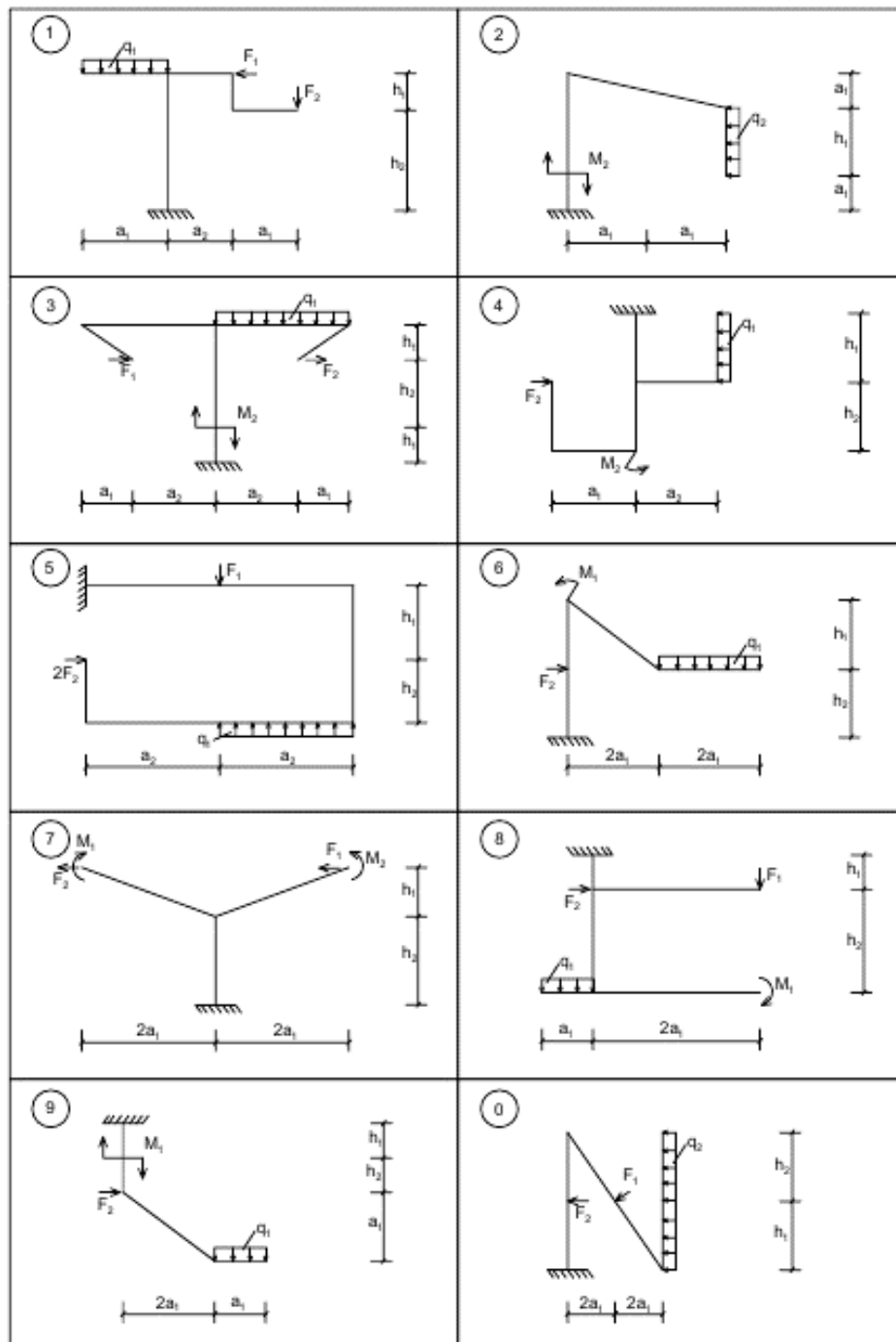


Рис. Д-2.9

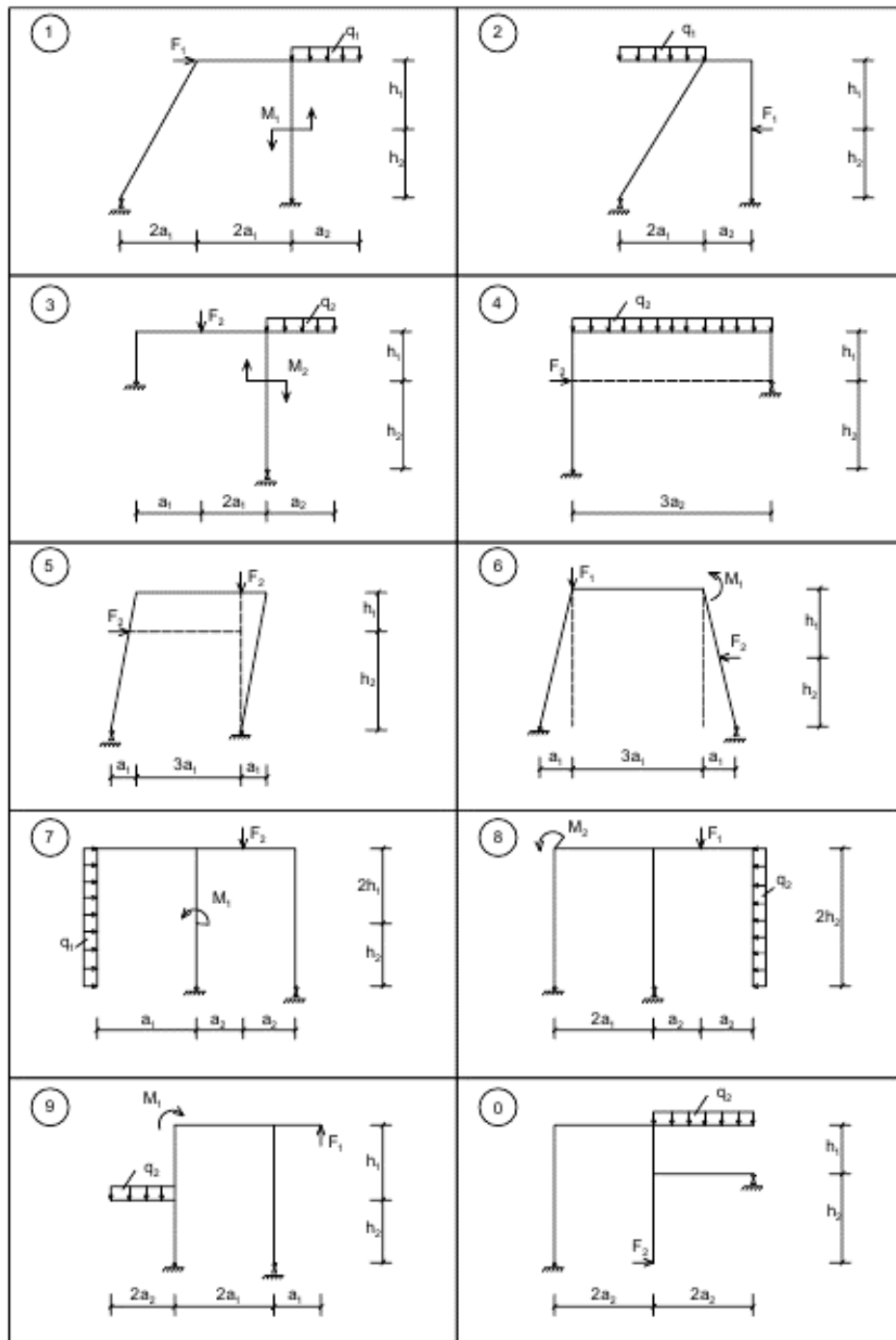


Рис. Д-2.10

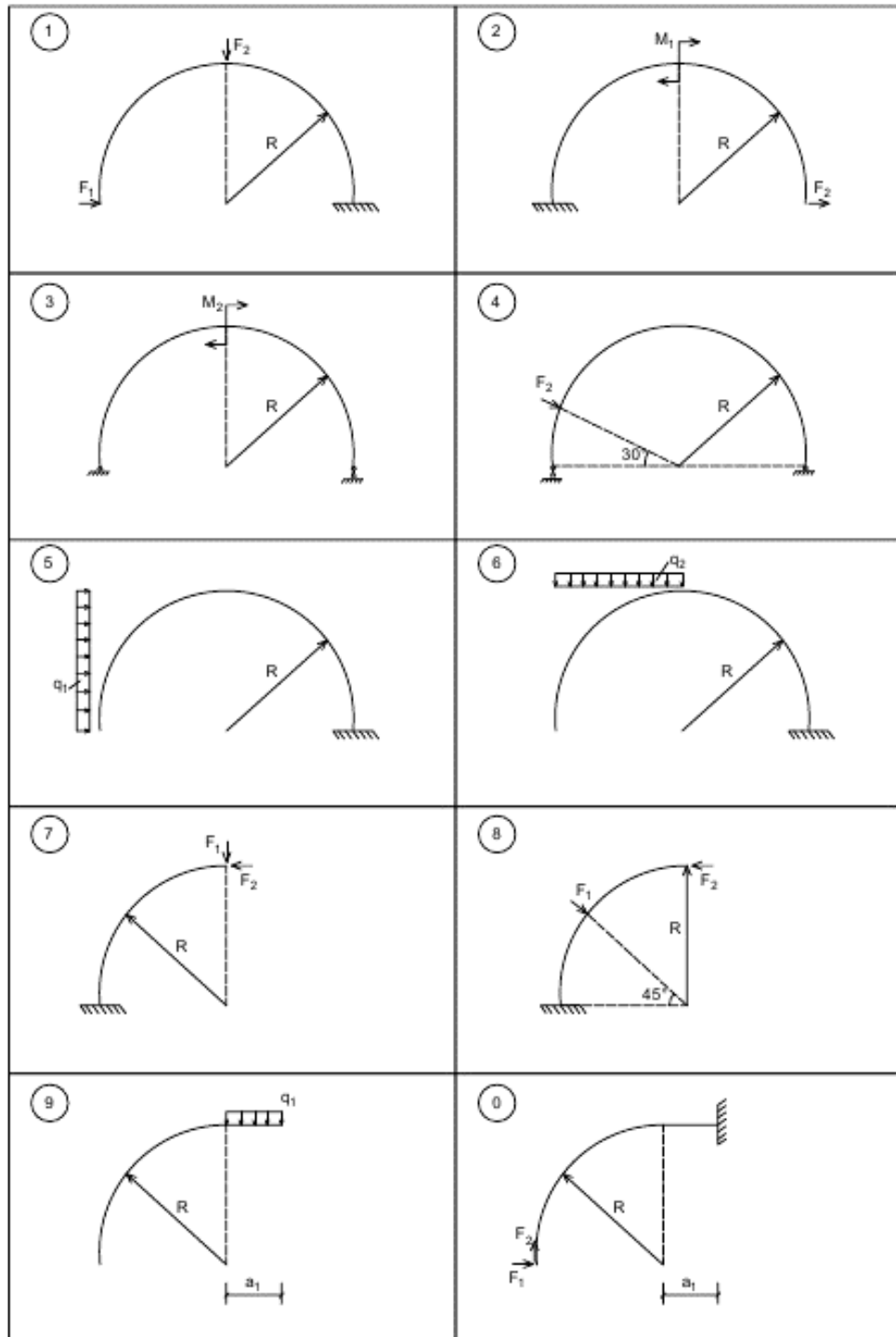


Рис. Д-2.11

