

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Охтеня Іван Олександрович

Гриф
Прим. № _____

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**СТІЙКІСТЬ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО
ПРОФІЛЮ З НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ ФОРМИ**

05.23.17 – будівельна механіка

19 Архітектура та будівництво

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати
власних досліджень.
Використання чужих ідей,
результатів і текстів мають
посилання на відповідне джерело
_____ І.О. Охтеня

Науковий керівник (консультант)
д.т.н, проф. Лук'янченко Ольга
Олексіївна

Київ – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ	12
1.1. Огляд літературних джерел з питання дослідження напружено- деформованого стану і стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю	12
1.2. Сучасні теорії розрахунку тонкостінних стержнів відкритого профілю	17
1.2.1. Безсувна теорія В.З. Власова	17
1.2.2. Напівсувна теорія В.І. Слівкера	22
1.2.3. Зсувна теорія	24
1.3. Чисельні методи розв'язання задач статичної стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю	25
РОЗДІЛ 2. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ДОСЛІДЖЕННЯХ СТАТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ З НЕДОСКОНАЛІСТЮ ФОРМИ	32
2.1 Скінченно-елементне представлення задач статичної в програмному комплексі NASTRAN	33
2.1.1. Крайова задача напружено-деформованого стану твердого деформівного тіла (малі деформації)	33
2.1.2. Крайова задача втрати стійкості твердого деформівного тіла	42
2.1.3. Співвідношення методу скінченних елементів для плоского чотирикутного оболонкового елемента	46
2.2. Чисельні методи розв'язання задачі пружної стійкості та нелінійної задачі статичної стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю	55

2.2.1. Метод розв'язання рівнянь статичної рівноваги твердого деформівного тіла з урахуванням нелінійних членів тензора деформацій	55
2.2.2. Метод розв'язання задачі втрати стійкості твердого деформівного тіла	59
2.2.3. Алгоритми вирішення крайової задачі з урахуванням геометричної нелінійності на основі метода Ньютона-Рафсона	61
2.3. Моделювання геометричних недосконалостей тонкостінних стержнів відкритого профілю	64
3. ТЕСТУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОГО ПІДХОДУ ЩОДО АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ	78
3.1. Тестова задача 1. Дослідження ефективності комп'ютерного моделювання стержнів відкритого профілю у вигляді сукупності плоских скінченних оболонкових елементів	78
3.2. Тестова задача 2. Порівняльний аналіз результатів дослідження стійкості тонкостінного стержня відкритого профілю з результатами інших авторів	85
РОЗДІЛ 4. ОЦІНКА ВПЛИВУ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ НА НЕЛІНІЙНУ ПОВЕДІНКУ І СТІЙКІСТЬ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ	91
4.1. Стійкість стержня відкритого профілю з різними моделями геометричних недосконалостей від дії повздовжньої сили	91
4.2. Дослідження сумісного впливу амплітуди геометричних недосконалостей та ексцентриситету прикладання повздовжньої сили на стійкість тонкостінного стержня відкритого профілю	96
ВИСНОВКИ	111

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	113
ДОДАТКИ	131
Додаток А. Довідки про впровадження результатів дисертаційної роботи Охтеня І.О.	132

ВСТУП

Актуальність теми. В практиці сучасного будівництва у якості несучих елементів металоконструкцій широке застосування набули холодногнуті стержні відкритого профілю. Вони поєднують у собі економічно ефективні вагові характеристики, високі технологічні якості і мають переваги при виготовленні, монтажі та експлуатації. За оцінками сучасних дослідників [102] їх використання дозволяє зменшити металоємність конструкцій на 15-20% у порівнянні з аналогічними конструкціями з прокатного металу. Але головною перевагою таких конструкцій є їх технологічність: вони дозволяють швидко монтувати конструкції без використання великих вантажопідйомних механізмів, зварювальних робіт та «мокрих» процесів. На даний час в Україні і світі з тонкостінних профілів виготовляють широкий спектр будівельних конструкцій [4, 51, 60, 87, 90, 96]: несучі і фахверкові колони, одно- і двускатні ферми, балки покриття, стінові і покрівельні прогони, рамні конструкції [16, 51], мостові конструкції [14] та ін. Ще однією значною перевагою даного типу конструкцій є простота заводського виготовлення, яка вимагає відносно невеликих затрат на запуск виробництва. Таким чином, тонкостінні холодногнуті стержні є перспективним типом конструктивних елементів, який можна масово застосовувати для швидкого зведення або відновлення громадських будівель, житлових будинків, об'єктів інфраструктури.

На відміну від стержнів суцільного перерізу тонкостінний стержень представляє собою множину тонких пластин малої згинальної жорсткості, що утворюють профіль стержня. При дії на такі стержні поперечних та поздовжніх навантажень відбувається суттєва поперечна деформація цих пластин, що може призвести до закручення стержня. Ці особливості необхідно враховувати при розрахунках таких конструкцій.

Одним з піонерів в дослідженні холодногнутих профілів є G. Winter. Він розглядав різні аспекти їх поведінки, зокрема тенденцію до місцевої втрати стійкості через тонкостінність елементів [166]. Значний внесок у теорію згину, кручення та випучування тонкостінних стержнів зробив С.П. Тимошенко [91]. Специфічні особливості тонкостінних стержнів відкритого профілю, які полягають у виникненні додаткових поздовжніх нормальних напружень, не розглядались в теорії чистого кручення. Першою роботою, в якій висвітлено ці особливості вважається книга В.З. Власова «Тонкостінні пружні стержні» [17]. В.З. Власов ввів секторіальні характеристики поперечного перетину стержня з урахуванням його депланації та новий силовий фактор – бімомент. В подальшому теорія тонкостінних стержнів відкритого профілю була розвинена та доповнена в роботах А.А. Уманського [99, 100], В.В. Болотіна [13], А.С. Вольміра [19], О.А. Іллюшина [45], Yu Wei-wen [167], Ф. Блейха [12], Б.Г. Гальоркіна [23], В.Ю. Аскіназі [3], Т.В. Назмеєва [63], А.О. Кікотя [47, 48], G. Simitses [158, 159], M. Pala [153, 154], D. Dubina [120-127], О.Р. Тусніна [95-97], С.В. Ракши [76], І.В. Каменських [143], В.О. Рибаківа [79], Д.О. Советнікова [86, 87], В.В. Юрченко [102] та інших дослідників. Виникли теорія зсуву та напівзсувна теорія В.І. Слівкєра, яка широко використовується у практичних розрахунках. Значна увага в багатьох дослідженнях приділена проблемі стійкості холодногнутих профілів, визначенню критичних значень навантажень та відповідних форм втрати стержнів.

Комп'ютерне моделювання будівельних конструкцій з використанням методів механіки деформівного твердого тіла, математичної фізики і будівельної механіки дозволило зробити перехід від вузькоорієнтованих аналітичних підходів до чисельних методів розв'язання задач стійкості складних тонкостінних стержневих конструкцій в нелінійній постановці. В сучасних програмних комплексах SCAD [72, 74], LIRA [27], ANSYS [64], NASTRAN [43, 78, 101], PANDA2 [112] та інших широке застосування набув метод скінченних елементів.

Для моделювання тонкостінних стержневих конструкцій на даний час в основному використовують бістержневу модель А.В. Перельмутера і В.І. Слівкера [72], оболонкові скінченні елементи та плоскі скінченні елементи з додатково введеним зв'язком.

Відомо, що наявність недосконалостей форми реальних тонкостінних стержнів, які виникають на стадії виготовлення, транспортування і експлуатації, значно знижують їх несучу здатність. Основи розрахунку стійкості тонкостінних стержнів з урахуванням початкових недосконалостей закладено в роботі L. Donnell і C. Wan [39]. Дослідження несучої здатності тонкостінних стержнів з геометричними недосконалостями виконано в роботах S.Y. Lu, W. Nash [149] та L.H.N. Lee [146], J. Arbocz [106], J.W. Hutchinson [139], G. Simitses [158, 159], Г.Д. Гавриленко [20-22], N. Tsouvalis [161, 162], М.Д. Корчака [53], В.А. Баженова [6], Є.О. Гоцуляка [29, 30], В.І. Слівкера [72, 84], D. Dubina [120-127], Ю.М. Муляра [61], О.О. Лук'янченко [58, 59] та інші. Незважаючи на велику кількість досліджень, на теперішній час не існує глибокого аналізу впливу виду і амплітуди недосконалостей на форми втрати стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю та відповідні критичні значення навантаження.

Актуальність теми обумовлена необхідністю забезпечити міцність і стійкість складних стержневих конструкцій з холодногнутих профілів та обґрунтувати нормативні граничні відхилення, що наведені в ДСТУ 8806:2018 [34], ДСТУ 8808:2018 [35] та ДСТУ 9233:2023 [36].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) та Науково-дослідного інституту будівельної механіки (НДІБМ КНУБА). Дослідження проведені в межах науково-дослідної роботи, що виконувалась за напрямком 05 – «Нові комп'ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України:

ЗДБ-2008 «Теоретичні основи та методики дослідження стійкості та руйнування просторових тонкостінних конструкцій пружних систем» (2008-2010 рр. № держ. реєстрації 0108U000230);

4ДБ-2022 «Створення теорії і методів дослідження вібраційних процесів у складних деформівних системах при експлуатаційних навантаженнях періодичного, стохастичного та ударного характеру» (№ держ. реєстрації 0122U001336).

Автор брав участь у виконанні перелічених науково-дослідних робіт як співвиконавець (додаток А).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є створення чисельної методики для розв'язання проблеми стійкості тонкостінних пружних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми при дії статичних навантажень методами обчислювальної механіки та обґрунтування граничних відхилень, затверджених нормативними документами: ДСТУ 8806:2018, ДСТУ 8808:2018 та ДСТУ 9233:2023..

