Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

В.І.Тюптя, В.І.Шевченко, В.К.Струк

Динамічне та нелінійне програмування

Методичні вказівки до проведення практичних
та самостійних занять з курсу **"Дослідження операцій"**
для студентів факультету кібернетики

Київ
Електронна бібліотека факультету кібернетики
2003

“Динамічне та нелінійне програмування”. Методичні вказівки до проведення практичних та самостійних занять з курсу “Дослідження операцій” для студентів факультету кібернетики / Упорядн. Володимир Іванович Тюптя, Віталій Іванович Шевченко, Віктор Кіндратович Стрюк. — К.: Електронне видання. Ел. бібліотека факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2003, — 30 с.

Рецензенти: С.І. Ляшко, д-р фіз.-мат. наук;
В.Ф. Кузенко, канд. фіз.-мат. наук

Затверджено вченою радою
факультету кібернетики
21 жовтня 2002 року

Ел.бібліотека факультету кібернетики КНУ, 2003

1. Динамічне програмування

1.1.Вступні зауваження

В задачах лінійного та нелінійного програмування керований процес, відносно якого приймається рішення, вважається статичним, тобто незалежним від часу, тому оптимальне рішення (керування) знаходиться лише на один етап планування. Такі задачі називаються одноетапними або однокроковими.

В задачах динамічного програмування керований процес залежить від часу, тому знаходиться ряд рішень (для кожного етапу), що забезпечують оптимальний розвиток всього процесу в цілому. Задачі динамічного програмування називаються багатоетапними або багатокроковими. Динамічне програмування являє собою математичний апарат, що дозволяє реалізувати оптимальне керування багатокроковими процесами прийняття рішень. Зауважимо, що досить часто шляхом певного перефразування і деякі статичні задачі можуть бути зведені до багатоетапних.

Основним методом динамічного програмування є розроблений американським математиком Р. Беллманом та його учнями метод рекурентних співвідношень, відомий як **метод функціональних рівнянь Беллмана**, в основі якого лежить такий принцип оптимальності: якщо керування процесом є оптимальним, то воно буде оптимальним і для процесу, що залишається після першого кроку. В більш загальному вигляді принцип оптимальності формулюється так: яким би не був стан системи перед черговим кроком, керування на цьому кроці потрібно вибирати так, щоб оптимізувати результат на цьому кроці плюс результат на всіх наступних кроках. Цей принцип, що є справедливим для так званих адитивних та мультиплікативних показників керування (цільових функцій), дозволяє встановити співвідношення між екстремальними значеннями цільової функції в задачах з різною тривалістю процесу та різними початковими станами.

Пояснимо цей принцип на такому прикладі: є N підприємств, k- е підприємство дає прибуток $g_k(x_k)$, $k=1,...,N$, якщо йому виділено x_k одиниць ресурсу. Потрібно наявні A одиниць ресурсу розподілити між N підприємствами так, щоб сумарний прибуток був максимальним.

Нехай x_k, $k=1,...,N$ – кількість ресурсу, що виділяється k- му підприємству. Тоді з формальної точки зору задача зводиться до звичайної задачі нелінійного програмування:

$$G(x_1,\dots,x_N)=\sum_{k=1}^{N} g_k(x_k) \to max,$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = A,$$

$$x_k \ge 0,\ \ k=1,\dots,N.$$

Зрозуміло, що для розв’язання цієї задачі можуть бути застосовані методи нелінійного програмування.

Розглянемо цю задачу як задачу N - етапного керування, k - им кроком якої є виділення ресурсу x_k k - ому підприємству. Зауважимо, що в нашому прикладі цільова функція $G(x_1,\ldots,x_N)$ (показник ефективності керування) являє собою суму прибутків за всі окремі кроки. Така функція називається **адитивною**.

Згідно з принципом оптимальності керування на кожному кроці слід вибирати з врахуванням його майбутніх наслідків на наступних кроках. Виключенням є останній, N - ий крок, після якого інших кроків немає. Його можна планувати так, щоб він сам по собі приніс найбільший прибуток.

Тому процес динамічного програмування розгортається від кінця до початку: першим планується останній, N - ий крок. Оскільки невідомо, чим закінчився передостанній крок, то потрібно зробити припущення відносно закінчення $(N-1)$ - го кроку і для кожного з них знайти таке керування, при якому прибуток на останньому кроці був би максимальним. Розв'язавши цю задачу, ми знайдемо умовне оптимальне керування на N - му кроці.

Тепер можна оптимізувати керування на $(N-1)$ - му кроці. Зробивши всі можливі припущення про те, як закінчився $(N-2)$ - ий крок, для кожного з них знаходимо оптимальне рішення для $(N-1)$ - го кроку, щоб прибуток за два останніх кроки ($(N-1)$ - ий та N - ий) був максимальним. Далі оптимізується рішення на $(N-2)$ - му кроці і так ми продовжуємо, аж поки не оптимізуємо рішення на першому кроці.

Іншими словами, на кожному кроці знаходимо таке рішення, яке забезпечує оптимальне продовження процесу відносно досягнутого на даний момент стану. При цьому на першому кроці стан системи відомий (A одиниць ресурсу), тому легко знаходиться оптимальне керування для першого етапу (оптимальний об'єм ресурсу x_1^*, що виділяється першому підприємству). В результаті для наступних етапів залишається $A - x_1^*$ одиниць ресурсу. Використовуючи умовне оптимальне керування для другого етапу, знаходимо оптимальний об'єм ресурсу x_2^* для другого підприємства і, продовжуючи так крок за кроком, ми знаходимо оптимальне керування процесом $x = (x_1^*,\ldots,x_N^*)$, що доставляє максимальне значення цільовій функції $G(x_1,\ldots,x_N)$.

Отже в процесі оптимізації керування методом динамічного програмування багатокроковий процес проходиться двічі: спочатку від кінця до початку, в результаті чого знаходяться умовні оптимальні керування на кожному кроці, другий раз – від початку до кінця, в результаті чого знаходяться оптимальні рішення на всіх кроках.

Зауважимо, що аналогічний підхід можна застосовувати і у випадку мультиплікативної цільової функції, тобто, коли загальний прибуток дорівнює добутку прибутків на кожному з етапів (за умови їх додатності).

Ці загальні положення стануть більш зрозумілими на конкретних прикладах, що розглядаються далі.

1.2. Задача інвестування

Вісім умовних одиниць певного ресурсу (наприклад, мільйонів гривень) можуть бути інвестовані (вкладені) у розвиток трьох підприємств ($k = 1,2,3$). Позначимо через $g_k(x)$, $k = 1,2,3$ прибуток в тих же умовних одиницях, що отримується від k- го підприємства, якщо в його розвиток інвестовано x одиниць ресурсу. Величини прибутків $g_k(x)$, $k = 1,2,3$ для різних можливих значень x наведені в таблиці 1. Зауважимо, що ця ж таблиця містить інші дані, зміст яких пояснюється далі.

Таблиця 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_1(x)$	0	5	15	40	80	90	95	98	100
$g_2(x)$	0	5	15	40	60	70	73	74	75
$g_3(x)$	0	4	26	40	45	50	51	52	53
$f_3(x)$	0	4	26	40	45	50	51	52	53
$d_3(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2(x)$	0	5	26	40	60	70	86	100	110
$d_2(x)$	0	1	0	0	4	5	4	4	5

При цьому ми вважаємо, що ресурс вимірюється лише в цілих числах і прибутки від підприємств є незалежними при будь-якому розподілі ресурсу. Потрібно так розподілити наявні ресурси між підприємствами, щоб загальний прибуток від них був максимальним.

Нехай x_k, $k = 1,2,3$ – об'єм інвестицій у k - е підприємство. Тоді формальна постановка задачі така: шукається вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$G(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{3} g_k(x_k) \to max,$$

$$\sum_{k=1}^{3} x_k = 8,$$

$$x_k \ge 0,\ \ k = 1,2,3.$$

Оскільки цільова функція є адитивною, застосуємо метод динамічного програмування до розв'язання цієї задачі. Отже, розглядаємо трьохетапний процес планування, кожен з 3-х етапів якого є виділення ресурсу відповідному підприємству. Зауважимо, що оптимальний розв′язок задачі не залежить від того, в якому порядку перенумеровані підприємства. Розглядаємо останній (3-й) етап планування і нехай на перших двох етапах не використана жодна одиниця ресурсу, тобто до третього етапу ми прийшли, маючи 8 одиниць ресурсу. Тоді для отримання максимального прибутку потрібно всі 8 одиниць інвестувати в розвиток третього підприємства, тому що $g_3(x)$ – зростаюча функція (див. табл. 1). При цьому максимальний прибуток від інвестування $f_3(8) = g_3(8) = 53$ одиниць і для цього потрібно вкласти в розвиток третього підприємства $d_3(8) = 8$ одиниць ресурсу. Для розв'язання задачі методом динамічного програмування потрібні також значення $f_3(x), d_3(x)$ при $x = 0,1,2,...,7$. Вони знаходяться аналогічно і наведені в табл.1. Отже, ми зробили всі можливі припущення відносно закінчення передостаннього (2-го) етапу планування і отримали відповідні умовні оптимальні рішення для 3-го кроку.

Нехай тепер 8 одиниць ресурсу розподіляються між другим та третім підприємствами і z - об'єм інвестування в друге підприємство. Використовуючи значення $f_3(x)$ з таблиці 1, легко підраховуємо:

$$f_2(8)=\max_{z=0,1,\ldots,8}\left[g_2(z)+f_3(8-z)\right]=\max\left[g_2(0)+f_3(8);g_2(1)+f_3(7);g_2(2)+f_3(6);\right.$$

$$\left.g_2(3)+f_3(5);g_2(4)+f_3(4);g_2(5)+f_3(3);g_2(6)+f_3(2);g_2(7)+f_3(1);g_2(8)+f_3(0)\right]=$$

$$=\max\left[0+53;5+52;15+51;40+50;60+45;70+40;73+26;74+4;75+0\right]=$$

$$=\max\left[53;57;66;90;105;110;99;78;75\right]=110,$$

тобто за цих умов у розвиток другого підприємства потрібно вкласти $d_2(8)=5$ одиниць ресурсу. Аналогічно знаходяться $f_2(x)$ та $d_2(x)$ при $x=0,1,2,\ldots,7$ (табл.1). Отже, ми отримали умовні величини прибутків для 2 - го та 3 - го етапів ($f_2(x)$) та умовний оптимальний об'єм інвестування в друге підприємство ($d_2(x)$) за умови різних закінчень 1 - го етапу.