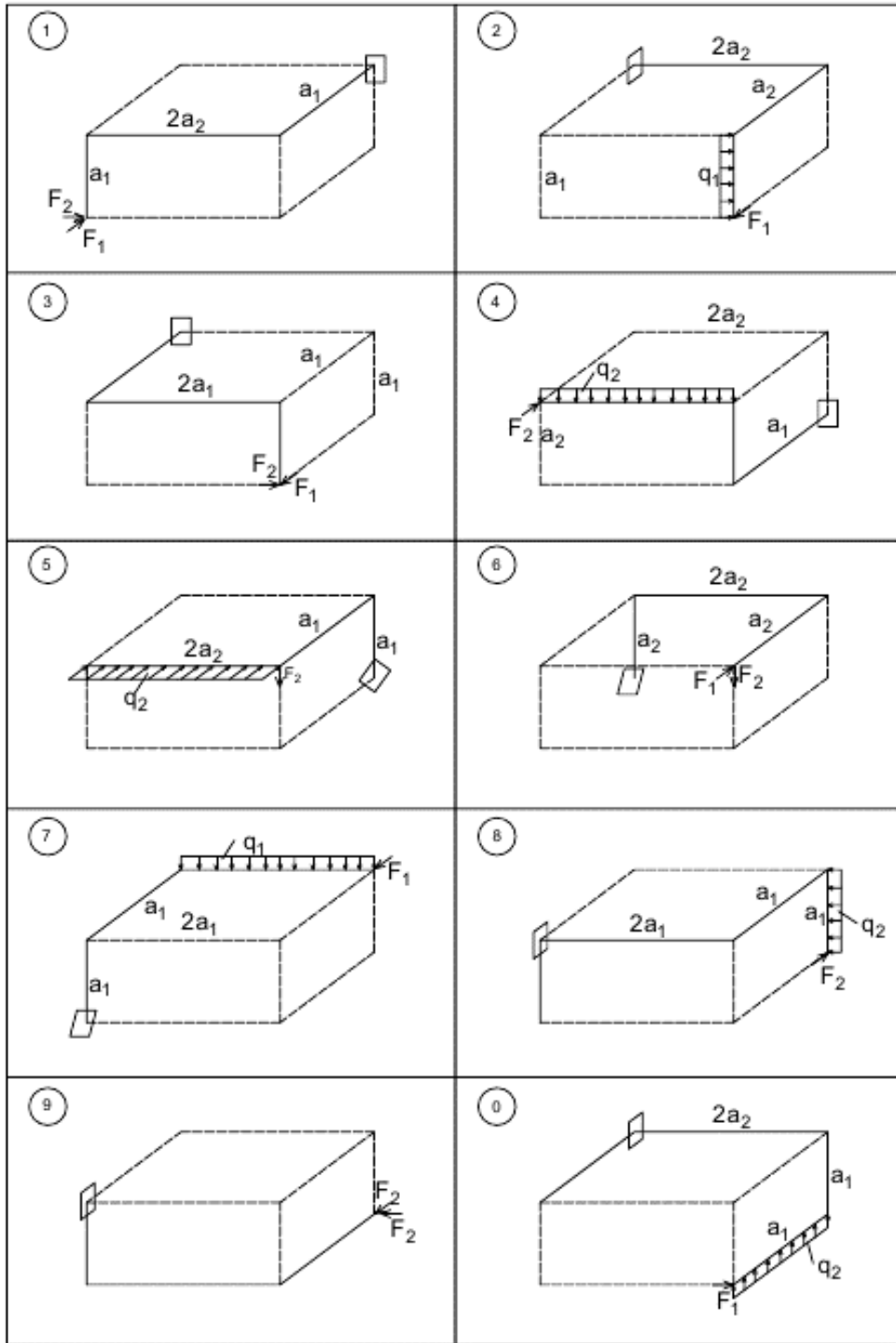


Рис. Д-2.12



Таблица Д-2

Цифра шифру	Перша цифра шифру				Друга цифра шифру				Третя цифра шифру			
	$a_1$	$a_2$	$h_1$	$h_2$	R	$M_1$	$M_2$	$F_1$	$F_2$	$q_1$	$q_2$	$\alpha$
1	2	3	4	3	6	12	5	10	9	4	3	30°
2	3	4	3	2	5	10	7	8	13	6	5	45°
3	4	2	5	4	4	8	9	14	17	8	7	60°
4	3	3	2	5	5	20	11	20	19	10	9	75°
5	2	4	3	5	6	18	13	24	21	8	7	60°
6	4	3	4	4	3	16	15	16	11	6	5	45°
7	2	2	5	3	4	12	17	18	13	4	3	30°
8	3	2	3	2	5	22	19	10	15	2	7	75°
9	4	3	4	3	6	20	21	18	17	8	9	60°
0	2	4	5	4	4	14	11	22	21	6	5	30°