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

- розробка нової чисельної методики дослідження нелінійного деформування і стійкості тонкостінних пружних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми при дії статичних навантажень;

- розробка ефективного алгоритму комп'ютерного скінченно-елементного моделювання тонкостінних стержнів відкритого профілю у вигляді сукупності плоских оболонкових елементів зі змодельованими недосконаlostями форми;

- дослідження стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з ідеальною поверхнею в лінійній постановці з метою моделювання геометричних недосконаlostей у вигляді біфуркаційних форм втрати стійкості різної амплітуди;

- дослідження в геометрично нелінійній постановці напружено-деформованого стану та стійкості недосконалих тонкостінних стержнів відкритого профілю з метою побудови залежності критичних значень

навантаження від амплітуди недосконалостей та отримання форм деформування стержнів при втраті стійкості;

- оцінка впливу моделі недосконалості на стійкість стержнів відкритого профілю з різними граничними умовами та видами навантаження;

- дослідження сумісного впливу амплітуди початкових недосконалостей та ексцентриситету прикладання сил на нелінійне деформування і стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю реальних конструкцій.

- обґрунтування достовірності та ефективності розробленої чисельної методики.

Об'єктом дослідження є процеси нелінійного деформування та втрати стійкості стержнів відкритого профілю з недосконалостями форми.

Предметом дослідження є критичні значення навантажень, біфуркаційні форми втрати стійкості і форми деформування в граничному стані стержнів відкритого профілю, деформації, еквівалентні напруження.

Методи дослідження. На основі принципу можливих переміщень Лагранжа, який чисельно реалізований за допомогою методу скінченних елементів, сформовані рівняння рівноваги тонкостінних стержнів відкритого профілю в загальній системі координат. Із застосуванням процедур програмного комплексу NASTRAN та спеціально створеної програми згідно розробленого алгоритму виконано комп'ютерне моделювання геометричних недосконалостей стержнів відкритого профілю у вигляді різних біфуркаційних форм втрати стійкості з варіюванням амплітуд. Методом Ланцоша розв'язана задача стійкості тонкостінних стержнів з ідеальною поверхнею в лінійній постановці для отримання критичних значень навантаження та відповідних біфуркаційних форм втрати стійкості. За допомогою розв'язання геометрично нелінійної задачі статички методом Ньютона-Рафсона досліджено нелінійне деформування і стійкість недосконалих тонкостінних стержнів відкритого профілю зі змодельованими недосконалостями форми при різних граничних умовах і видах статичного навантаження.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у чисельній реалізації методу скінченних елементів в задачах нелінійного деформування і стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми. При цьому:

1. Розроблена нова чисельна методика дослідження нелінійного деформування і стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю зі змодельованими недосконаlostями форми.

2. Вперше створено ефективний алгоритм комп'ютерного скінченно-елементного моделювання тонкостінних стержнів відкритого профілю зі змодельованими недосконаlostями у вигляді різних форм їх втрати стійкості і амплітуди при дії статичних навантажень з використанням процедур програмного комплексу NASTRAN та спеціально створеної програми.

3. Досліджена стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю з ідеальною поверхнею в лінійній постановці з метою моделювання геометричних недосконаlostей у вигляді біфуркаційних форм втрати стійкості різної амплітуди.

4. Досліджено в геометрично нелінійній постановці напружено-деформований стан та стійкість недосконалих тонкостінних стержнів відкритого профілю з метою побудови залежності критичних значень навантаження від амплітуди недосконаlostей та отримання форм деформування стержнів при втраті стійкості.

5. Вперше оцінено вплив моделі та амплітуди геометричних недосконаlostей на стійкість стержнів відкритого профілю з різними умовами та видами статичного навантаження.

6. Отримані нові результати дослідження сумісного впливу амплітуди початкових недосконаlostей та ексцентриситету прикладання сил на нелінійне деформування і стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю реальних конструкцій.

Достовірність результатів обґрунтовується строгістю математичних перетворень, узгодженням чисельних результатів з результатами інших

авторів, збіжністю результатів в залежності від числа невідомих скінченно-елементної моделі та точності розв'язання системи рівнянь.

Практичне значення одержаних результатів полягає у створенні чисельної методики розв'язання актуальної науково-технічної проблеми будівельної механіки з дослідження нелінійного деформування і стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми, що дозволяє забезпечити їх безаварійну експлуатацію та обґрунтувати граничні відхилення, які затверджені нормативними документами: ДСТУ 8806:2018, ДСТУ 8808:2018 та ДСТУ 9233:2023.

Представлена чисельна методика використана в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при виконанні науково-дослідних робіт за дорученням Міністерства освіти і науки України та при виконанні робіт при складанні Технічного висновку при обстеження та оцінці технічного стану тонкостінних конструкцій покрівлі по проекту «Влаштування дахової сонячної електростанції на покрівлі виробничої будівлі «Цех розливу в скляні банки» по вул. Богатирській, 3, літера «М» в м. Києві».

Особистий внесок здобувача. Основні результати та положення, які становлять суть (зміст) дисертації, отримані автором самостійно. В публікаціях і роботах, підготовлених у співавторстві, викладені такі результати, що належать автору: огляд літературних джерел з питань сучасного стану проблеми [2,6]; алгоритм та реалізація комп'ютерного скінченно-елементного моделювання тонкостінних стержнів відкритого профілю з геометричними недосконаlostями у вигляді різних форм втрати стійкості (загальної, місцевої, депланації) при статичній дії поздовжніх і поверхневих навантажень [1, 3, 4, 5, 6, 8, 9]; порівняльний аналіз результатів, отриманих згідно наведеної чисельної методики, з результатами досліджень інших авторів [2]; розв'язки практичних задач з оцінки впливу недосконаlostей форми стержнів відкритого профілю на критичні значення навантаження та форми втрати стійкості [1, 3, 4, 5, 7].

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи та отримані в ході її виконання результати доповідались та обговорювались на вітчизняних та міжнародних наукових конференціях:

«Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА» (Київ, 17-19 жовтня 2006 р.).

«68-а – 71-а Науково-практичні конференції КНУБА» (Київ, 2007-2010 рр.).

«XXVII International Scientific and Practical Conference «Multidisciplinary academic research and innovation»» (May 25-28, 2021, Amsterdam, Netherlands).

«Міжнародна мультидисциплінарна наукова інтернет-конференція «Світ наукових досліджень»» (16-17 лютого 2023 р., м.Тернопіль, Україна – м.Переворськ, Польща).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась на міжкафедральному семінарі КНУБА (м. Київ, 2023).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 9 наукових працях, серед яких: 2 статті у науково фаховому виданні України, яке включене до міжнародних науково-метричних баз, 4 статті у науково фахових виданнях і 3 публікації матеріалів міжнародних і вітчизняних конференцій.

Подяки. Автор вважає за необхідне виразити глибоку подяку доктору технічних наук, професору Гоцуляку Євгенію Олександровичу та науковому керівнику доктору технічних наук, професору, провідному науковому співробітнику Науково-дослідного інституту будівельної механіки Лук'янченко Ользі Олексіївні.

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

1.1. Огляд літературних джерел з питання дослідження напружено-деформованого стану і стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю

Перша теоретична постановка задачі стійкості центрально стиснутих стержнів належить Л. Ейлеру [129], який у 1757 році використав лінійний підхід і статичний критерій. Згідно нього, критичне навантаження визначалось як найменше навантаження, при якому одночасно з вихідною формою рівноваги стержня можлива і суміжна. Л. Ейлер вивів формулу “сили колони”, ще відому як “формула Ейлера”: $P = \pi B / 4l$, де l – довжина консольного стержня навантаженого поздовжньою силою на кінці, B – згинальна жорсткість стержня.

У 1770 році Ж. Лагранж розв’язав точне рівняння в рядах для випадку опертого на кінцях стержня, отримавши залежність між силою, амплітудою прогину та довжиною стержня [55]. У 1884 році Ж. Галфан [134] вивів рівняння критичної сили консолі і показав, що при критичній силі прогин стержня дорівнює нулю. В 1855 році Сен-Венан розробив теорію кручення призматичного стержня [83] і встановив, що у некруглих стержнях, які розкріпленні в’язями, виникає згинальне чи стиснене кручення і в стержні з’являються додаткові нормальні напруження. Подібні явища також пізніше були відмічені у роботах С. Вах [108].

Лабораторні дослідження стійкості стержнів вперше були проведені П. Мушенбреком у 1729 році [150], який зробив висновок, що критична сила обернено пропорційна квадрату довжини стержня. А. Дюкло [128], провівши випробування на стиск довгих тонких сталевих стержнів, підтвердив справедливість формули Ейлера для випадку вільного обертання кінців

стержнів. Експериментальними дослідженнями також займалися І. Баушингер [109], А. Консидер [115], Л. Тетмаєр [160] та ін.

Формула Ейлера придатна для стержнів великої гнучкості, яка більша за граничну $\lambda \geq \lambda_{зр}$, при умові, що стержень зазнає пружної втрати стійкості. Якщо критичні напруження перевищують межу пропорційності матеріалу $\sigma_{кр} \geq \sigma_{зр}$ і гнучкість менша за граничну $\lambda \leq \lambda_{зр}$, то тіло зазнає пружно-пластичного деформування. Некоректність застосування формули Ейлера для стержнів малої та середньої гнучкості підтверджена експериментально [137].

У 1909 році Ф.С. Ясинський [104] на основі обробки та узагальнення результатів Л. Тетмаєра [160] запропонував емпіричну формулу для визначення критичних напружень стержня при осьових навантаженнях, які перевищують границю пропорційності: $\sigma_{кр} = a - b\lambda$, де коефіцієнти a і b залежать від матеріалу, визначаються експериментально та наводяться в довідниках, наприклад [75]. Формула Ф.С. Ясинського застосовується при напруженнях, які не перевищують межу текучості матеріалу (рис 1.1).