Розгляд першого етапу планування еквівалентний розв'язанню вихідної задачі. Нехай з 8 одиниць ресурсу z одиниць інвестується у перше підприємство, $(8-z)$ – у друге та третє. Використовуючи значення $f_2(x)$ з таблиці 1, знаходимо

$$f_1(8)=\max_{z=0,1,\ldots,8}\left[g_1(z)+f_2(8-z)\right]=g_1(4)+f_2(4)=140,$$

тобто $d_1(8)=4.$ Отже, максимальний прибуток в 140 одиниць отримується при такому розподілі інвестицій: $d_1(8)=4$ одиниці в перше підприємство, $d_2(4)=4$ в друге та $d_3(0)=0$ одиниць в третє.

Загальний вид розглянутих рівнянь такий:

$$f_3(x)=g_3(x),\ \ d_3(x)=x,$$

$$f_i(x)=\max_{z=0,1,\ldots,x}\left[g_i(z)+f_{i+1}(x-z)\right],$$

$$d_i(x)=\arg\max_{z=0,1,\ldots,x}\left[g_i(z)+f_{i+1}(x-z)\right],\ i=2,1;\ x=0,1,\ldots,8,$$

де $f_i(x)$ – максимальний прибуток від інвестування x одиниць ресурсу в підприємства $i,i+1,\ldots,3$, $d_i(x)$ – оптимальне інвестування в i - те підприємство, якщо в підприємства $i,i+1,\ldots,3$ інвестується x одиниць ресурсу.

Узагальнимо наведені вище міркування. Нехай A одиниць ресурсу необхідно розподілити між n $(k=1,\ldots,n)$ підприємствами, $g_k(x_k)$ - прибуток від k - го підприємства при інвестуванні в його розвиток x_k одиниць ресурсу, $k=1,\ldots,n$, $G(x_1,\ldots,x_n)$ – загальний прибуток. Вважаємо, що $g_k(x_k)$, $k=1,\ldots,n$ –

неспадні функції своїх аргументів. З математичної точки зору задача зводиться до знаходження вектора $x=(x_1,\dots,x_n)$, що є розв'язком задачі математичного програмування:

$$G(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x_k)\to max,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = A, \qquad x_k\ge 0,\ k=1,\dots,n.$$

Позначимо

$$f_i(x)=\max_{\substack{\{x_i,\dots,x_n\}\\ \sum_{k=i}^{n} x_k=x}} \sum_{k=i}^{n} g_k(x_k),\ \ i=n-1,\dots,1.$$

Тоді

$$f_i(x)=\max_{0\le x_i\le x}\left\{\max_{\substack{\{x_{i+1},\dots,x_n\}\\ \sum_{k=i+1}^{n} x_k=x-x_i}} \sum_{k=i}^{n} g_k(x_k)\right\}=\max_{0\le x_i\le x}\left\{g_i(x_i)+\max_{\substack{\{x_{i+1},\dots,x_n\}\\ \sum_{k=i+1}^{n} x_k=x-x_i}} \sum_{k=i+1}^{n} g_k(x_k)\right\}=$$

$$=\max_{0\le x_i\le x}\left\{g_i(x_i)+f_{i+1}(x-x_i)\right\},\ \ i=n-1,\dots,1,$$

$x=0,1,...,A$ для кожного $i=n-1,...,1$. Останнє рівняння є основним рекурентним співвідношенням, що зв'язує $f_i(x)$ та $f_{i+1}(x)$, і називається **функціональним рівнянням Беллмана.**

Нехай

$$d_i(x)=arg\max_{0\le x_i\le x}\left\{g_i(x_i)+f_{i+1}(x-x_i)\right\},\ \ i=n-1,\dots,1,$$

$$d_n(x)=arg\max_{0\le x_n\le x} g_n(x_n).$$

Тоді $f_1(A)$ – максимальний прибуток, що може бути отриманий від інвестування A одиниць ресурсу в розвиток n підприємств, $y_k=d_k\left(A-\sum_{l=1}^{k-1} y_l\right), k=1,...,n$ – оптимальний об'єм інвестицій в k - е підприємство.

1.3. Задача про заміну обладнання

На підприємстві експлуатується деякий механізм 1999 року випуску. Розглядається задача про доцільність його заміни протягом 2001 – 2005 років. На початку кожного року приймається одне з двох можливих рішень: або замінити механізм (з), або продовжити його експлуатацію (е). Звичайно, експлуатація механізму приносить підприємству певний прибуток, а також вимагає витрат на його утримання. Вважаємо також, що відома вартість заміни механізму на початку року. Перша частина таблиці 2 містить значення цих

Таблиця 2

	2001	2002	2003	2004	2005
Механізм 1999 р. випуску					
Вік	2	3	4	5	6
Прибуток	10	8	8	6	4
Утримання	3	3	4	4	5
Заміна	25	26	27	28	29
Механізм 2001 р. випуску					
Вік	0	1	2	3	4
Прибуток	14	16	16	14	12
Утримання	1	1	2	2	3
Заміна	20	22	24	25	26
Механізм 2002 р. випуску					
Вік		0	1	2	3
Прибуток		16	14	14	12
Утримання		1	1	2	2
Заміна		20	22	24	25
Механізм 2003 р. випуску					
Вік			0	1	2
Прибуток			18	16	16
Утримання			1	1	2
Заміна			20	22	24
Механізм 2004 р. випуску					
Вік				0	1
Прибуток				18	16
Утримання				1	1
Заміна				21	22
Механізм 2005 р. випуску					
Вік					0
Прибуток					20
Утримання					1
Заміна					21

величин для механізму 1999 р. випуску в наступні роки, розпочинаючи з 2001 року. Так, наприклад, у 2004 році вік механізму складатиме 5 років, його експлуатація протягом цього року принесе прибуток у 6 одиниць, витрати на утримання складуть 4 одиниці, а його заміна на початку цього року обійдеться підприємству в 28 аналогічних одиниць.

Може статися, що буде доцільним замінити механізм 1999 р. на початку 2001 р. Тоді для подальшого аналізу потрібні аналогічні дані про механізм 2001 року випуску. Вони наводяться в другій частині таблиці 2.

Якщо ж заміна механізму 1999 р. відбудеться на початку 2002 р., то надалі аналізуватимуться прибутки та витрати, пов′язані з експлуатацією механізму 2002 р. випуску (третя частина таблиці 2) тощо. Таблиця 2, отже, містить всю необхідну інфомацію, пов′язану з можливою заміною механізму протягом 2001 – 2005 років. Зауважимо, що наведеної інформації досить і для щорічної заміни механізму: на початку 2001 р. замінити механізм 1999 р. випуску, експлуатувати цей механізм протягом року і замінити на початку 2002 року і т. д.

Потрібно визначити рішення на початку кожного року так, щоб максимізувати сумарні прибутки за 2001 – 2005 роки. Будемо вважати 2001 р. – першим роком, … , 2005 р. – п′ятим роком планового періоду і нехай

$r_i(t)$ – прибуток від експлуатації t - річного механізму протягом i - го року,

$u_i(t)$– витрати на утримання протягом i - го року t - річного механізму,

$c_i(t)$ – вартість заміни t - річного механізму на початку i - го року,

$IT = 2$ – вік механізму на початку розглядуваного періоду,

$f_i(t)$ – максимальний прибуток для періоду з років $i, i+1,...,5$ за умови, що на початку i - го року маємо t - річний механізм,

$x_i(t)$ – рішення, яке необхідно прийняти на початку i - го року для отримання $f_i(t)$.

Нехай на початок i - го року планування є t - річний механізм. У нас є дві альтернативи: замінити його або продовжити експлуатацію. У першому випадку витрати протягом i - го року складають $u_i(0)$ одиниць на утримання нового механізму та $c_i(t)$ одиниць на заміну старого механізму. При цьому експлуатація нового механізму протягом i - го року дає прибуток в $r_i(0)$ одиниць і на початок $(i+1)$ - го року планування матимемо однорічний механізм. Це означає, що у випадку заміни механізму загальний прибуток складає $r_i(0) - u_i(0) - c_i(t) + f_{i+1}(1)$ одиниць. У другому випадку витрати протягом i - го року складають $u_i(t)$ одиниць на утримання старого механізму. Його експлуатація протягом i - го року дає прибуток в $r_i(t)$ одиниць і на початок $(i+1)$ - го року планування матимемо $(t+1)$-річний механізм. Тобто, у цьому випадку загальний прибуток складає $r_i(t) - u_i(t) + f_{i+1}(t+1)$ одиниць. Оскільки ми прагнемо максимізувати прибуток, то функціональне рівняння для i - го періоду має вигляд

$$f_i(t) = \max\{r_i(0) - u_i(0) - c_i(t) + f_{i+1}(1);\ r_i(t) - u_i(t) + f_{i+1}(t+1)\},$$

$$i = 1,...5,\quad t = 1,...,i-1, i+IT-1.$$

Для використання функціонального рівняння при $i = 5$ необхідні значення $f_6(j)$ для $j = 1,2,3,4,5,7$. Покладемо їх рівними нулю. Це означає, що ми не приймаємо до уваги прибутки, що отримуються поза плановим періодом. Використовуючи функціональне рівняння та дані з таблиці 2, маємо, наприклад,

для $i = 5, t = 1$: $f_5(1) = \max\{r_5(0) - u_5(0) - c_5(1) + f_6(1);\ r_5(1) - u_5(1) + f_6(2)\} =$
$= \max\{20 - 1 - 22 + 0;\ 16 - 1 + 0\} = \max\{-3;\ 15\} = 15 \to x_5(1) = (\text{е}),$

для $i = 5, t = 2$: $f_5(2) = \max\{r_5(0) - u_5(0) - c_5(2) + f_6(1);\ r_5(2) - u_5(2) + f_6(3)\} =$
$= \max\{20 - 1 - 24 + 0;\ 16 - 2 + 0\} = \max\{-5;\ 14\} = 14 \to x_5(2) = (\text{е}),$

для $i = 5, t = 3$: $f_5(3) = \max\{r_5(0) - u_5(0) - c_5(3) + f_6(1);\ r_5(3) - u_5(3) + f_6(4)\} =$
$= \max\{20 - 1 - 25 + 0;\ 12 - 2 + 0\} = \max\{-6;\ 10\} = 10 \to x_5(3) = (\text{е}),$

для $i = 5, t = 4$: $f_5(4) = \max\{r_5(0) - u_5(0) - c_5(4) + f_6(1);\ r_5(4) - u_5(4) + f_6(5)\} =$
$= \max\{20 - 1 - 26 + 0;\ 12 - 3 + 0\} = \max\{-7;\ 9\} = 9 \to x_5(4) = (\text{е}),$

для $i = 5, t = 6$: $f_5(6) = \max\{r_5(0) - u_5(0) - c_5(6) + f_6(1);\ r_5(6) - u_5(6) + f_6(7)\} =$
$= \max\{20 - 1 - 29 + 0;\ 4 - 5 + 0\} = \max\{-10;\ -1\} = -1 \to x_5(6) = (\text{е}).$

Одержані результати заносимо до таблиці 3. Виконуючи аналогічні обчислення послідовно для $i = 4, t = 1,2,3,5$; $i = 3, t = 1,2,4$; $i = 2, t = 1,3$; $i = 1, t = IT$, отримуємо решту результатів таблиці 3.