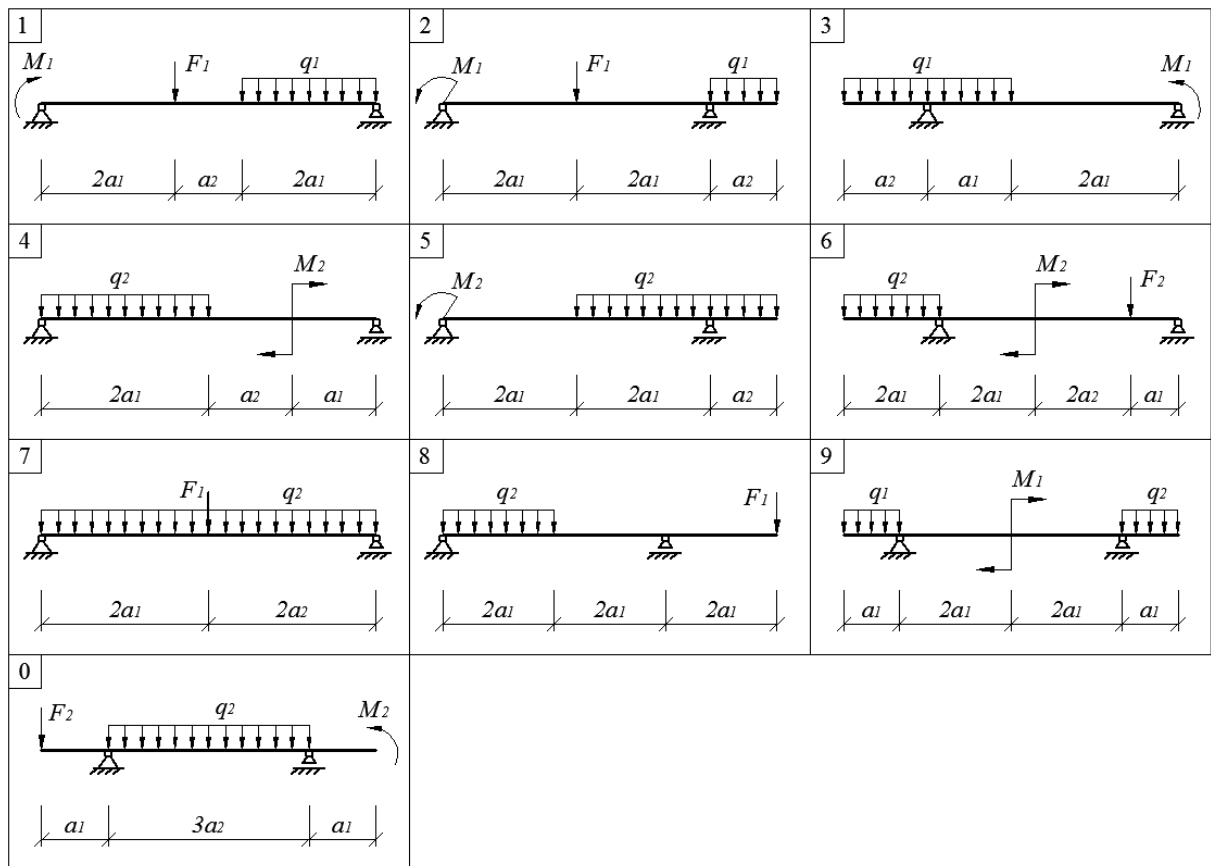


Рис. Д-3.1

Таблиця Д-3

Цифра шифру	Перша цифра шифру		Друга цифра шифру			Третя цифра шифру		
	$a_1$ (м)	$a_2$ (м)	$M_1$ (кНм)	$M_2$ (кНм)	$F_1$ (кН)	$F_2$ (кН)	$q_1$ (кН/м)	$q_2$ (кН/м)
1	2	3	12	5	10	9	4	3
2	3	1,5	10	7	8	13	6	5
3	1,5	2	8	9	14	17	8	7
4	3	3	20	11	20	19	10	9
5	2	1,5	18	13	24	21	8	7
6	1,5	3	16	15	16	11	6	5
7	2	2	12	17	18	13	4	3
8	3	2	22	19	10	15	2	7
9	1,5	3	20	21	18	17	8	9
0	2	1,5	14	11	22	21	6	5

## Література

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – Київ: Вища школа, 1993 р. – 655 с.
2. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Будівельник, 1982 р. – 280 с.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов /Под. ред. В.К. Кочурина. – М.: Наука. 1970 р. – с. 62-180.
4. Опір матеріалів. Побудова епюр внутрішніх зусиль. Розрахунок прокатної балки. Методичні рекомендації, завдання та приклади виконання розрахунково-графічних робіт /уклад.: В.С. Єременко, Ю.А. Морсков, О.П. Кошевий, А.М. Станкевич – К.: КНУБА, 2002. – 68 с.
5. Опір матеріалів. «Напружений стан в точці. Геометричні характеристики поперечного перерізу». Методичні рекомендації та завдання до виконання розрахунково-графічних робіт /уклад.: В.С. Єременко, Ю.А. Морсков, О.П. Кошевий, А.М. Станкевич – К.: КНУБА, 2001. – 32 с.

Для нотаток

Навчально-методичне видання

## ОПР МАТЕРІАЛІВ

### Частина 1

#### Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів.

#### Побудова епюр внутрішніх зусиль. Розрахунок статично-визначеної балки.

Методичні рекомендації, завдання та приклади  
до виконання розрахунково-графічних робіт  
для студентів, які навчаються за спеціальностями  
131 - «Прикладна механіка», 133 - «Галузеве машинобудування»

Укладачі: **КОШЕВИЙ** Олександр Петрович  
**ТРОБЮК** Олександр Михайлович  
**ЯНСОНС** Марина Оскарівна

Видається в авторській редакції  
Комп'ютерне верстання \_\_\_\_\_

Підписано до друку \_\_\_\_\_2016. Формат 60x84  
Ум. друк. арк. \_\_\_\_\_ Обл.-вид. арк. \_\_\_\_\_  
Тираж 100 прим. Вид. \_\_\_\_\_ Зам. № \_\_\_\_\_

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mai: red\_isdat@ua.fm

Видруковано в редакційно-видавничому відділі  
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи  
ДК № 808 від 13.02.2002р.