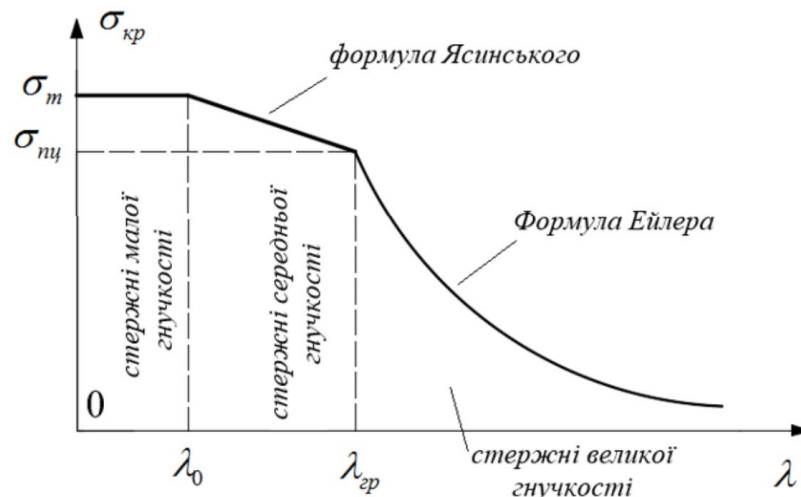


Рис. 1.1. Діаграма залежності критичного напруження від гнучкості стержня.

Значний внесок у теорію згину, кручення та випучування тонкостінних стержнів зробив ученик Ф.С. Ясинського – С.П. Тимошенко. Однією з

ключових проблем, якою він займався, була проблема втрати стійкості стиснених стержнів і пластин [91]. Його робота в цій області привела до розробки та удосконалення методів визначення критичних навантажень та форм деформацій стержня. Важливим було впровадження С.П. Тимошенком енергетичного методу [92]. Його підхід до використання принципу мінімуму потенційної енергії до розрахунку деформацій і напружень у пружних тілах став основою для ряду сучасних методів розрахунку.

У 1909 році С. Vach [108] провів експериментальні дослідження сталеві балки С-подібного перерізу і встановив, що вертикальне навантаження, яке проходить через її центр ваги, викликає деформацію кручення. С. Vach ввів поняття центра згину стержня як точку врівноваження сумарного моменту рівнодійних елементарних дотичним напружень.

Специфічні особливості тонкостінних стержнів відкритого профілю, які полягають у виникненні додаткових поздовжніх нормальних напружень, не розглядались в теорії чистого кручення. Першою роботою, в якій висвітлено ці особливості, вважається книга В.З. Власова «Тонкостінні пружні стержні» [17]. Автор запропонував класифікацію розрахункових схем основних елементів конструкцій за просторовою ознакою і відніс тонкостінні стержні до окремого четвертого класу. Грунтуючись на ряді гіпотез, В.З. Власов побудував математичну модель стержня з введенням секторіальних характеристик поперечного перерізу стержня та нового силового чинника – бімомента з урахуванням депланації. Власов також виявив і описав ефект закручування тонкостінного стержня від дії поздовжнього навантаження.

Вивченням тонкостінних стержнів займався О.А. Уманський [99, 100], який у 1939 році висунув гіпотезу про те, що поздовжні переміщення точок стержня в результаті депланації пропорційні переміщенню точок стержня при вільному крученні. Методика Уманського дає можливість виконувати розрахунки стержнів замкнутого профілю.

Одним з піонерів в дослідженні холодногнутих профілів є G. Winter. Він розглядав різні аспекти їх поведінки, зокрема тенденцію до місцевої втрати стійкості через тонкостінність елементів, що висвітлена у статті 1947-го року «Strength of thin steel compression flanges» [166]. Його роботи допомогли формулюванню критеріїв і методик оцінки стійкості таких елементів, які стали основою для стандартів та практики проектування як вітчизняних, так і закордонних. G. Winter також наголошував на важливості врахування виробничих деформацій (недосконалостей) та напружень, що виникають під час холодного формування, і їх впливу на стійкість елементів.

Значний внесок у розробку методів визначення міцності тонкостінних сталевих елементів з урахуванням їх пластичності зробив В.В. Болотін. Однією з його найважливіших робіт в цій області є праця 1961-го року "Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости" [13], де він розглянув та формалізував принципи пластичної міцності тонкостінних конструкцій. У цій роботі В.В. Болотін розробив концепцію та методику оцінки міцності тонкостінних сталевих елементів з урахуванням можливості пластичних деформацій та сформулював поняття "порогового стану" для тонкостінних елементів як стану, при якому починають виникати пластичні деформації. В.В. Болотін показав, що визначення міцності має враховувати не лише критичне навантаження, при якому конструкція руйнується, але й стан, при якому починають розвиватися пластичні деформації. Це дозволило більш точно прогнозувати поведінку конструкцій та їх міцність при різних умовах навантаження.

Виданим вченим, роботи якого вважаються основоположними в сфері теорії стійкості тонкостінних конструкцій, є А.С. Вольмір. Його дослідження [18, 19] не тільки розширили існуючу теорію, але й допомогли покращити практику проектування. У своїх роботах він вивчав взаємодію різних видів втрати стійкості (наприклад, місцевої та загальної), що є важливим для розуміння загальної поведінки конструкцій. Також А.С. Вольмір займався питаннями початкових напружень та початкових геометричних

недосконалостей в сталевих елементах, що виникають в результаті їх виробництва, та вплив текучості на критичні навантаження.

У 1948 році О.А. Іллюшин розробив математичні моделі пластичного деформування, які стали основою для аналізу непружного відгуку тонкостінних стержнів під час навантаження [45]. Його підходи були зокрема важливі для вивчення явища пластичної втрати стійкості та внесли вклад у розуміння взаємодії між пружними та пластичними деформаціями, що є ключовим аспектом аналізу стійкості тонкостінних стержнів.

Теорія тонкостінних стержнів також була розвинута та доповнена в роботах Yu Wei-wen [167], Ф. Блейха [12], G. Simitses [158, 159], M. Pala [153, 154], D. Dubina [120-127], А.І. Голованова [25, 26], В.В. Юрченко [102, 103] та інших дослідників. В.В. Юрченко та А.В. Перельмутер в своїй книзі [102] провели детальний аналіз наявних досліджень та сучасних методик визначення несучої здатності стержневих елементів з холодногнутих профілів.

На теперішній час крім теорії В.З. Власова існують інші теорії розрахунку тонкостінних стержнів відкритого профілю: теорія зсуву і напівзсувна теорія В.І. Слівкера [84]. Теорія зсуву враховує в повному обсязі деформації зсуву у виразі функціонала енергії деформації стержня і дає змогу оцінити міцність тонкостінного стержня відкритого профілю, але є складною в прикладному застосуванні. Напівзсувна теорія В.І. Слівкера враховує частину деформацій зсуву в серединній поверхні стінок стержнів, викликаних дією секторіальних сил. Вона має переваги над теорією Власова, бо може застосовуватись до тонкостінних стержнів різних профілів та комбінованих стержневих конструкцій. Напівзсувна теорія детально описана у роботах С.Ф. Дьякова [40] та В.О. Рибаківа [80].

Вплив геометричних і фізичних характеристик стержнів відкритого профілю, граничних умов, ексцентриситету прикладання зовнішніх сил на критичні значення навантаження та форми втрати стійкості тонкостінних стержнів досліджено у роботах: Г.Ю. Джанелідзе [37], В.Ю. Аскіназі [3],

Э.Л. Айрумьяна [2], Т.В. Назмеева [63], Г.И. Белого [7-11], А.О. Кікота [47, 48], С.В. Ракши [76], Д.О. Советнікова [86, 87], G. Giunta [132, 133] та інших.

1.2. Сучасні теорії розрахунку тонкостінних стержнів відкритого профілю

Як зазначалося вище, на теперішній час існують три основні теорії розрахунку тонкостінних стержнів відкритого профілю:

- Безсувна теорія В.З. Власова.
- Напівзсувна теорія В.І. Слівкера.
- Зсувна теорія.

1.2.1. Безсувна теорія В.З. Власова

Безсувна теорія тонкостінних стержнів була розроблена і запропонована В.З. Власовим у 1936 році [17]. Для опису напружено-деформованого стану були введені нові характеристики поперечного перерізу стержня, новий силовий фактор – бімомент та новий вид деформації – депланація.

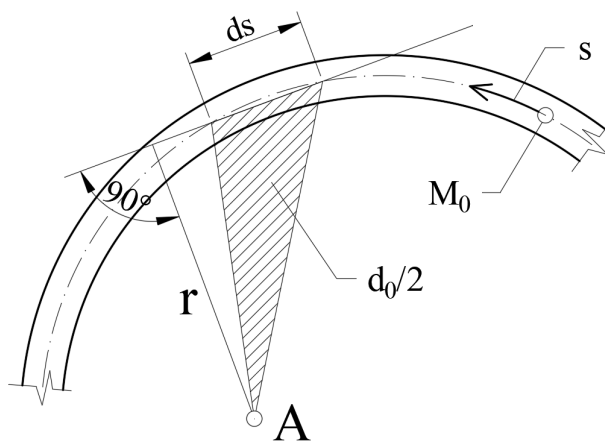


Рис. 1.2. Визначення секторальної площі.

Головною, серед запропонованих В.З. Власовим, геометричною характеристикою поперечного перерізу стержня є секторіальна площа

$$\omega(s) = \int_{M_0}^M r ds \quad (1.1)$$

де ω – секторіальна площа стержня;

M_0 – початок відліку координати s , який приймається довільно;

M – кінцева точка на поперечному перерізі тонкостінного стержня;

r – див. рис. 1.2.

Новий силовий фактор – бімомент є парою моментів протилежного знаку, що діють у поперечному перерізі тонкостінного стержня. Особливість бімомента полягає в тому, що його неможливо обчислити за рівняннями статки. Введення цього силового фактору тягне за собою необхідність розгляду відповідного нового виду деформації стержня – депланації. Депланацією вважається переміщення точок тонкостінного стержня, при якому його плоский поперечний переріз переходить у криву поверхню.

У теорії В.З. Власова для тонкостінного стержня відкритого профілю приймаються деякі гіпотези, до яких відносяться:

1. *Гіпотеза незмінності контуру*: поперечний переріз тонкостінного стержня залишається незмінним у власній площині, тобто поперечний переріз є недеформованим.