Таблиця 3

t	$f_5(t)$	$x_5(t)$	$f_4(t)$	$x_4(t)$	$f_3(t)$	$x_3(t)$	$f_2(t)$	$x_2(t)$	$f_1(t)$	$x_1(t)$
1	15	(е)	29	(е)	35	(е)	50	(е)		
2	14	(е)	22	(е)	35	(е)			38	(з)
3	10	(е)	21	(е)			24	(з,е)		
4	9	(е)			19	(з)				
5			4	(з)						
6	-1	(е)								

Отже, оптимальним рішенням є: замінити механізм на початку 2001 року і експлуатувати його протягом 5 років. При цьому максимальний прибуток складає 38 одиниць.

1.4. Задача планування виробництва та запасів

Нехай заводу-постачальнику потрібно запланувати випуск продукції на наступний рік так, щоб забезпечити певний графік попиту на свою продукцію кожного місяця. Наприклад, у січні місяці потрібно поставити 150 одиниць продукції, у лютому - 70, у березні - 250 тощо.

Можна виробляти кожного місяця рівно стільки продукції, скільки її потрібно за графіком. Однак такий план випуску пов’язаний з надмірними витратами на розширення виробництва в період підвищеного попиту та витратами на простій обладнання в період зниженого попиту. Можна виробляти надлишок продукції в період зниженого попиту з тим, щоб зберегти його та використати в період підвищеного попиту. Проте при такому плануванні виробництва потрібно враховувати витрати на зберігання продукції. Задача полягає в тому, щоб визначити план випуску продукції, при якому мінімізуються сумарні витрати, пов’язані з виробництвом та зберіганням продукції. Часто цю задачу скорочено називають **задачею згладжування виробництва**.

Нехай для простоти кількість періодів поставки продукції n = 6 і об'єми попиту такі:

період i	1	2	3	4	5	6
попит d_i	8	4	6	2	10	4

Будемо вважати також, що запас продукції на початку 1 - го періоду $IO = 0$, запас продукції в кінці n - го періоду $EI = 0$, вартість виробництва j одиниць продукції протягом i - го періоду позначається $PC_i(j)$ і визначається співвідношенням:

$$PC_i(j) = \begin{cases} 0, & j = 0,\ i = 1,\dots,n, \\ 20 + 5j, & j \neq 0,\ i = 1,\dots,n, \end{cases}$$

в якому 20 є вартість наладки виробництва, 5 є вартість виробництва одиниці продукції, вартість зберігання j одиниць продукції на кінець i - го періоду $EIC_i(j)$ визначається співвідношенням:

$$EIC_i(j) = j,\ \ i = 1,\dots,n,$$

тобто, витрати на зберігання визначаються кількістю продукції на кінець періоду.

Дотримуючись ідеї динамічного програмування, розглянемо оптимальне планування на n - ий (6- ий) період. Нехай $f_n(k), x_n(k)$ – мінімальна вартість виробництва і його об'єм для n - го періоду за умови, що на початку n - го періоду є запас об'єму k одиниць продукції. Тоді

$$f_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{для } k \geq d_n, \\ 20 + 5(d_n - k) & \text{для } k = 0,1,\dots,d_n - 1, \end{cases}$$

$$x_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{для } k \geq d_n, \\ d_n - k & \text{для } k = 0,1,\dots,d_n - 1. \end{cases}$$

Значення $f_n(k)$ та $x_n(k)$ для різних можливих значень k наведені в таблиці 4. Переходимо до 5 - го етапу, розглядаючи оптимальне планування для 5 - го та 6 - го періодів. Якщо запас на початок 5 - го періоду менший, ніж d_5, то мінімальна кількість продукції, що має бути вироблена, дорівнює $d_5 - k$, інакше – 0. Аналогічно, максимальний об'єм виробництва на 5 - му етапі визначається величиною $d_5 + d_6 - k$.

Тому

$$f_5(k) = \min_{\max(0, d_5 - k) \leq z \leq d_5 + d_6 - k} \left[PC_5(z) + EIC_5(k + z - d_5) + f_6(k + z - d_5) \right] =$$

$$= \min_{\max(0, 10 - k) \leq z \leq 14 - k} \left[PC_5(z) + k + z - 10 + f_6(k + z - 10) \right].$$

Нехай $x_5(k)$ – розв'язок цієї задачі. Тоді для можливих значень $k = 0,1,...,\ d_5 + d_6 = 14$ отримуємо $f_5(k)$ та $x_5(k)$ (див. табл. 4) .

Таблиця 4

Початковий запас k	$f_6(k)$	$x_6(k)$	$f_5(k)$	$x_5(k)$	$f_4(k)$	$x_4(k)$	$f_3(k)$	$x_3(k)$	$f_2(k)$	$x_2(k)$	$f_1(k)$	$x_1(k)$
0	40	4	94	14	118	16	156	8	184	12	236	20
1	35	3	89	13	113	15	151	7	179	11		
2	30	2	84	12	94	0	146	6	174	10		
3	25	1	79	11	90	0	141	5	169	9		
4	0	0	74	10	86	0	136	4	156	0		
5	0	0	69	9	82	0	131	3	152	0		
6	0	0	64	8	78	0	118	0	148	0		
7	0	0	59	7	74	0	114	0	144	0		
8	0	0	54	6	70	0	96	0	140	0		
9	0	0	49	5	66	0	93	0	136	0		
10	0	0	40	0	62	0	90	0	124	0		
11	0	0	36	0	58	0	87	0	121	0		
12	0	0	32	0	50	0	84	0	104	0		
13	0	0	28	0	47	0	81	0	102	0		
14	0	0	4	0	44	0	78	0	100	0		
15	0	0	0	0	41	0	75	0	98	0		
16	0	0	0	0	18	0	72	0	96	0		
17	0	0	0	0	0	0	69	0	94	0		
18	0	0	0	0	0	0	62	0	92	0		
19	0	0	0	0	0	0	60	0	90	0		
20	0	0	0	0	0	0	58	0	88	0		
21	0	0	0	0	0	0	56	0	86	0		
22	0	0	0	0	0	0	34	0	80	0		
23	0	0	0	0	0	0	0	0	79	0		
24	0	0	0	0	0	0	0	0	78	0		
25	0	0	0	0	0	0	0	0	77	0		
26	0	0	0	0	0	0	0	0	56	0		
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Для решти етапів $i = 4,3,2,1$ величини $f_i(k)$, $x_i(k)$ визначаються аналогічно. Взагалі

$$f_i(k) = \min_{max(0, d_i - k) \le z \le \sum_{j=i}^{6} d_j - k} \left[PC_i(z) + EIC_i(k + z - d_i) + f_{i+1}(k + z - d_i) \right],$$

а $x_i(k)$ – оптимальний розв'язок цієї задачі. Величини $f_i(k)$, $x_i(k)$, $i = 1,2,3,4,5,6$, наведені в таблиці 4. Як бачимо, $x_1(0) = 20$,

$$x_2(20 - d_1) = x_2(20 - 8) = x_2(12) = 0,$$
$$x_3(12 - d_2) = x_3(12 - 4) = x_3(8) = 0,$$
$$x_4(8 - d_3) = x_4(8 - 6) = x_4(2) = 0,$$

$x_5(2-d_4) = x_5(2-2) = x_5(0) = 14,$
$x_6(14-d_5) = x_6(14-10) = x_6(4) = 0,$
тобто, оптимальним планом виробництва у розглянутій задачі є такий: протягом 1 - го періоду виробити 20 одиниць продукції для задоволення попиту протягом перших чотирьох періодів, протягом 5 - го періоду виробити 14 одиниць продукції для задоволення попиту останніх двох періодів. При цьому мінімальні витрати становлять 236 одиниць.

1.5. Задача про найкоротший шлях на мережі

Потрібно знайти найкоротший шлях з вершини 1 до вершини 10 на графі, зображеному на рис.1. Цифри на дугах означають довжини c_{ij} відповідних комунікацій.

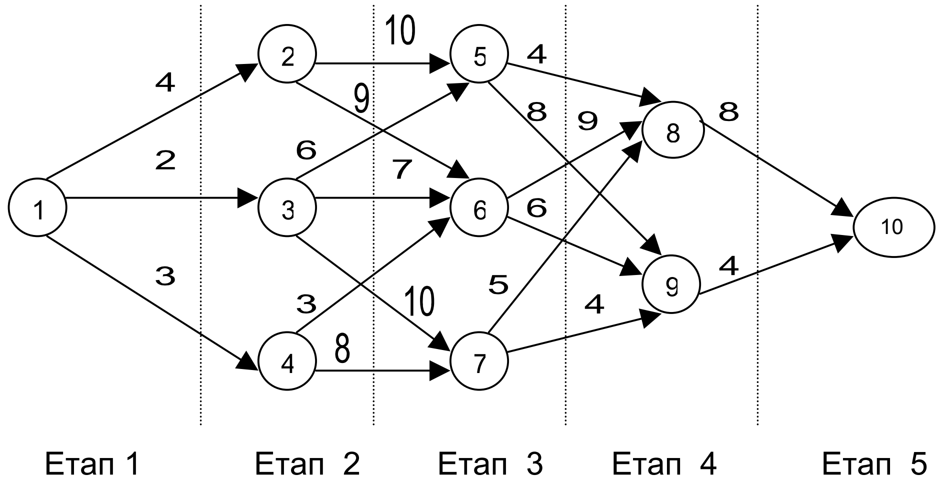

Рис. 1.