Поперечний переріз стержня вважається абсолютно жорстким тілом, отже профіль у поперечному перерізі має тільки три ступеня вільності: два трансляційних зсуву точки і кут обертання відносно цієї точки. Використання цієї гіпотези дає достатньо достовірні результати для тих стержнів, конструктивні особливості яких перешкоджають деформаціям у площині перерізу. Наприклад, це можна забезпечити підсиленням стержня поперечними діафрагмами жорсткості.

2. *Гіпотеза безмоментності стержня*: нормальні напруження в поздовжньому напрямку стержня вважаються рівномірно розподіленими по товщині стінки.

Згідно з гіпотезою про безмоментність стержня нормальні напруження в поздовжньому напрямку визначаються за формулою

$$\sigma^x = \sigma(x, s) \quad (1.2)$$

$$\sigma^x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (1.3)$$

де σ^x – нормальне напруження у поперечному перерізі;
 N – поздовжня сила;
 A – площа поперечного перерізу стержня;
 M_y, M_z – згинальні моменти в двох перпендикулярних площинах;
 I_y, I_z – моменти інерції поперечного перерізу;
 B – бімомент;
 I_ω – секторіальний момент інерції;
 y, x – відповідні координати.

3. *Гіпотеза ненадавлювання поздовжніх волокон тонкостінного стержня*, тобто $\sigma_x = \sigma_y = 0$.

Згідно з гіпотезою через малість σ^n, σ^s ними можна нехтувати при формулюванні закону Гука, тобто

$$\sigma^x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.4)$$

де E – модуль пружності матеріалу;
 u – переміщення в поздовжньому напрямку стержня;
 ε_x – поздовжня деформація;
 x – поздовжня координата;

а згідно з гіпотезою про відсутність зсувів $u = \epsilon - \eta'y - \xi'z - \theta'\omega$, вираз (1.2) можна записати:

$$\sigma_x = E\epsilon - E\eta''y - E\xi''z - E\theta'\omega \quad (1.5)$$

де штрихом позначена похідна по координаті x .

4. *Гіпотеза про рівномірний розподіл дотичних напружень, що діють по товщині стінки тонкостінного стержня.*

Дотичні напруження в перерізах стержня τ^{xs} спрямовані дотично до профільної лінії і можуть бути представлені у вигляді

$$\tau^{xs} = \tau + \tau_k; \quad (1.6)$$

де τ – стале середнє дотичне напруження по товщині стінки;
 τ_k – напруження чистого кручення.

Ця гіпотеза базується на розділенні переміщень точок поперечного перерізу стержня у напрямку поздовжньої осі на дві складові: ті, які підкоряються закону плоскості і на чисто депланаційні переміщення.

$$w = A + Bx + Cy + w_d \quad (1.7)$$

де w_d – поздовжнє переміщення депланації, яке залежить від секторіальної площі і координати поперечного перерізу стержня;

A, B, C – параметри переміщення для кожного поперечного перерізу стержня.

Всі перераховані вище основні гіпотези справедливі для поперечних перерізів стержнів як для відкритого, так і закритого профілю (А.О. Уманський [99, 100]).

Нормальні напруження тонкостінного стержня

$$\sigma^x = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x - E\beta''\bar{\omega} \quad (1.8)$$

Система диференціальних рівнянь рівноваги тонкостінного стержня відкритого профілю згідно теорії Власова має вигляд

$$\begin{cases} EA\zeta'' = 0 \\ -EI_y\xi^{IV} + q_x = 0 \\ -EI_x\eta^{IV} + q_y = 0 \\ -EI_\omega\Theta^{IV} + GI_d\Theta'' + m_x - m'_B = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

де EA – жорсткість на стиск;

EI_y, EI_x – жорсткість на згин;

EI_ω – жорсткість на депланацію;

GI_d – жорсткість на кручення;

q_x, q_y, q_z, m_x – розподілені по довжині зовнішні силові фактори: силові навантаження вздовж осей x, y, z , а також згинальний момент відносно осі x ;

m'_B – розподілений по довжині зовнішній бімомент;

ζ, ξ, η – функції переміщення: поздовжня вздовж осі x і поперечна вздовж осей z і y .

Диференційне рівняння рівноваги стержня в переміщеннях згідно теорії Власова має вигляд

$$-EI_{\omega}\theta^{IV} + GI_d\theta' + m_x - m'_B = 0 \quad (1.10)$$

Функціонал енергії деформації тонкостінного стержня відкритого профілю визначається за формулою

$$E = \int_0^L \left[\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{B^2}{2EI_{\omega}} + \frac{H^2}{2GI_z} \right] dx \quad (1.11)$$

де M_y, M_x – згинальні моменти;

M_{ω} – момент стисненого кручення;

H – момент чистого кручення;

G – модуль здвигу.

1.2.2. Напівзсувна теорія В.І. Слівкера

В теорії В.З. Власова в якості основних компонентів напружень прийняті нормальні напруження σ_x і кососиметричні дотичні напруження від чистого кручення τ_x . В.І. Слівкер запропонував проміжну теорію, в якій до основних напружень відносять, окрім нормальних, дотичні напруження кручення τ_x і τ_{ω} .

Теорія В.І. Слівкера порівняно з теорією В.З. Власова має три основні переваги:

- обчислення невідомих функцій переміщень є більш точним у зв'язку з урахуванням частини деформацій зсуву в серединній поверхні стінок стержнів;

- є більш простою з точки зору реалізації у методі скінченних елементів, оскільки функції переміщень (кручення і депланація) є незалежними;
- напівзсувна теорія підходить для стержнів як відкритого так і закритого профілів.

Система диференціальних рівнянь рівноваги тонкостінного стержня відкритого профілю згідно напівзсувної теорії В.І. Слівкера має вигляд

$$\begin{cases} -EI_{\omega}\beta'' + \frac{r^2GA}{\mu_{\omega\omega}}(\theta' - \beta) = 0 \\ GI_d\theta'' + \frac{r^2GA}{\mu_{\omega\omega}}(\theta'' - \beta') = m_x - m'_B \end{cases} \quad (1.12)$$

Диференціальне рівняння рівноваги в переміщеннях має вид

$$\psi EA_{\omega}\beta''' - GI_d\beta' = m_x + \psi m'_B \quad (1.13)$$

де $\psi = 1 + \frac{\mu_{\omega\omega}I_d}{I_r}$

$$\mu_{\omega\omega} = \frac{I_r}{I_{\omega}^2} \int_{(l)} \frac{S_{0\omega}^2}{\delta} ds$$

I_r – полярний момент інерції;

I_d – крутильний момент інерції;

I_{ω} – секторіальний момент інерції;

δ – товщина профілю;

$S_{ox}, S_{oy}, S_{o\omega}$ – статичний момент відсіченої частини перерізу відносно осей y і z відповідно, статичний секторіальний момент відсіченої частини перерізу;

h – товщина стінки профілю.

Функціонал енергії деформації тонкостінного стержня відкритого профілю:

$$E(\sigma) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{H^2}{GI_x} + \frac{M_\varpi^2}{GF_\omega r^2} \right] dx \quad (1.14)$$

1.2.3. Зсувна теорія

У розглянутих вище теоріях при урахуванні деформації зсуву вплив поперечної сили на напружено-деформований стан стержня вважався несуттєвим фактором і не враховувався в функціоналі енергії деформації. В зсувній теорії розглядається варіант, при якому урахування деформації зсуву буде виконане в повному обсязі.

Якщо розглянути функціонали енергії деформації тонкостінного стержня відкритого профілю, то він в межах даної теорії для тонкостінного стержня відкритого профілю має наступний вигляд

$$E = \int_0^L \left[\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{B^2}{2EI_\omega} + \frac{H^2}{2GI_z} + \frac{Q_x^2 \mu_{xx}}{2GA} + \frac{Q_y^2 \mu_{yy}}{2GA} + \frac{M_\omega^2 \mu_{\omega\omega}}{2r^2 GA} + \frac{Q_x Q_y \mu_{xy}}{GA} + \frac{Q_x Q_\varpi \mu_{x\omega}}{rGA} + \frac{Q_y Q_\omega \mu_{y\omega}}{rGA} \right] dx \quad (1.15)$$

Недоліком зсувної теорії, з точки зору прикладного значення, є надзвичайна складність її використанні через наявність дев'яти складників у функціоналі енергії деформації, тоді як у теорії Власова – п'ять складників. Зсувна теорія може бути корисною виключно в наукових цілях і не може бути застосована в будь-якому програмному комплексі через громіздкість отримуваних матриць жорсткості.

1.3. Чисельні методи розв'язання задач статички і стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю.

Експериментальні та теоретичні дослідження виявили можливість роботи тонкостінних холодногнутих профілів після втрати місцевої стійкості стиснутих частин елементів поперечного перерізу. При обчисленні несучої здатності поперечного перерізу тонкостінного елемента використовується концепція «ефективної ширини» елемента, яка вперше запропонував Т. Von Karman [163]. Ця концепція реалізована шляхом побудови деякого «ефективного перерізу», коли частина окремого елемента перерізу, яка зазнала втрати стійкості, виключається з роботи. Даний підхід був розвинутий у роботах G. Winter [166], W. Koiter [49], А.С. Вольміра [19], Г.І. Белого [7-11] і у модифікованому вигляді знайшов своє відображення в сучасних нормах проектування Eurocode [130], AISI [105], СП [88, 89] та вітчизняних ДБН [31].

Аналітичний розв'язок задачі стійкості тонкостінних стержневих конструкцій є складним, тому все частіше застосовуються чисельні методи. Метод скінченних елементів є одним з найбільш поширених методів будівельної механіки, який реалізовано в багатьох обчислювальних програмних комплексах SCAD [72,74], LIRA [27], ANSYS [64], NASTRAN [43, 78, 101], PANDA2 [112] та інших. Розрахунок тонкостінних конструкцій методом скінченних елементів наведено в роботах О. Зенкевича [44], Р. Галлагера [24], А.І. Голованова [25, 26], О.С. Городецького [27], Р.Б. Рікардса [77], С.Ф. Дьякова [40, 41], В.І. Лаліна [56, 57, 145], А.В. Осокіна [65], В.В. Кудінова [54], К.М. Hsiao [135, 136] та інших. Скінченно-елементне моделювання тонкостінних стержнів на теперішній час виконується з використанням оболонкових скінченних елементів, плоских скінченних елементів з додатково введеним зв'язком та бістержневої моделі.

Бістержнева модель, яка запропонована А.В. Перельмутером і В.І. Слівкером [72], побудована для стержневого елемента з шістьма ступенями вільності у вузлах на основі ряду енергетичних міркувань. Для

розрахунку використовується механічна система з двох рівнопротяжних стержнів: основного і фіктивного – рис.1.3. Енергія деформації в бістержневій моделі є сумою енергій в основному і фіктивному стержнях, розглянутих окремо. Дана модель дозволяє досягти підвищення точності результатів розрахунків тонкостінних стержнів відкритого і замкнутого профілів.

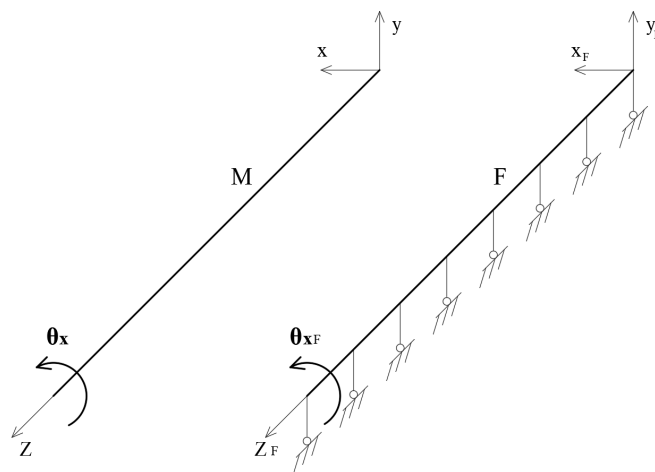


Рис. 1.3. Основний і фіктивний стержні бістержневої моделі.

Іншим підходом є використання оболонкових скінченних елементів при побудові моделі тонкостінного стержня [40]. Він дозволяє при розв'язанні системи диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан стержня, отримати переміщення і напруження по шести ступеням вільності для кожного вузла моделі. Основним недоліком цього методу вважається зростання числа скінченних елементів порівняно зі стержневою моделлю.

Використання плоских скінченних елементів з додатково введеним зв'язком реалізовано в роботах О.Р. Тусніна [95]. Стержнева конструкція поділена на окремі тонкостінні скінченні елементи, що мають сім ступенів вільності в кожному вузлі. Недоліком запропонованих скінченних елементів є матриці жорсткості, члени яких є гіперболічними функціями з можливим

діленням на нуль. Також дана модель непридатна для розрахунку тонкостінних стержнів замкнутого і комбінованого профілів.

Для розрахунку стійкості тонкостінних стержнів І.В. Каменських [143] пропонує використовувати метод модуль–елементів, що дозволяє кратно зменшити розмір системи рівнянь рівноваги у порівнянні з МКЕ.

В роботі [80] В.О. Рибаків пропонує застосувати метод розрахунку тонкостінних стержнів на основі напівзсувної теорії Слівкера, враховуючи частину деформацій зсуву в середній поверхні стінок стержнів, які визнані дією секторальних сил.

В.В. Юрченко в роботі [103] запропонувала аналітичні залежності для визначення критичних сил в розрахунках центрально стиснутих С-подібних тонкостінних стержнів. У роботі також розглядаються випадки місцевої втрати стійкості елементів поперечного перерізу та втрати стійкості форми поперечного перерізу.

Розглянемо існуючі чисельні методи розв'язання задач статки і стійкості тонкостінних стержнів з недоскональностями форми. Перші експериментальні дослідження були проведені І. Ходкінсоном [137] в період з 1840 по 1857 роки. Вони показали, що навіть мала кривизна стержнів та незначний ексцентриситет прикладання навантажень дають результати, які сильно різняться з теорією. Малі недосконалості форми реальних стержнів можуть суттєво зменшити критичне навантаження. Таким чином, стає важливим врахувати їх у дослідженнях стійкості тонкостінних стержневих конструкцій. У досліджах І. Баушингера [109], М. Консидера [115], Л. Тетмаєра [160] велика увага приділялась центруванню навантажень для запобігання виникнення ексцентриситетів, які також розглядалися як недосконалості. Розвиток теорії тонкостінних стержнів був невід'ємним вид розвитку теорії тонкостінних оболонок. Це стосувалось і питань впливу недосконалостей на стійкість тонкостінних конструкцій. Т. Von Karman і Tsien [163] дослідним шляхом першими встановили, що тонкостінні оболонки є чутливими до недосконалостей форми

Основи розрахунку стійкості тонкостінних стержнів з урахуванням недосконалостей закладено в роботі 1951 року L. Donnell і C. Wan [39]. Їх робота була заснована на рівнянні L. Donnell [119], яке для недосконалого циліндра під осьовим стисканням мало вигляд рівнянь з частинними похідними четвертого порядку. Маючи обмеження у обчислювальних потужностях для спрощення розрахунків вони припустили, що форма недосконалості пропорційна деформованій формі оболонки. S.Y. Lu, W. Nash [149] та L.H.N. Lee [146] слідували методу L. Donnell, проте з наявністю цифрових комп'ютерів змогли відмовитися від пропорційності між формами недеформованої та деформованої оболонок. Дане обмеження не розглядалося і у подальших дослідженнях. W. Koiter [144] у 1963 році демонструє зменшення критичного навантаження, що спричинене єдиною недосконалістю, пропорційною вісе-симетричній формі при вигині ідеальної оболонки. J. Hutchinson у 1965 році [139] розширив аналіз W. Koiter, додавши до форми недосконалості два параметри і врахувавши вплив внутрішнього тиску.

J. Arbocz, C.D. Babcock [106] у 1968 році провели експериментальні та теоретичні дослідження впливу загальних недосконалостей на критичне навантаження круглої циліндричної оболонки при осьовому стисканні. Для моделювання недосконалостей використовувалася спрощена модель, що складалася з одного осесиметричного і одного асиметричного компонента.

D. Bushnell [111,112] розглядав недосконалості як важливий аспект у розрахунках стійкості тонкостінних конструкцій. Він використовував метод скінченних елементів для детального моделювання недосконалостей на поверхні стержнів або оболонок. D. Bushnell також проводив параметричні дослідження, змінюючи розмір та форму недосконалостей, щоб зрозуміти, як різні типи недосконалостей впливають на поведінку структури [112].

B.W. Schafer, T. Pekoz [156] у 1998 році ввели класифікацію геометричних недосконалостей (рис. 1.3.) виділивши недосконалості Типу 1 (максимальна місцева кривизна у розкріпленому елементі) та Типу 2

(максимальне відхилення нерозкріпленої полицки чи вигину). Вони запропонували оцінювати розподіл недосконалостей за допомогою спеціально розробленої програми і ввели поняття спектру недосконалостей. В роботі [156] описано використання даної програми та спектру недосконалостей для моделювання та аналізу недосконалостей різного типу.

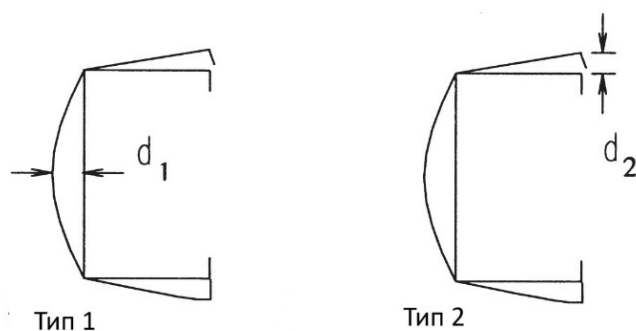


Рис. 1.3. Типи геометричних недосконалостей по В.В. Schafer.

D. Dubina [120, 127] запропонував концепцію Ерозії Критичного Біфуркаційного Навантаження «Erosion of Critical Bifurcation Load» (ECBL) для оцінки несучої здатності тонкостінних стержнів при місцевих та загальних втратах стійкості. Основна гіпотеза підходу ECBL полягає в тому, що зниження критичного навантаження досягає свого максимуму, коли глобальні та місцеві нестабільності співпадають.

J. Rondal, D. Dubina, V. Ungureanu у роботі [125] зазначають, що для застосування у нелінійних розрахунках форма недосконалостей може бути визначена за допомогою аналізу стійкості недеформованого стержня. Така їх форма повинна бути подібною до відповідних локальних або загальних форм втрати стійкості поперечного перерізу. У своїй роботі вони також досліджували два типи початкових недосконалостей холодногнутих профілів:

- геометричні дефекти;

– залишкові напруження та зміна межі текучості внаслідок ефекту холодного формування.

P. Dinis i D. Camotim (2008, 2009, 2010) у своїх дослідженнях [116-118] підбирали довжини стержнів та їх перерізи таким чином, щоб забезпечити співпадіння (чи майже співпадіння) критичних форм, максимізуючи ефект їх взаємодії. Форму недосконалостей вони задавали у вигляді комбінації декількох форм втрати стійкості (дві чи три форми) отриманих при лінійному розрахунку.

Європейські стандарти з проектування сталевих конструкцій (Eurocode 3) частини 1-3 EN 1993-1-3 [130,] містить правила, які можна використовувати для урахування загальних та локальних недосконалостей, а також для проведення геометрично та матеріально нелінійного аналізу з урахуванням недосконалостей «Geometrically and materially nonlinear analysis with imperfections» (GMNIA). Частина австралійського стандарту, що стосується сталевих складських стелажів (AS 4084) [107], дозволяє використовувати обчислення методом скінченних елементів для розрахунку стійкості з урахуванням недосконалостей. Форму геометричних недосконалостей імітують форми деформації, які отримують з лінійного аналізу стійкості методом скінченних елементів або скінченних смуг.