Застосуємо ідею динамічного програмування до розв'язання цієї задачі. Етапи позначені на рис.1 . Нехай $f_k(x)$ – мінімальна відстань від вершини x, що належить k - му етапу до вершини 10, $d_k(x)$ – вершина, до якої потрібно перейти після вершини x, дотримуючись шляху мінімальної довжини. Якщо ми знаходимось на 4 - му етапі, то

$$f_4(8) = 8,\ \ d_4(8) = 10,\ \ f_4(9) = 4,\ \ d_4(9) = 10.$$

Переходимо до 3-го етапу. Якщо ми знаходимося у вершині 5, то з неї існує два можливих шляхи до вершини 10. Очевидно, що

$$f_3(5) = min\{4 + f_4(8),\ 8 + f_4(9)\} = min\{12,\ 12\} = 12,$$
$$d_3(5) = 8\ \ або\ \ 9.$$

Аналогічно знаходимо всі величини $f_k(x), d_k(x).$ Результати наведені в таблиці 5.

Таблиця 5

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_4(x)$								8	4
$d_4(x)$								10	10
$f_3(x)$					12	10	8		
$d_3(x)$					8,9	9	9		
$f_2(x)$		19	17	13					
$d_2(x)$		6	6	6					
$f_1(x)$	16								
$d_1(x)$	4								

З таблиці випливає, що довжина найкоротшого шляху з вершини 1 до вершини 10 дорівнює 16, а оптимальним маршрутом є 1 $\to$ 4 $\to$ 6 $\to$ 9 $\to$10. Цей маршрут будується згідно з $d_k(x)$:

$$1 \to d_1(1) = 4 \to d_2(4) = 6 \to d_3(6) = 9 \to d_4(9) = 10.$$

Зауважимо, що якщо c_{ij} – собівартість перевезення вантажу по відповідній комунікації, то розглянута задача еквівалентна пошуку шляху мінімальної собівартості з вершини 1 до вершини 10.

1.6. Вправи.

1. 20 умовних одиниць ресурсу можуть бути інвестовані в розвиток трьох галузей промисловості. Прибутки, що отримуються від інвестування *x* одиниць ресурсу в кожну з галузей, відповідно дорівнюють

$$g_1(x) = 5\sqrt{x},\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = 0.07x^2,\ 0 \le x \le 20.$$

Ресурс розподіляється в цілих одиницях. Визначити кількість одиниць ресурсу, що інвестується в кожну з галузей так, щоб отримати максимальний сумарний прибуток. Знайти величину цього прибутку.

Таблиця 6

Інвестиція (тис. од.)	Прибуток (тис. од.)			
	Г	Ж	Т	Р
0	10.00	10.00	10.00	10.00
1	10.20	10.25	10.30	10.15
2	10.70	10.80	10.90	10.50
3	11.20	11.65	11.95	11.20
4	12.00	12.60	13.00	12.00
5	12.65	13.75	14.50	13.10
6	13.30	14.80	16.30	14.50
7	14.06	15.95	18.05	15.60
8	14.80	17.20	20.00	17.20
9	15.40	18.10	21.70	18.64
10	16.00	19.00	24.00	20.00

2. Підприємство, що виробляє новий пральний порошок, зацікавлене в оптимальних інвестиціях в різні засоби реклами з метою максимізації свого прибутку від реалізації продукції. Розглядаються чотири засоби реклами: газета

(г), журнал (ж), телебачення (т), радіо (р). В таблиці 6 наведені очікувані прибутки в умовних одиницях від інвестування в різні засоби реклами.
На рекламу виділено 10 000 одиниць. У які засоби реклами варто їх інвестувати, щоб максимізувати загальний прибуток. Розв'язати цю ж задачу, якщо на рекламу виділено 5000 одиниць.

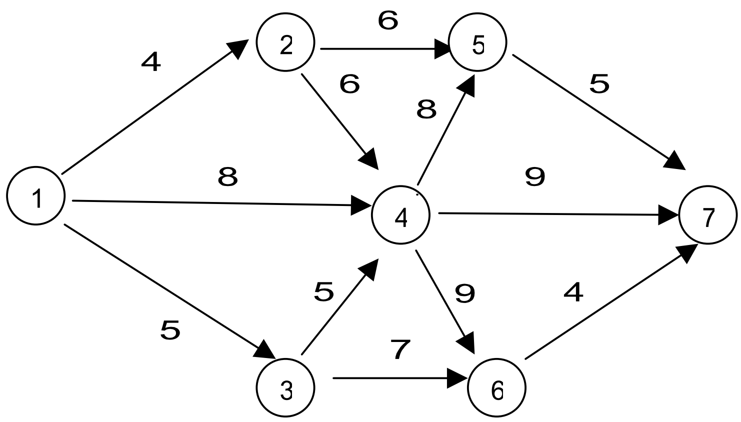

Рис. 2.

3. На графі, зображеному на рис.1, знайти найкоротший шлях з вершини 1 до вершини 10, що проходить через вершину 8.

4. Модифікувати алгоритм розв'язання задачі про найкоротший шлях на мережі на випадок задачі про знаходження найдовшого шляху між двома заданими вершинами на мережі. Знайти найдовший шлях з вершини 1 до вершини 10 на графі, зображеному на рис.1.

5. Вантажний автомобіль необхідно перегнати з пункту 1 до пункту 12. Дорогою він може перевозити деякі вантажі і принести прибутки, величини яких вказані в таблиці 7.

Таблиця 7

Від пункту	До пункту										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	4	2								
2				8	10	5	7				
3				6	3	8	10				
4				8	9	6	4				
5								8	4	3	
6								5	2	7	
7								4	10	6	
8								12	5	2	
9											7
10											3
11											6

Зауважимо, що із заданого пункту можна проїхати лише до деяких інших пунктів. Наприклад, з пункту 2 можна безпосередньо проїхати до пунктів 5, 6, 7 та 8. Потрібно визначити маршрут перегону автомобіля, що максимізує загальний прибуток.

6. Використовуючи концепцію динамічного програмування, визначити шлях максимальної довжини з вершини 1 до вершини 7 на графі, зображеному на рис.2.

7. Використовуючи алгоритм розв'язання задачі планування виробництва та запасів, розв'язати приклад з пункту 1.4 за умови, що початковий запас продукції дорівнює 9 одиниць, а запас продукції на кінець кожного місяця не може перевищувати 10 одиниць.

8. Розглянути задачу згладжування виробництва з 10-ма періодами, якщо початковий запас дорівнює 15 одиницям, максимальний запас продукції на кінець кожного місяця дорівнює 20 одиниць, вартість виробництва j одиниць продукції протягом кожного періоду дорівнює $25+6j$, вартість зберігання j одиниць продукції на кінець кожного періоду дорівнює $\frac{j}{2}$, а об'єми попиту наведені в таблиці:

період i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
попит d_i	15	12	30	25	24	6	18	25	12	40

Використовуючи алгоритм пункту 1.4, визначити план виробництва на кожний період, що мінімізує сумарні витрати.

9. Розглянути задачу згладжування виробництва, об'єми попиту для якої наведені в таблиці 8, вартість налагодження виробництва рівна 5 одиниць, вартість виробництва одного виробу – 1 одиниця, вартість зберігання одного виробу – 1 одиниця і визначається запасом на кінець місяця.

Таблиця 8

місяць	червень	липень	серпень
попит	5	3	2

Запас на 1-ше червня рівний 1 одиниці, а на кінець серпня – 0. Побудувати функціональні рівняння динамічного програмування для визначення оптимального плану виробництва.

10. Розв'язати задачу про заміну обладнання, наведену в пункті 1.3, в якій величини всіх прибутків збільшені на 2 одиниці, всі витрати на утримання збільшені на 3 одиниці і всі вартості заміни збільшені на 1 одиницю.

1.7. Література.

1. Беллман Р. Динамическое программирование. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1969.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Москва, Изд-во "Советское радио", 1972.
3. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций, Киев, Изд-во "Вища школа", 1979.
4. Тюптя В.И., Третяк В.П. Задания к лабораторным работам по курсу "Исследование операций". Киев, КГУ, 1983.
5. Gillett B.E. Introduction to operations research, a computer-oriented algorithmic approach. McGraw Hill Book Company, New York, 1976.

2. Нелінійне програмування. Геометрична інтерпретація та класичні методи.

2.1. Основні поняття та означення.

Загальний вид задачі нелінійного програмування (ЗНП): знайти мінімум цільової функції

$$z = f_0(\boldsymbol{x}) \tag{1.1}$$

за умови

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}} : f_i(\boldsymbol{x}) \begin{bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{bmatrix} 0,\ \ i = \overline{1,m}\} \tag{1.2}$$

де принаймні одна із функцій $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = \overline{0,m}$ є нелінійною.

Множину $\boldsymbol{X}$ називають допустимою множиною, а довільний елемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ – допустимою точкою ЗНП.

Точка $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X}$ називається:

1) точкою глобального мінімуму функції $f_0(\boldsymbol{x})$ на множині $\boldsymbol{X}$ або глобальним розв’язком задачі (1.1), (1.2), якщо

$$f_0(\boldsymbol{x}^*) \le f_0(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}; \tag{1.3}$$

2) точкою локального мінімуму $f_0(\boldsymbol{x})$ на множині $\boldsymbol{X}$ або локальним розв’язком задачі (1.1), (1.2), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що

$$f_0(\boldsymbol{x}^*) \le f_0(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{S}_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*), \tag{1.4}$$

де $\boldsymbol{S}_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}} : \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \right\| \le \varepsilon\}$ – куля з радіусом ε і центром в точці $\boldsymbol{x}^*$.

Якщо нерівності в (1.3) або (1.4) є строгими при $\boldsymbol{x}^* \ne \boldsymbol{x}$, то говорять, що $\boldsymbol{x}^*$ – точка строгого мінімуму (строгий розв’язок) у глобальному або локальному розумінні відповідно.

Задача максимізації функції $f_0(\boldsymbol{x})$ на множині $\boldsymbol{X}$

$$f_0(\boldsymbol{x}) \to \max,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}; \tag{1.5}$$

еквівалентна задачі мінімізації

$$-f_0(\boldsymbol{x}) \to \min,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}; \tag{1.6}$$

у розумінні співпадання множин глобальних або локальних, строгих або нестрогих розв’язків цих задач.