Дослідження несучої здатності тонкостінних стержнів з геометричними недосконалостями виконано в роботах J.W. Hutchinson [138], G. Simitses [158, 159], Г.Д. Гавриленка [20-22], N. Tsouvalis [161, 162], М.Д. Корчака [53], В.А. Баженова [6], Є.О. Гоцуляка [29, 30], Ю.М. Муляра [61], В.О. Рибаків [79-81], О.О. Лук'янченко [58, 59] та ін. Історію розвитку та сучасні методики до врахування початкових недосконалостей форми у тонкостінних стержнях відкритого профілю викладено у статті [131].

Огляд існуючих підходів показав, що на теперішній час не існує глибокого аналізу впливу виду і амплітуди недосконалостей на втрату стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю та підтвердження

граничних відхилень, прийнятих в нормативних документах: ДСТУ 8806:2018 [34], ДСТУ 8808:2018 [35] та ДСТУ 9233:2023 [36].

ДСТУ 8808:2018 «Профілі сталеві гнуті Технічні умови» [35]. Цей нормативний документ застосовується до сталевих гнутих профілів, різних за формою, розмірами та призначенням. Вони виготовляються на профілезгинальних станах з заготовок з листового рулонного гарячекатаного та холоднокатаного прокату вуглецевої сталі звичайної якості, а також вуглецевої якісної конструкційної та низьколегованої сталі.. Стандарт містить технічні вимоги щодо форми поперечного перерізу, граничних відхилень за товщиною, вимоги до заготовки, вимоги до сталі, допустимі дефекти та інше.

ДСТУ 8806:2018 «Швелери сталеві гнуті рівнополичні. Сортамент» [34] уточнює вимоги ДСТУ 8808:2018 для виготовлення С-подібних стержнів відкритого профілю та приводить гранично-допустимі відхилення по геометрії стержня: висоті стінки, перпендикулярності елементів, довжині, скручуванню, кривизні, хвилястості поличок та інше.

ДСТУ 9233:2023 «Профілі сталеві холодногнуті несні та армувальні конструктивних елементів будівель та споруд. Загальні технічні умови» [36]. Цей стандарт поширюється на різні за формою поперечного перерізу сталеві холодногнуті несучі та підсилювальні профілі конструктивних елементів будівель та споруд. Ці елементи можуть бути виготовлені з холодно- або гарячекатаного тонколистового прокату з вуглецевої сталі якісної та звичайної якості, якісної конструкційної або низьколегованої сталі. Стандарт встановлює загальні вимоги до вихідних матеріалів, класифікації, видів, параметрів та маркування холодногнутих сталевих профілів, призначений для використання виробниками.

РОЗДІЛ 2

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ДОСЛІДЖЕННЯХ СТАТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ З НЕДОСКОНАЛІСТЮ ФОРМИ

Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним з найпоширеніших чисельних методів для аналізу конструкцій. Його популярність пояснюється успішним поєднанням відносно простого алгоритму з можливістю використання його для аналізу систем будь-якої складності. Суттєвою перевагою МСЕ є ефективність програмного забезпечення, що ґрунтується на цих алгоритмах. Серед сучасних програмних комплексів, які застосовуються для розрахунку конструкцій можна виділити Lira, SCAD, NASTRAN, ANSYS та інші.

Ідеї, які стали основою МСЕ, виникли при розробці матричних методів для аналізу стрижневих конструкцій, зокрема, методу сил і методу переміщень. Розповсюдженню цих методів на дво- і тривимірні конструкції сприяв Дж. Аргіріс [1], який у 1944 році за допомогою комп'ютера застосував метод трикутних скінчених елементів в авіабудуванні. Подальший розвиток МСЕ пов'язаний з аналізом конструкцій у суднобудуванні, літакобудуванні, цивільному будівництві, машинобудуванні [25, 27, 44, 46, 54, 65, 77]. Застосування методу скінченних елементів (МСЕ) значно розширилося, коли стало очевидним, що рівняння, які описують складові в задачах будівельної механіки, теплопровідності і гідромеханіки, мають аналогічний характер. МСЕ, який починався як чисельний метод для вирішення завдань будівельної механіки з розвитком став загальним методом чисельного розв'язування диференціальних рівнянь

У методі скінченних елементів основною одиницею аналізу конструкції є скінченний елемент - це геометрично спрощене представлення малого фізичного фрагменту конструкції. Модель конструкції складається з дискретних скінченних елементів, які утворюють сітку. Вибір скінченних елементів залежить від ряду факторів, таких, наприклад, як геометрична форма, дефекти поверхні, очікувана поведінка конструкції, концентрація напружень та інші. Властивості кожного скінченного елемента обчислюються за стандартними формулами теорії твердого деформівного тіла. В границях кожного скінченного елемента вводиться вектор переміщень будь-якої точки $\{U\} = \{U_1, U_2, U_3\}^T$. Скінченні елементи об'єднуються в загальну модель конструкції в певних точках простору, які є вузлами. Вузол моделі може протидіяти поступальним і обертальним переміщенням щодо певних напрямків у залежності від типу, орієнтації і числа елементів, що з'єднуються в ньому. В методі скінченних елементів, який базується на методі переміщень, підлягають визначенню узагальнені вузлові переміщення, розмірність вектора яких $\{q\}$ дорівнює загальній кількості ступенів вільності моделі конструкції. Для визначення поведінки конструкції, яка характеризується її відгуком у вигляді деформацій та напружень, складаються рівняння рівноваги. Для цього застосовується варіаційний підхід Лагранжа [84, 5].

В роботі тонкостінні стержні відкритого профілю представляються у вигляді сукупності плоских чотириохкутних оболонкових скінченних елементів, які реалізовано в програмного комплексі NASTRAN [78, 101].

2.1. Скінченно-елементне представлення задач статки в програмному комплексі NASTRAN

2.1.1. Крайова задача напружено-деформованого стану твердого деформівного тіла (малі деформації)

При постановці крайової задачі напружено-деформованого стану твердого деформівного тіла застосовуються рівняння рівноваги, геометричні співвідношення та рівняння фізичної моделі матеріалу, які реалізовані в даному комплексі [76]. У відповідності з підходом Лагранжа координати будь-якої точки стержня після деформування можуть бути описані координатами $x_i = x_i(a_j, t)$, де $x_i = x_i(a_j, 0) = a_j$ – початкові координати точки ($i, j = 1, 2, 3$); t – „часовий” крок навантаження, який в задачах статки не є параметром, а застосовується лише для розпізнавання початкового і наступного стану.

Всі рівняння записуються у місцевій нормованій системі координат

$$\vec{b}_j = \vec{e}_j / \sqrt{g_{jj}} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

де \vec{e}_j – вектори основного базису; g_{jj} – компоненти метричного тензора, які дозволяють виключити метрику простору з фізичних рівнянь.

Компоненти метричного тензора дорівнюють $g_{jj} = g^{jj} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера), тому компоненти тензора міри деформації Коші-Гріна

$$\tilde{N}_{ij} = X_i^k \cdot X_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial a_i} \frac{\partial x^k}{\partial a_j}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.2)$$

Компоненти симетричного тензора деформації Лагранжа-Гріна у відношенні до початкової конфігурації визначаються за допомогою формули.

$$\epsilon_{ij} = (\tilde{N}_{ij} - \delta_{ij}) / 2, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

або через компоненти вектора переміщень

$$\epsilon_{ij} = (\Delta_j U_i + \Delta_i U_j + \Delta_i U_k \Delta_j U^k) / 2, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

де

$$\Delta_i U_j = \partial U_j / \partial a_i - U_k \Gamma_{ij}^k; \quad \Delta_j U^i = \partial U^i / \partial a_j + U^k \Gamma_{jk}^i, \quad (2.5)$$

Тут Γ_{ij}^m – символи Крістофеля другого роду, які є компонентами розкладання $\partial \vec{e}_j / \partial a_i$ за вихідним базисом \vec{e}_m , симетричні за нижніми індексами і визначаються за формулою

$$\Gamma_{mi}^j = \Gamma_{im}^j = g^{jn} (\partial g_{mn} / \partial a_i + \partial g_{in} / \partial a_m - \partial g_{mi} / \partial a_n) / 2. \quad (2.6)$$

У випадку малих деформацій і поворотів в рівнянні (2.5) величинами другого порядку малості нехтують

$$\epsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = (\Delta_j U_i + \Delta_i U_j) / 2. \quad (2.7)$$

Вважається, що деформації задовольняють відомим рівнянням сумісності.

Розглянемо рівняння фізичної моделі ізотропного матеріалу. Між напруженнями і пружними деформаціями існує однозначна функціональна залежність. Вводиться поняття функціонала пружної енергії W , який дозволяє закон пружності записати як

$$\sigma^{mn} = \partial W / \partial \varepsilon_{mn}, \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

Для лінійно-пружної моделі матеріалу законом пружності є закон Гука

$$\sigma^{mn} = E^{mnij} \varepsilon_{ij}^e, \text{ або } \varepsilon_{ij}^e = \tilde{N}_{ijmn} \sigma^{mn}, \quad (2.9)$$

де E^{mnij}, C_{ijmn} – тензори четвертого рангу з модулів пружності, які залежать від координат.

Для ізотропного матеріалу існує лише дві незалежні пружні характеристики: модуль пружності Юнга E і коефіцієнт Пуасона η . Тобто усі $E_{ij} = E$ та $\eta_{ij} = \eta$. Модуль зсуву при цьому визначається за формулою $G = E / [2(1 + \eta)]$.

Для формування крайової задачі статички до рівнянь рівноваги, геометричних і фізичних співвідношень додаються граничні умови:

- першого роду (відомі переміщення): $U_i |_{S_U} = \hat{U}_i \quad (i = 1, 2, 3)$;
- другого роду (натуральні): $\sigma^{mn} \nu_n |_{S_P} = \hat{P}^m$, де $m \in$ номером вузла;

а також зосереджені сили \hat{R}_m , що прикладаються до окремих вузлів скінченно-елементної сітки моделі [78].