Точки мінімуму та максимуму функції $f_0(\boldsymbol{x})$ на множині $\boldsymbol{X}$ об’єднуються спільною назвою – точок екстремуму $f_0(\boldsymbol{x})$ на $\boldsymbol{X}$.

2.2. Геометрична інтерпретація ЗНП.

Для геометричної інтерпретації задачі (1.1), (1.2), де $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{R}^2$, потрібно побудувати на площині множину $\boldsymbol{X}$ та кілька типових ліній рівня функції $f_0(\boldsymbol{x})$, тобто множин виду

$$\boldsymbol{L}_h(f_0) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : f_0(\boldsymbol{x}) = h\},\ \ h \in \boldsymbol{R}.$$

Пошук глобального розв'язку задачі зводиться до відшукання найменшого числа h^* серед всіх h, для яких лінія рівня $\boldsymbol{L}_h(f_0)$ має непорожній перетин з $\boldsymbol{X}$. При цьому довільна точка $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_{h^*}(f_0) \cap \boldsymbol{X}$ є глобальним розв'язком задачі НП, а число $h^* = f_0^* = f_0(\boldsymbol{x}^*)$ називається її оптимальним значенням.

Розв'язок $\boldsymbol{x}^*$ може лежати як всередині, так і на межі множини $\boldsymbol{X}$.

<u>Приклад.</u> В області, визначеній нерівностями $x + 2y \le 12, \;\; x + y \le 9$,

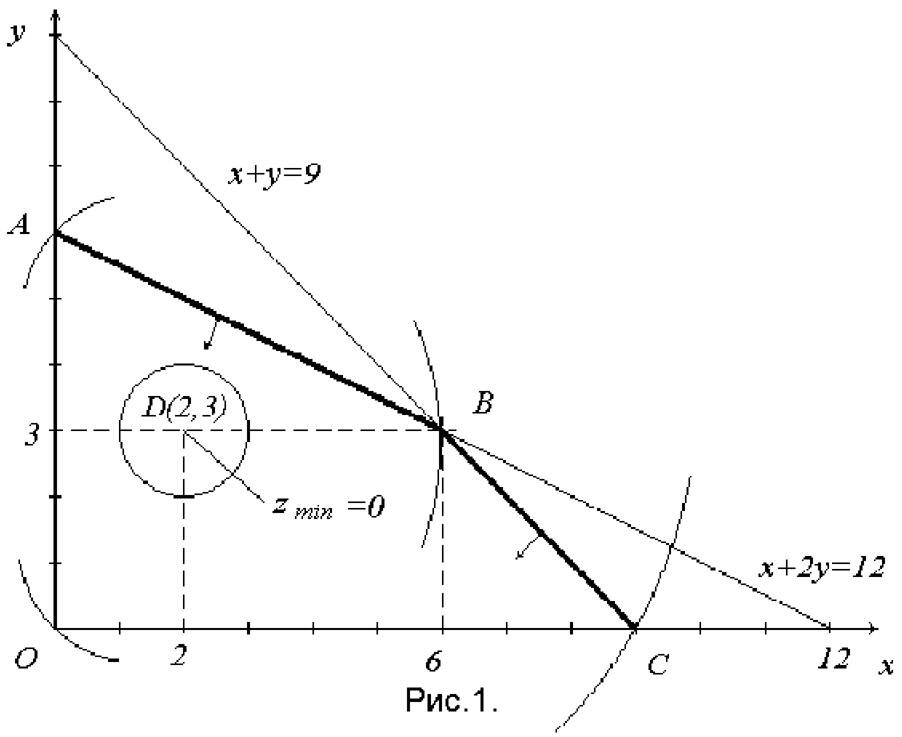

Рис.1.

знайти точки глобальних екстремумів таких нелінійних цільових функцій:

$$1)\; z = (x-2)^2 + (y-3)^2, \;\; 2)\; z = 2(x-5)^2 + (y-7)^2, \;\; 3)\; z = (x-7)(y-1).$$

<u>Розв'язування.</u> Допустима область $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{R}^2$, що є спільною для всіх трьох задач, побудована на Рис.1.

1) Лінії рівня функції $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$ являють собою кола з центром $D(2;3)$ і радіусом $r = \sqrt{z}$, оскільки $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{z})^2$. З рисунка видно, що $z_{\min} = 0$ досягається в точці $D(2;3)$, $z_{\max} = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58$ – в точці $C(9;0)$.

2) Лінії рівня являють собою еліпси (див. Рис.2), що задаються рівнянням

$$\frac{(x-5)^2}{\left(\sqrt{\frac{z}{2}}\right)^2} + \frac{(y-7)^2}{(\sqrt{z})^2} = 1, \; z > 0$$

з півосями $a = \sqrt{z/2}, \; b = \sqrt{z}$ та центром у точці $E(5;7)$.

З геометричної інтерпретації випливає, що $z_{\min}$ відповідає еліпсу, що дотикається до межі допустимої області – відрізка AB у точці F. Подальше зменшення z приведе до ліній рівня, які не мають спільних точок з допустимою

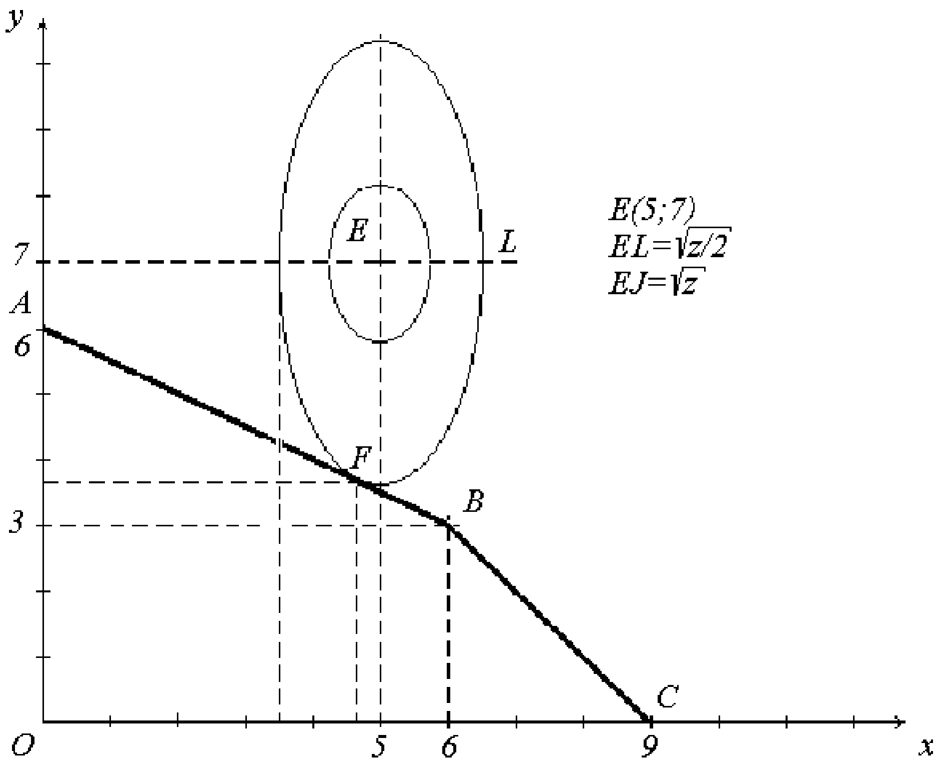

Рис.2.

областю. Тому точка F дотику еліпса до прямої $x+2y=12$ відповідає оптимальному розв'язку задачі мінімізації z на $\boldsymbol{X}$.

Для визначення координат точки F скористаємось рівністю кутового коефіцієнта $k_1=-\dfrac{1}{2}$ прямої $y=-\dfrac{1}{2}x+6$ і кутового коефіцієнта k_2 дотичної до еліпса в точці F. Розглядаючи y як неявну функцію від x, яка задається рівнянням $2(x-5)^2+(y-7)^2-z=0$, за правилом диференціювання неявної функції отримаємо $4(x-5)+2(y-7)y'=0$, звідки маємо

$$y'=-\frac{2(x-5)}{y-7}.$$

Оскільки $k_2=y'$, то прирівнюючи k_1 і k_2, отримаємо рівняння

$$-\frac{2(x-5)}{y-7}=-\frac{1}{2} \text{ або } 4x-y=13.$$

Приєднавши до нього рівняння прямої, на якій лежить точка F, отримаємо систему для визначення координат точки F:

$$\begin{cases} 4x-y=13, \\ x+2y=12, \end{cases}$$

розв'завши яку, знаходимо

$$x_F = \frac{38}{9}, \quad y_F = \frac{35}{9}, \quad z_{\min} = 2\left(\frac{38}{9} - 5\right)^2 + \left(\frac{35}{9} - 7\right)^2 = \frac{98}{9}.$$

Максимум z, як видно з Рис.2, досягається в точці $O(0;0)$. Він рівний $z(0;0) = z_{\max} = 2(0-5)^2 + (0-7)^2 = 99$.