Для отримання варіаційної постановки статичної крайової задачі застосовуються геометричні співвідношення, а також властивості симетрії тензора напружень та теорема Остроградського-Гауса [5]. В результаті функціонал відносно варіацій переміщень і зв'язаних з ними деформацій має вид

$$F = \int_{\Omega} \sigma^{mn} \delta \varepsilon_{mn} d\Omega - \int_{S_P} \hat{P}_m \delta U_m dS - \hat{R}_m \delta U_m = 0, \quad (2.10)$$

який з кінематичними граничними умовами на поверхні S_U визначає нескінченно чисельну множину можливих (віртуальних) напружено-деформованих станів моделі. Дійсний стан є одним з віртуальних, але він додатково задовольняє фізичним рівнянням зв'язку між напруженнями і

деформаціями. Час t не входить до рівняння (2.10), а застосовується для розпізнавання початкового і наступного стану.

Розглянемо скінченно-елементне представлення крайової задачі статички у випадку малих деформацій. В границях кожного скінченного елемента для компонент вектора переміщень $\{U\} = \{U_1, U_2, U_3\}^T$ будь-якої точки елемента задають апроксимацію через узагальнені вузлові переміщення у вигляді

$$U_n = U_n(\bar{x}, t) \approx \sum_{m=1}^N \Phi_m(\bar{x}) \cdot (q_n(t))_m, \quad n = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (2.11)$$

де $\Phi_m(\bar{x})$ – функції форми елемента, які є повною за енергією системою лінійно незалежних базисних функцій; $(q_n(t))_m$ – значення вузлових переміщень, які треба визначити.

У відповідності з методом скінченних елементів функції форми подаються у вигляді

$$\Phi_m(\bar{x}) = \sum_{\Omega^e \subset A_m} \chi^e(\bar{x}) \cdot \varphi_m^e(\bar{x}). \quad (2.12)$$

Тут A_m – множина скінченних елементів, яка містить вузол m ; $\varphi_m^e(\bar{x})$ – базисна функція, наприклад у вигляді інтерполяційного поліному Лагранжа, або рядів Макларена, скінченного елемента e , яка відповідає вузлу m в границях скінченного елемента з об'ємом Ω^e ; функція приналежності до елемента або оператор інцидентності

$$\chi^e(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in \Omega^e; \\ 0, & \bar{x} \notin \Omega^e. \end{cases} \quad (2.13)$$

Замість (2.11) маємо скінченно-елементну апроксимацію

$$U_n = U_n(\vec{x}, t) \approx \sum_{m=1}^N (q_n(t))_m \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\vec{x}) \cdot \varphi_m^e(\vec{x}), \quad (2.14)$$

де N – загальна кількість вузлів в моделі стержня.

Оскільки для будь-якої точки в границях скінченного елемента $\chi^e(\vec{x}) = 1$, то в границях елемента $\Phi_m(\vec{x}) = \varphi_m^e(\vec{x})$. За границями скінченного елемента $\chi^e(\vec{x}) = 0$, тому в (2.14) фактично відбувається сумування тільки по M вузлам того скінченного елемента, в якому розташована точка з координатами \vec{x} . Тому вводиться матриця базисних функцій скінченного елемента $[\phi]$, через яку виконується заміна формули (2.14) на формулу виду

$$\{U\} = [\phi] \{q\}_e, \quad (2.15)$$

де вектор переміщень у вузлах скінченного елемента

$$\{q\}_e = \left\{ (q_1, q_2, q_3)_1, \dots, (q_1, q_2, q_3)_m, \dots, (q_1, q_2, q_3)_M \right\}^T, \quad (2.16)$$

в якому $(q_1, q_2, q_3)_m$ – переміщення m -го вузла скінченного елемента; $m = 1, 2, \dots, M$. Цей вектор є результатом виборки значень переміщень $\{q\}_e$ у вузлах даного скінченного елемента з глобального вектора вузлових переміщень $\{q\}$.

Оскільки в трьохвимірному випадку $\{U\}$ має розмірність 3×1 , а $\{q\}_e$ – $3M \times 1$, то розмірність матриці базисних функцій буде $3 \times 3M$. Матриця базисних функцій $[\phi]$ є блочною

$$[\phi] = [[\phi]_1, [\phi]_2, \dots, [\phi]_M], \quad (2.17)$$

в якій блок для m -го вузла має вид

$$[\phi]_m = \begin{bmatrix} \varphi_m^e & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_m^e & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_m^e \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Для будь-якої точки тіла в границях елемента вводяться вектори повних пружних деформацій і напружень

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T, \quad (2.19)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T \quad (2.20)$$

де $\gamma_{mn} = 2\varepsilon_{mn}$ при $m \neq n$.

Для малих деформацій вводиться матриця диференціювання $[B]$ за глобальними координатами, з використанням якої рівняння (2.7) переписується у вигляді

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e. \quad (2.21)$$

Оскільки вектор $\{\varepsilon\}$ має розмірність 6×1 , а $\{q\}_e - 3M \times 1$, то розмір матриці $[B]$ буде $6 \times 3M$.

Введемо позначення

$$p_{im} = \partial \varphi_m^e / \partial x_i, \quad (2.22)$$

тоді матриця диференціювання має блочний вигляд

$$[B] = \left[[B]_1, [B]_2, \dots, [B]_M \right], \quad (2.23)$$

блоки якої для декартової системи координат мають вид

$$[B]_m = \begin{bmatrix} p_{1m} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3m} \\ p_{2m} & p_{1m} & 0 \\ 0 & p_{3m} & p_{2m} \\ p_{3m} & 0 & p_{1m} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Лінійний закон Гука (2.9) запишеться у вигляді

$$\sigma = [D]\{\varepsilon\}. \quad (2.25)$$

Тут матриця модулів пружності $[D]$ для пружного ізотропного матеріалу має вид

$$[D] = 2G \cdot \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

де $2G = E / [(1 + \eta)]$; $a = (1 - \eta)E / (1 - 2\eta)$; $b = \eta / (1 - 2\eta)$

$c = 0,5$.

Тоді варіаційний функціонал (2.10) в матричному вигляді при малих деформаціях набуває виду

$$F = \sum_e \int_{\Omega} \delta \{q\}_e^T [B]^T [D][B] \{q\}_e d\Omega - \sum_e \int_{S_p^e} \delta \{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \delta \{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{R}\} = 0. \quad (2.27)$$

У зв'язку с тим, що вектор вузлових переміщень $\{q\}_e$ і також вектор $\delta \{q\}_e^T$ не залежать від процесу інтегрування, то їх можна винести за границі інтеграла.

Введемо позначення

$$[K]_e = \int_{\Omega} [B]^T [D][B] d\Omega; \quad (2.28)$$

$$\{P\}_e = \int_{S_p^e} [\phi]^T \{\hat{P}\} dS + [\phi]^T \{\hat{R}\}. \quad (2.29)$$

Тут $[K]_e$ – лінійна матриця жорсткості скінченного елемента, $\{P\}_e$ – вектор обумовлений зовнішніми силовими навантаженнями, прикладеними до скінченного елемента.

Оскільки варіації переміщень є довільними, то отримаємо систему алгебраїчних рівнянь рівноваги при малих переміщеннях виду

$$[K]\{q\} = \{P\}, \quad (2.30)$$

де $[K] = \sum_e [K]_e$ – лінійна матриця жорсткості моделі конструкції;

$\{P\} = \sum_e \{P\}_e$ – вектор, обумовлений зовнішніми силовими навантаженнями,

прикладеними до всієї моделі.

2.1.2. Крайова задача втрати стійкості твердого деформівного тіла

Для розв’язання задачі стійкості в лінійній постановці необхідно розглянути геометричні рівняння з урахуванням нелінійних членів.

Позначимо

$$\epsilon_{ij} = (\epsilon_{ij})_L + (\epsilon_{ij})_{NL}, \quad (2.31)$$

де $(\epsilon_{ij})_L$ – лінійна частина тензора деформацій (2.5) і (2.8), а $(\epsilon_{ij})_{NL}$ – нелінійна частина, яка визначається за формулою

$$(\epsilon_{ij})_{NL} = \frac{1}{2} \nabla_i U_k \Delta_j U^k. \quad (2.32)$$

В декартовій системі координат $U^i = U_i$, усі символи Крістофеля $\Gamma_{ij}^k = 0$, $\nabla_i = \partial / \partial x_i$, тому

$$(\epsilon_{ij})_L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \quad (\epsilon_{ij})_{NL} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.33)$$

Тобто в формулі (2.74) залишаються по п’ять складових.

Позначимо

$$\hat{b}_{ij} = \partial U_i / \partial x_j \quad (2.34)$$

і введемо вектор

$$\{\theta\} = \left\{ \left\{ \theta_{x^1} \right\}, \left\{ \theta_{x^2} \right\}, \left\{ \theta_{x^3} \right\} \right\}^T \text{ де } \left\{ \theta_{x^i} \right\} = \left\{ \widehat{b}_{1j}, \widehat{b}_{2j}, \widehat{b}_{3j} \right\}^T. \quad (2.35)$$

Тоді друге співвідношення (2.76) можна представити у вигляді

$$\left(\epsilon_{ij} \right)_{NL} = \frac{1}{2} [A] \{\theta\}, \quad (2.36)$$

де матриця $[A]$ розмірністю 6×9 для трьохвимірного випадку в декартовій системі координат має вид

$$[A] = \begin{bmatrix} \left\{ \theta_{x^1} \right\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \left\{ \theta_{x^2} \right\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \left\{ \theta_{x^3} \right\}^T \\ \left\{ \theta_{x^2} \right\}^T & \left\{ \theta_{x^1} \right\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \left\{ \theta_{x^3} \right\}^T & \left\{ \theta_{x^2} \right\}^T \\ \left\{ \theta_{x^3} \right\}^T & \{0\}^T & \left\{ \theta_{x^1} \right\}^T \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

де $\{0\} = \{0, 0, 0\}^T$ – нульовий вектор.