3) Лініями рівня функції $z = (x-7)(y-1)$ є рівносторонні гіперболи,

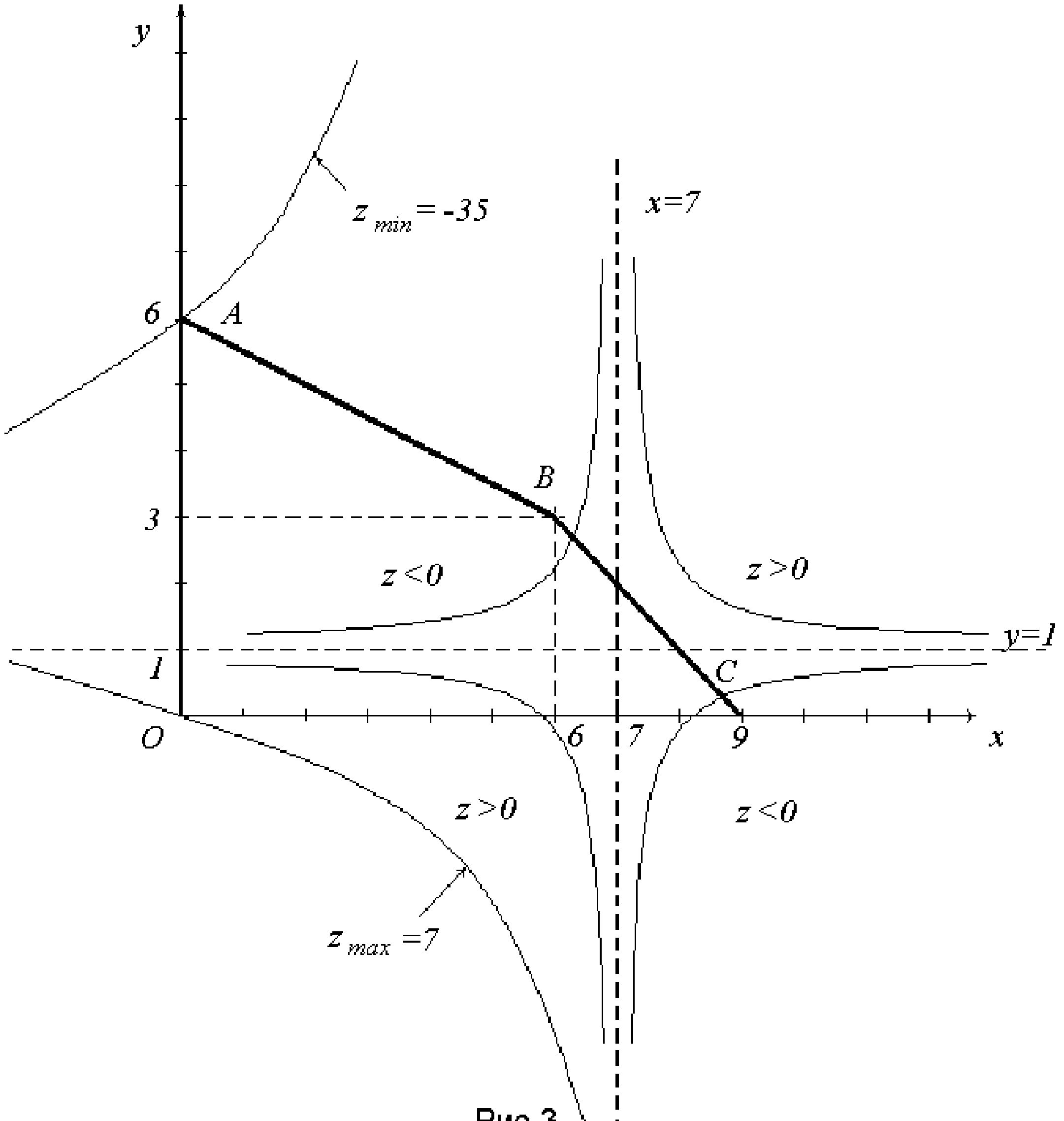

Рис.3.

асимптотами яких є прямі $x = 7$ і $y = 1$ (див. Рис.3), оскільки

$$y = \frac{z}{x-7} + 1, \; z \in \boldsymbol{R}.$$

Якщо умовно вважати асимптоти осями координат, то у точках першого та третього квадрантів відносно цих осей z набуватиме додатних значень, (див. Рис.3). З ростом параметра z за абсолютною величиною гіперболи віддаляються від точки перетину асимптот. Тому найбільше значення z відповідає гіперболі (нижня ліва), яка проходить через точку $O(0;0)$, а найменше – гіперболі (верхня ліва), яка проходить через точку $A(0;6)$.

Отже остаточно отримаємо:

1) $z_{\max} = z(0;0) = 7$ досягається в точці $O(0;0)$;

2) $z_{\min} = z(0;6) = -35$ досягається в точці $A(0;6)$.

2.3. Вправи.

1. Побудувати на площині $\boldsymbol{R}^2$ лінії рівня

$L_h = \{(x,y) : f(x,y) = h\}$, де $h = 0,1,2$,

таких функцій $f(x,y)$:

$а)\ ax + by;\quad б)\ ax^2 + by^2;\quad в)\ ax^2 - by^2;\quad г)\ ax^2 + by;$

$д)\ a|x| + b|y|;\quad е)\ a|x| - b|y|;\quad ж)\ ax^3 + by^3;\quad з)\ axy - bx^3;$

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	2	3	6	4	5	11	3	6	16	1	2
2	3	4	7	5	3	12	6	4	17	8	7
3	5	6	8	3	1	13	7	5	18	5	2
4	7	3	9	4	2	14	1	4	19	6	9
5	9	10	10	8	6	15	8	9	20	5	8

2. Знайти точки глобального максимуму функції $f(x,y) = x^2 + ay^2$ на множині $X = \{(x,y) : |x| + b|y| \le c\}$

№	a	b	c	№	a	в	c	№	a	в	c	№	a	в	c
1	3	2	4	6	5	3	2	11	2	1	3	16	6	2	9
2	1	2	3	7	10	3	4	12	1/2	1	2	17	1	2	4
3	5	2	2	8	1	4	1	13	4/5	1	1	18	5	2	5
4	2	3	4	9	3	4	2	14	12	3	6	19	20	5	10
5	1	3	3	10	20	4	3	15	8	3	4	20	30	5	20

3. Знайти точки глобальних екстремумів функції $f(x,y) = ax^2 - by^2$ на множині $X = \{(x,y) : |x+1| + |y-c| \le 1\}$

№	a	b	c	№	a	в	c	№	a	в	c	№	a	b	c
1	5	2	3/4	6	5	3	1/3	11	6	1	5/2	16	7	3	2/3
2	3	1	1	7	2	1	1/2	12	7	1	3	17	3	2	1/4
3	10	3	7/6	8	7	5	1/5	13	13	5	4/5	18	5	4	1/8
4	5	1	2	9	8	3	5/6	14	9	2	7/4	19	7	2	5/4
5	4	1	3/2	10	11	3	4/3	15	9	7	1/7	20	8	1	7/2

4. Знайти глобальні розв'язки таких задач:

$а) f(x,y) = xy \to \max,\ ax + by = 1,\ a > o,\ b > o;$

$б) f(x,y) = -\ln x + y \to \min,\ x - 2 \le 2,\ x + y^2 \le 4;$

$в) f(x,y) = 2x - y \to \max,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x - y \le 0,\ x + y \le 1;$

$г) f(x,y) = x + \sqrt{y} \to \min,\ x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 = 1;$

$д) f(x,y) = \max\{|x-2|, |y|\} \to \min,\quad 2|x| - |y| \le 2;$

$е) f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 \to \min,\ x^2 + y^2 = 2axy,\ a \in R;$

$ж) f(x,y) = 4x^2 + y^2 \to \begin{bmatrix} \max \\ \min \end{bmatrix}, \quad |x-3| + |y-a| \le 1, \quad a \ge 0.$

2.4. Задача безумовної оптимізації. Умови екстремуму.

Нехай дана задача безумовної мінімізації

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min, \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}. \qquad (4.1)$$

Введемо позначення:

$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \right)$ – вектор перших частинних похідних (градієнт) функції $f(\boldsymbol{x})$ у точці $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$;

$H_f(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}}$ – матриця других частинних похідних (гессіан) функції $f(\boldsymbol{x})$ у точці $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$.

<u>**Теорема 4.1.**</u> (необхідна умова мінімуму першого порядку).

Нехай функція $f(\boldsymbol{x})$ диференційовна в точці $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R^n}$. Тоді, якщо $\boldsymbol{x}^*$ – локальний розв'язок задачі (4.1), то

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0. \qquad (4.2)$$

Точка $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R^n}$, яка задовольняє (4.2) , називається <u>стаціонарною точкою</u> задачі (4.1) і самої функції $f(\boldsymbol{x})$.

<u>**Теорема 4.2.**</u> (необхідна умова мінімуму другого порядку).

Нехай функція $f(\boldsymbol{x})$ двічі диференційовна в точці $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R^n}$. Тоді, якщо $\boldsymbol{x}^*$ – локальний розв'язок задачі (4.1), то матриця $H_f(\boldsymbol{x}^*)$ невід'ємно визначена, тобто

$$\boldsymbol{y^T} H_f(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y} \ge 0 \quad \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R^n}. \qquad (4.3)$$

<u>**Теорема 4.3**</u>. (достатня умова мінімуму другого порядку).

Нехай функція $f(\boldsymbol{x})$ двічі диференційовна в точці $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R^n}$. Тоді, якщо $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$ і матриця $H_f(\boldsymbol{x}^*)$ додатно визначена, тобто

$$\boldsymbol{y^T} H_f(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y} > 0 \quad \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R^n}, \quad \boldsymbol{y} \ne 0, \qquad (4.4)$$

то $\boldsymbol{x}^*$ – строгий локальний розв'язок задачі (4.1).

<u>**Зауваження 4.1**</u>

Якщо в задачі (4.1) замість операції мінімізації розглядати операцію максимізації, то **теорема 4.1** залишається вірною у дослівному формулюванні, а в **теоремах 4.2 і 4.3** потрібно змінити знаки нерівностей на протилежні.

<u>**Зауваження 4.2.**</u>

Теореми 4.1–**4.3** залишаються вірними для задачі мінімізації функції $f(\boldsymbol{x})$ на множині $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{R^n}$, за умови, що $\boldsymbol{x}^*$ є внутрішньою точкою цієї множини ($\boldsymbol{x}^* \in \inf \boldsymbol{X}$).

Зауваження 4.3.

Квадратична форма $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$ є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори матриці $\boldsymbol{A}$, тобто визначники

$$\Delta_i = \det\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1i} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ . \\ a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{ii} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n},$$

додатні; форма $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}$ від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли $(-1)^i \Delta_i > 0, \ \ i = \overline{1,n}$, тобто, коли знаки головних мінорів $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ чергуються, до того ж $\Delta_1 < 0$.

Зауваження 4.4.

Якщо квадратична форма $\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y}$ при $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то в точці $\boldsymbol{x}^*$ функція $f(\boldsymbol{x})$ не має ні локального максимуму, ні локального мінімуму.

Приклад. Нехай у просторі $\boldsymbol{R}^n$ дано m точок $\boldsymbol{x}^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i), \ \ i = \overline{1,m}$. Знайти точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, сума квадратів відстаней якої від даних точок була б мінімальною.

Розв'язування . За умовою потрібно в $\boldsymbol{R}^n$ мінімізувати функцію

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i).$$

Знаходимо її градієнт $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i)$ та записуємо необхідні умови екстремуму

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0 \ \text{ або } \ 2\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i) = 0,$$

звідки отримуємо стаціонарну точку $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i \equiv \boldsymbol{x}^0$. Обчислюємо гессіан $H_f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^0$. Маємо

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 2\sum_{i=1}^{m} (x_j - x_j^i) = 2m x_j - 2\sum_{i=1}^{m} x_j^i,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j} = 2m\delta_{kj}, \ \ k, j = 1, \ldots, n,$$

де δ_{kj} – символ Кронекера $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad k, j = 1, \ldots, n.$

Тоді $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$ маємо $H_f(\boldsymbol{x}) = 2m\boldsymbol{E}$, де $\boldsymbol{E}$ – одинична матриця n–го порядку, і $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R^n}$ $(\boldsymbol{y} \neq 0)$ $\boldsymbol{y^T} H_f(\boldsymbol{x^0})\boldsymbol{y} = 2m\|\boldsymbol{y}\|^2 > 0.$

Оскільки всі головні мінори матриці $H_f(\boldsymbol{x}) = 2m\boldsymbol{E}$ $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$ додатні $(m > 0)$ $\Delta_1 = 2m > 0, \Delta_2 = (2m)^2 > 0,..., \Delta_n = (2m)^m > 0$, то функція $f(\boldsymbol{x})$ є опуклою в $\boldsymbol{R^n}$, і точка $\boldsymbol{x^0}$ є точкою глобального мінімуму $f(\boldsymbol{x})$.

2.5 Вправи.

1. Знайти точку глобального мінімуму функції

$$f(x,y) = ax^2 + 2xy + by^2 - 2x - 3y$$

на площині $\boldsymbol{R}^2$:

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	1	2	6	2	1	11	3	1	16	4	1
2	1	3	7	2	2	12	3	2	17	4	2
3	1	4	8	2	3	13	3	3	18	4	3
4	1	5	9	2	4	14	3	4	19	4	4
5	1	6	10	2	5	15	3	5	20	4	5

2. Знайти точки екстремумів функції $f(x,y) = (ax^2 + by^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$ на площині $\boldsymbol{R}^2$:

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	1	2	6	8	3	11	9	1	16	4	1
2	7	3	7	2	4	12	3	5	17	6	7
3	1	4	8	2	5	13	3	1	18	4	3
4	8	5	9	7	6	14	7	2	19	1	5
5	1	6	10	2	7	15	3	6	20	5	6

3. Знайти точки екстремумів функції $f(x,y) = x^3y^2(ax + by + c)$ на площині $\boldsymbol{R}^2$:

№	a	B	c	№	A	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c
1	-4	-1	1	6	-2	-1	3	11	-5	-1	5	16	-3	-1	7
2	-3	-1	9	7	-4	1	2	12	-1	1	2	17	-2	-1	2
3	-1	-1	3	8	-2	-1	8	13	-1	-1	9	18	-9	1	3
4	-5	-1	4	9	-4	-1	4	14	-3	1	8	19	-2	-1	1
5	-1	-1	7	10	-2	-1	6	15	-4	1	5	20	-2	1	9

4. Знайти точки локальних і глобальних екстремумів таких функцій у всій області їх визначення:

а) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 2z;$

б) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy;$

в) $f(x,y) = (x+y)(x-a)(x-b);$

г) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5;$

д) $f(x,y) = x + y + 4\sin x \sin y;$

$е) f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z;$

$ж) f(x,y,z) = xy^2 z^3 (1 - x - 2y - 3z).$

2.6. Класична задача на умовні екстремуми.

Класичною задачею на умовний екстремум називають задачу мінімізації (або максимізації) функції $f(\boldsymbol{x})$ на множині $\boldsymbol{X}$, яка задається системою скінченого числа рівнянь ("зв'язків"):

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n} : g_i(\boldsymbol{x}) = 0; \ i = \overline{1,m}\}..$$

Будемо розглядати цю задачу у вигляді :

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min , \ g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = \overline{1m}. \qquad (6.1)$$

Розв'язування задачі (6.1) методом виключення змінних.

У деяких деяких випадках можливий такий підхід до розв'язування задачі (6.1). Допустима множина задачі являє собою систему з m рівнянь з n невідомими; при цьому, як правило, $m < n$. Припустимо, що $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{R^m} \times \boldsymbol{R^{n-m}}$ та $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R^{n-m}}$ система

$$g_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0, \ i = \overline{1,m},$$

m рівнянь з m невідомими $u_i, \ i = \overline{1,m},$ має єдиний розв'язок $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$. Тоді задача (4.1) зводиться до задачі безумовної мінімізації

$$F(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}) \to \min , \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R^{n-m}}. \qquad (6.2)$$

Якщо $\boldsymbol{v}^*$ – локальний (глобальний) розв'язок цієї задачі, то очевидно $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}^*),\boldsymbol{v}^*)$ – локальний (глобальний) розв'язок задачі (6.1), і навпаки.

Описаний метод виключення змінних має обмежену область застосування, оскільки вказана вище однозначна функція $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$ існує далеко не завжди.

Більш універсальним є метод Лагранжа, що грунтується на використанні умов екстремуму безпосередньо для задач виду (6.1).

Умови екстремуму.

Введемо функцію Лагранжа задачі (6.1) $L(\boldsymbol{x},y_0,\boldsymbol{y}) = y_0 f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(\boldsymbol{x})$, де $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}, \ y_0 \in \boldsymbol{R}, \ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2,..., y_m) \in \boldsymbol{R}^m$.

Нехай: $\nabla_x L(\boldsymbol{x},y_0,\boldsymbol{y}) = y_0 \nabla f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(\boldsymbol{x})$ – градієнт функції Лагранжа по $\boldsymbol{x}$; $H_L^x(\boldsymbol{x},y_0,\boldsymbol{y}) = y_0 H_f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i H_{g_i}(\boldsymbol{x})$ – гессіан функції Лагранжа по $\boldsymbol{x}$.

Теорема 6.1. (необхідна умова мінімуму першого порядку або принцип Лагранжа).

Нехай функція $f(\boldsymbol{x})$ диференційовна в точці $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R^n}$, функції $g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = \overline{1m},$ неперервно диференційовні у деякому околі цієї точки.

Тоді, якщо $\boldsymbol{x}^*$ – локальний розв'язок задачі (6.1), то існує число y_0^* і вектор $\boldsymbol{y}^* \in \boldsymbol{R}^m$, що не рівні нулю одночасно і такі, що

$$\nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*) = 0. \qquad (6.3)$$

Точка $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X}$ називається **стаціонарною точкою** задачі (6.1), якщо вона задовольняє (6.3) при деяких $y_0^* \geq 0$ і $\boldsymbol{y}^* \in \boldsymbol{R}^m$, не рівних нулю одночасно. При цьому числа $y_0^*, y_1^*, ..., y_m^*$ називають **множниками Лагранжа**, відповідними $\boldsymbol{x}^*$.

Рівність (6.3) разом з умовою $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X}$ утворює систему з $m + n$ рівнянь з $n + m - 1$ невідомими. При цьому завжди можна перейти до системи з $m + n$ невідомими, розглядаючи два випадки: $y_0^* = 0$ і $y_0^* = 1$.

Довільне додаткове припущення про задачу (6.1), що забезпечує в **теоремі 6.1.** випадок $y_0^* \neq 0$, прийнято називати **умовою регулярності**. При наявності такої умови і саму задачу (6.1) називають **регулярною.** Для неї достатньо розглядати лише **регулярну функцію Лагранжа**

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = L(\boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(\boldsymbol{x}).$$

Основними прикладами умови регулярності можуть бути умова лінійної незалежності градієнтів $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \ i = \overline{1m},$ та умова лінійності функцій $g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = \overline{1m},$ тобто $g_i(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{x}) + b_i, \ \ i = \overline{1m},$ де $\boldsymbol{a}^i \in \boldsymbol{R}^n, b^i \in \boldsymbol{R}.$

Теорема 6.2. (необхідна умова умовного мінімуму другого порядку).

Нехай функції $f(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = \overline{1m},$ двічі диференційовні в точці $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^n$. Нехай, окрім того, функції $g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = \overline{1m},$ неперервно диференційовні в деякому околі $\boldsymbol{x}^*$, а їх градієнти $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \ i = \overline{1m},$ лінійно незалежні.

Тоді, якщо $\boldsymbol{x}^*$ – локальний розв'язок задачі (6.1), то

$$\boldsymbol{h^T} H_L^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\, \boldsymbol{h} \geq 0 \text{ при всіх } y_0^* > 0,\ \boldsymbol{y}^* \in \boldsymbol{R}^m \qquad (6.4)$$

що задовольняють (6.3) і всіх таких $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R}^n$, для яких

$$(\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h}) = 0, \ \ i = \overline{1m}. \qquad (6.5)$$

Теорема 6.3. (достатня умова умовного мінімуму другого порядку).

Нехай функції $f(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = \overline{1m},$ двічі диференційовні в точці $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X}$. Тоді, якщо існують такі $y_0^* \geq 0$ і $\boldsymbol{y}^* \in \boldsymbol{R}^m$, що виконується (6.3) і, окрім того,

$$\boldsymbol{h^T} H_L^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\, \boldsymbol{h} > 0 \qquad (6.6)$$

при всіх $\boldsymbol{h} \neq 0$, що задовольняють (6.5), то $\boldsymbol{x}^*$ – строгий локальний розв'язок задачі (6.1).

Умова (6.5) означає, що вектор $\boldsymbol{h}$ ортогональний лінійному підпростору, натягнутому на градієнти $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)$, $i=\overline{1m}$. Тому умову (6.5) називають умовою ортогональності.

По відношенню до теорем 6.1 – 6.3 справедливі такі ж зауваження, як і до теорем 4.1 – 4.5.

Приклад 1. Дослідити умовні екстремуми функції $f(x,y)=(x-2)^2+(y-3)^2$ за умови $x+y=7$ методом виключення змінних.

Розв'язування. З рівняння зв'язку маємо $y=7-x$, звідки

$$z(x)=f(x,y(x))=(x-2)^2+(4-2)^2=2x^2-12x+20.$$

Досліджуємо на безумовний екстремум функцію однієї змінної $z(x)$. Маємо $z'(x)=4x-12$. Функція $z(x)$ має єдину стаціонарну точку x_0, яка є коренем рівняння $z'(x)=0$, або $4x-12=0$, звідки $x_0=3$. Оскільки $z''(x)=4>0$, то $x_0=3$ є точкою глобального мінімуму $z(x)$ при $x\in\boldsymbol{R}$. Інших екстремальних точок функція $z(x)$ не має, оскільки вона не має інших стаціонарних точок, відмінних від x_0. Мінімальне значення функції z рівне $z(x_0)=z(3)=2$.

Отже, функція $f(x,y)$ за умови $x+y=7$ досягає свого мінімального значення $f(x_0,y(x_0))=2$ в точці $(3;4)$.

Приклад 2. Знайти на $\boldsymbol{n}$–вимірній сфері $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R^n}:\|\boldsymbol{x}\|^2=1\}$ точку, сума квадратів відстаней від якої до m даних точок $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\dots,\boldsymbol{x}^m\in\boldsymbol{R^n}$, була б мінімальною.

Розв'язування. Задача зводиться до задачі мінімізації функції

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^i\right\|^2$$

за умови $\|\boldsymbol{x}\|^2=1$, або 1.

Перепишемо задачу у скалярному вигляді:

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^i)^2\to\min,$$

$$g(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}x_k^2-1=0,$$

та складемо її функцію Лагранжа: $L(x,y_0,y_1)=y_0f(\boldsymbol{x})+y_1g(\boldsymbol{x})=$

$$=y_0\sum_{i=1}^{m}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^i\right\|^2+y_1((\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-1)=y_0\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^i)^2+y_1(\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2-1).$$

Запишемо необхідні умови. Маємо: $\nabla_{\boldsymbol{x}}L(x,y_0,y_1)=y_0\nabla f(\boldsymbol{x})+y_1\nabla g(\boldsymbol{x})=$

$=y_0 2\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^i)+y_1 2\boldsymbol{x}=2my_0\boldsymbol{x}-2y_0\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{x}^i+2y_1\boldsymbol{x},$ де $y_0\ge 0$, окрім того можна завжди вважати, що $y_0^2+y_1^2=1$ (умова нормування вектора (y_0,y_1)).

Оскільки точка $x^0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x^i$ є стаціонарною точкою функції $f(x)$ (див. приклад розв’язування задачі безумовної оптимізації), тобто $\sum_{i=1}^{m} x^i = mx^0$, то остаточно отримаємо таку систему необхідних умов умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, y_0, y_1) = 2y_0 m(x - x^0) + 2y_1 x = 0, \\ (x, x) = 1, \\ y_0 \geq 0,\ y_0^2 + y_1^2 = 1. \end{cases}$$

З’ясуємо, чи може бути $y_0 = 0$. Із умови $(x, x) = 1$ випливає, що $x \neq 0$. Тоді, якщо покласти $y_0 = 0$, перше рівняння дає $y_1 = 0$, що суперечить умові про те, що вектор (y_0, y_1) ненульовий.

Отже $y_0 > 0$. Тоді покладемо $y_0 = 1$ і відкинемо умову нормування $y_0^2 + y_1^2 = 1$ вектора (y_0, y_1). Отримаємо

$$\begin{cases} 2mx - 2mx^0 + 2y_1 x = 0, \\ (x, x) = 1. \end{cases} \tag{6.7}$$

З першого рівняння маємо $(m + y_1)x - mx^0 = 0$, тобто $x = \frac{mx^0}{m + y_1}$. Підставляючи цей вираз для x в друге рівняння, отримаємо після нескладних перетворень $m^2 \left\| x^0 \right\|^2 = (m + y_1)^2$, або $m\left\| x^0 \right\| = \left| m + y_1 \right|$. Розглянемо можливі випадки:

1) $m\left\| x^0 \right\| = m + y_1$, тоді $y_1^{(1)} = m\,(\left\| x^0 \right\| - 1)$ і $x^{(1)} = \frac{x^0}{\left\| x^0 \right\|}$, $x^0 \neq 0$;

2) $m\left\| x^0 \right\| = -m - y_1$, тоді $y_1^{(2)} = -m\,(\left\| x^0 \right\| + 1)$ і $x^{(2)} = -\frac{x^0}{\left\| x^0 \right\|}$, $x^0 \neq 0.$

Обчислимо гессіан функції Лагранжа по x в знайдених точках $(x^{(1)}, 1, y^{(1)})$, $(x^{(2)}, 1, y^{(2)})$. Маємо $\forall x \in \boldsymbol{R^n}$ $H_L^x(x, y_0, y_1) = 2mE + 2y_1 E$.

В точці $(x^{(1)}, 1, y^{(1)})$ $H_L^x(x^{(1)}, 1, y_1^{(1)}) = 2mE + 2m(\left\| x^0 \right\| - 1)E = 2m\left\| x^0 \right\| E$. Головні мінори цієї матриці додатні $\Delta_i = (2m\left\| x^0 \right\|)^i > 0,\ i = \overline{1,n}$, тому в точці $x^{(1)}$ функція $f(x)$ має строгий локальний умовний мінімум.

В точці $(x^{(2)}, 1, y^{(2)})$ $H_L^x(x^{(2)}, 1, y_1^2) = 2mE - 2m(\left\| x^0 \right\| + 1)E = -2m\left\| x^0 \right\| E$. Головні мінори цієї матриці змінюють знак: $(-1)^i \Delta_i = (-1)^i(-2m\left\| x^0 \right\|)^i > 0,\ i = \overline{1,n}$ і $\Delta_1 = -2m\left\| x^0 \right\| < 0$, тому в точці $x^{(2)}$ функція $f(x)$ має строгий локальний умовний максимум.

Оскільки X – замкнена обмежена множина і $f(x)$ неперервна на X, то $f(x)$ досягає на ній свого абсолютного мінімуму і абсолютного максимуму. Точки абсолютного максимуму і абсолютного мінімуму повинні бути розв'язками системи (6.7). Оскільки при $x^0 \neq 0$ розв'язків тільки два $x^{(1)}$ і $x^{(2)}$, то $x^{(1)} = \frac{x^0}{\|x^0\|}$ є точкою глобального мінімуму, а $x^{(2)} = -\frac{x^0}{\|x^0\|}$ – точкою глобального максимуму функції $f(x)$ на множині X при $x^0 \neq 0$.

Розглянемо випадок $x^0 = 0$. Тоді система (6.7) набуває виду

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ (m + y_1)x = 0, \\ (x, x) = 1, \end{cases}$$

розв'язками якої є $y_0 = 1$, $y_1 = -m$, x – довільна точка, для якої $\|x\| = 1$. Отже, підозрілими на екстремум є всі точки одиничної сфери.

Розглянемо $\forall x \in X$ (при $x^0 = 0$) значення $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left\| x - x^i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (x - x^i, x - x^i) = \sum_{i=1}^{m} [(x,x) - 2(x,x^i) - (x^i,x^i)] =$$

$$= m - 2(x, \sum_{i=1}^{m} x^i) + \sum_{i=1}^{m} \left\| x^i \right\|^2 = m - 2(x, x^0) + \sum_{i=1}^{m} \left\| x^i \right\|^2 = m + \sum_{i=1}^{m} \left\| x^i \right\|^2 = \mathrm{const}.$$

Отже, при $x^0 = 0$ $f(x) = \mathrm{const}$ на множині X, тобто у всіх точках цієї множини $f(x)$ досягає свого глобального мінімуму (в той же час і максимуму).

2.7. Вправи

1.Знайти глобальний розв'язок задачі $xy^3 \to \max,\ ax + by = c$ спочатку методом виключення змінних, а потім методом Лагранжа:

№	A	b	c	№	a	b	c	№	A	b	c	№	a	b	c
1	2	3	7	6	2	5	6	11	3	1	10	16	6	2	4
2	1	5	8	7	1	4	8	12	1	5	10	17	6	2	8
3	3	1	6	8	3	5	7	13	2	7	10	18	6	2	5
4	4	4	9	9	4	3	6	14	4	4	8	19	8	2	10
5	2	1	6	10	1	6	9	15	4	2	12	20	8	3	11

2. Знайти точки екстремумів функції $f(x,y) = ax + by$ за умови $x^2 + y^2 = c^2$:

№	a	b	c	№	a	b	c	№	A	b	c	№	a	b	c
1	2	-3	5	6	7	2	4	11	-2	-5	5	16	7	4	2
2	4	1	3	7	-2	6	2	12	5	-3	1	17	13	4	1
3	-3	4	2	8	-1	7	5	13	-5	-1	2	18	7	11	6
4	-2	1	1	9	-4	-1	3	14	-7	-1	4	19	9	5	2
5	2	3	4	10	-2	-3	1	15	1	-7	3	20	7	13	7

3. Знайти точки екстремумів функції $f(x,y)=ax^2+2xy+by^2$ за умови $4x^2+cy^2=9$:

№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c
1	1	1	3	6	3	2	2	11	5	8	6	16	7	4	2
2	3	4	5	7	5	4	3	12	5	3	2	17	13	4	1
3	1	1	2	8	3	5	6	13	9	3	1	18	7	11	6
4	1	2	6	9	7	9	5	14	9	7	3	19	9	5	2
5	1	1	1	10	5	2	1	15	3	6	7	20	7	13	7

4. Знайти точки екстремумів таких функцій при вказаних обмеженнях:

а) $f(x,y)=y,\ \ x^3+y^3-3xy=0$;

б) $f(x,y)=x^3+y^3,\ \ ax+by=1,\ \ a>0,\ b>0$;

в) $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+y,\ \ x^2+y^2=a,\ \ a>0$;

г) $f(x,y)=x\sin y,\ \ 3x^2-4\cos y-1=0$;

д) $f(x,y,z)=xyz,\ \ x^2+y^2+z^2=1,\ \ x+y+z=1$;

е) $f(x,y,z)=x+y+z^2+2(xy+yz+zx),\ \ x^2+y^2+z=1$.

2.8 Література.

1. С.А. Ашманов, А.В. Тимохов, Теория оптимизации в задачах и упражнениях, М., “Наука”, 1991г.
2. И.А. Калихман, Сборник задач по математическому программированию, М., “Высшая школа”, 1975г.
3. Ф.П. Васильев, Численные методы решения экстремальных задач, М., “Наука”, 1980г.

Зміст

Навчальне електронне видання

ТЮПТЯ Володимир Іванович
ШЕВЧЕНКО Віталій Іванович
СТРЮК Віктор Кіндратович

“Динамічне та нелінійне програмування”.
Методичні вказівки
до проведення практичних та самостійних занять
з курсу “Дослідження операцій”
для студентів факультету кібернетики