Вектори $\left\{ \theta_{x^j} \right\}$ виразимо через вузлові переміщення у вигляді

$$\left\{ \theta_{x^j} \right\} = [W_j] \{q\}_e, \quad (2.38)$$

де матриця

$$[W_j] = \left[[p_{j1}], [p_{j2}], \dots, [p_{jm}], \dots, [p_{jM}] \right], \text{ де } [p_{jm}] = \begin{bmatrix} p_{jm} & 0 & 0 \\ 0 & p_{jm} & 0 \\ 0 & 0 & p_{jm} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Тоді з урахуванням (2.35)

$$\{\theta\} = [W]\{q\}_e, \quad (2.40)$$

де матриця

$$[W] = \left[[W_1], [W_2], [W_3] \right]^T. \quad (2.41)$$

Враховуючи (2.40) запишемо

$$(\epsilon_{ij})_{NL} = \frac{1}{2}[A]\{\theta\} = \frac{1}{2}[A][W]\{q\}_e = \frac{1}{2}[\bar{B}]\{q\}_e, \quad (2.42)$$

де $[\bar{B}]$ матриця диференціювання нелінійних складових тензора деформацій розмірністю $6 \times 3M$

$$[\bar{B}] = [A][W]. \quad (2.43)$$

Таким чином

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon\}_L + \{\epsilon\}_{NL} = \left([B] + \frac{1}{2}[\bar{B}] \right) \{q\}_e, \quad (2.44)$$

при цьому матриця диференціювання лінійної частини тензора деформацій визначається за формулами (2.64) і (2.65).

Введемо позначення

$$[\tilde{B}] = [B] + \frac{1}{2}[\bar{B}]. \quad (2.45)$$

Тоді остаточно запишемо, що з урахуванням нелінійних членів вектор деформацій визначається за формулою

$$\{\epsilon\} = [\tilde{B}] \{q\}_e. \quad (2.46)$$

Матриця $[\bar{B}]$ є лінійною функцією переміщень через матрицю $[A]$ з урахуванням (2.23) і (2.24)

$$[A] = \begin{bmatrix} ([C_1]\{q\}_e)^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & ([C_2]\{q\}_e)^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & ([\tilde{N}_3]\{q\}_e)^T \\ ([\tilde{N}_2]\{q\}_e)^T & ([C_1]\{q\}_e)^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & ([C_3]\{q\}_e)^T & ([C_2]\{q\}_e)^T \\ ([C_3]\{q\}_e)^T & \{0\}^T & ([C_1]\{q\}_e)^T \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Враховуючи (2.40), (2.43) і (2.47), можна отримати вектор нелінійної складової деформацій

$$\begin{aligned} \{d\epsilon\}_{NL} &= d\{\epsilon\}_{NL} = d\left(\frac{1}{2}[\bar{B}]\{q\}_e\right) = d\left(\frac{1}{2}[A]\{\theta\}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(d[A]\{\theta\} + [A]d\{\theta\}) = [A]d\{\theta\} = [A][C]\{dq\}_e = [\bar{B}]\{dq\}_e. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Тоді вектор приросту деформацій і відповідно варіацій деформацій буде

$$\{d \in\} = ([B] + [\bar{B}])\{dq\}_e = [\tilde{B}]\{dq\}_e, \quad \{\delta \in\} = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e, \quad (2.49)$$

де $[\tilde{B}] = [B] + [\bar{B}]$ – повна матриця диференціювання для отримання приросту деформацій, яка залежить від переміщень.

2.1.3. Співвідношення методу скінченних елементів для плоского чотириохкутного оболонкового елемента

Геометрія тонкостінного стержня відкритого профілю представлена у вигляді серединної поверхні стінки, полицок та відгинів стержня. Скінченно-елементна модель стержня являє собою сукупність чотириохкутних оболонкових елементів (типу Plate в комплексі NASTRAN [78]) з шістьма ступенями вільності в кожному вузлі (рис. 2.1). Такий скінченний елемент сприймає мембранні, зсувні, поперечні та згинальні навантаження.

Для опису оболонкового скінченного елемента застосовані нелінійні співвідношення теорії тонких оболонок. За систему відліку прийнята декартова система координат XYZ . Індивідуалізація точок серединної поверхні елемента здійснена за допомогою вектор-функції

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2) \quad (2.50)$$

де x^1, x^2 – нерухомі параметри, в загальному випадку косокутні координати (рис. 2.1), пов'язані з недеформованою серединною поверхнею оболонкового елемента.

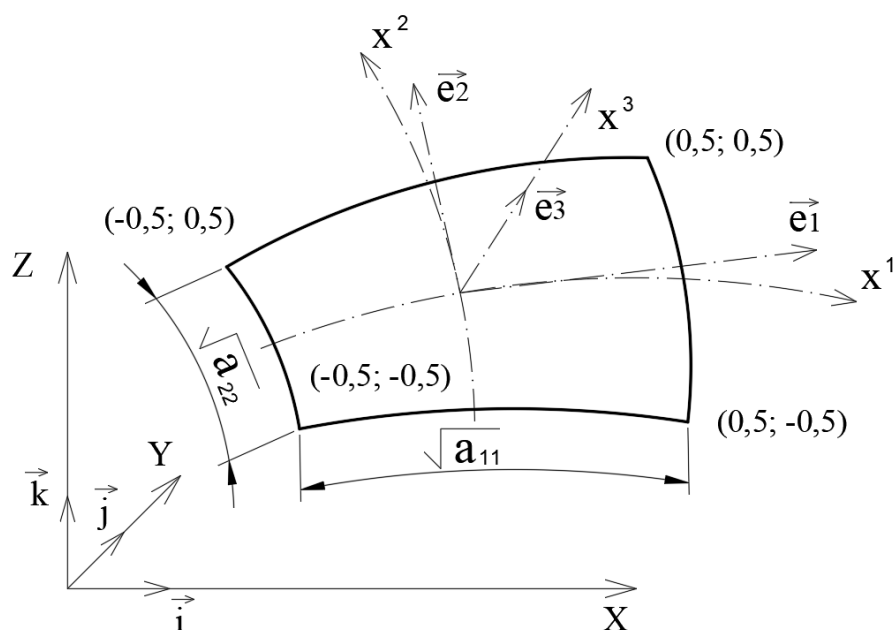


Рис. 2.1. Середина поверхня оболонкового скінченного елемента.

Проекції вектор-функції \vec{r} точок серединної поверхні в межах елемента в системі відліку XYZ задано безперервними однозначними функціями

$$X = X(x^1, x^2), \quad Y = Y(x^1, x^2), \quad Z = Z(x^1, x^2) \quad (2.51)$$

Вектори основного базису обчислено за формулою

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} \vec{i} + \frac{\partial Y}{\partial x^\alpha} \vec{j} + \frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} \vec{k} \quad (\alpha=1, 2), \quad (2.52)$$

Коефіцієнти $a_{\alpha\beta}$ першої квадратичної форми, що визначають внутрішню метрику серединної поверхні елемента і є компонентами двічі коваріантного метричного тензора, виражено залежністю

$$a_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (2.53)$$

а фундаментальний визначник метричного тензора має вигляд

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (2.54)$$

Переміщення точок елемента оболонки описані вектор-функцією

$$\vec{U} = \vec{U}(x^1, x^2). \quad (2.55)$$

Деформації елемента визначено диференціальними залежностями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \cdot \vec{e}_\beta + \frac{\partial U}{\partial x^\beta} \cdot \vec{e}_\alpha + \vartheta_\alpha \vartheta_\beta \right), \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^L &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \cdot \vec{e}_\beta + \frac{\partial U}{\partial x^\beta} \cdot \vec{e}_\alpha \right), \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{NL} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \frac{\partial U}{\partial x^\beta} \right) \cdot \vec{e}_3 = \frac{1}{2} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta, \\ \vartheta_\alpha &= -\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \cdot \vec{e}_3, \quad \vartheta_\beta = -\frac{\partial U}{\partial x^\beta} \cdot \vec{e}_3, \\ \mu_{\alpha\beta} &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial U}{\partial x^\gamma} \right) \cdot \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (2.56)$$

де $\varepsilon_{\alpha\beta}, \vartheta_\alpha, \mu_{\alpha\beta}$ – відповідно коваріантні компоненти тензора тангенціальних деформацій, вектора кутів повороту і тензора згинальних деформацій; $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ – символи Крістофеля.

Контраваріантні компоненти тангенціальних і згинаючих зусиль виражені через деформації згідно з законом Гука

$$T^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\eta^2} \left[\eta a^{\alpha\beta} a^{\gamma\omega} + (1-\eta) a^{\alpha\gamma} a^{\beta\omega} \right] \varepsilon_{\gamma\omega}, \quad (2.57)$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \left[\eta a^{\alpha\beta} a^{\gamma\omega} + (1-\eta) a^{\alpha\gamma} a^{\beta\omega} \right] \mu_{\gamma\omega}.$$

Вектор-функцію переміщень скінченного оболонкового елемента представлено рядом Маклорена

$$\begin{aligned} \vec{U}(x^1, x^2) &= U^0 + \frac{\partial U^0}{\partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U^0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots = \\ &= \left(U_i^0 + U_{i|\alpha}^0 x^\alpha + \frac{1}{2} U_{i|\alpha\beta}^0 x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6} U_{i|\alpha\beta\gamma}^0 x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots \right) \cdot \vec{e}^i. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Апроксимуючі залежності коваріантних компонентів тензора тангенціальних деформацій, вектора кутів повороту та тензора згинальних деформацій набувають вигляду

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(U_{\alpha|\beta}^0 + U_{\beta|\alpha}^0 + U_{\alpha|\beta\gamma}^0 x^\gamma + U_{\beta|\alpha\omega}^0 x^\omega + \dots \right),$$

$$\vartheta_\alpha = - \left(U_{3|\alpha}^0 + U_{3|\alpha\beta}^0 x^\beta + \frac{1}{2} U_{3|\alpha\beta\gamma}^0 x^\beta x^\gamma + \dots \right),$$

$$\mu_{\alpha\beta} = U_{3|\alpha\beta}^0 + U_{3|\alpha\beta\gamma}^0 x^\gamma + \dots - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma (U_{3|\gamma}^0 + U_{3|\gamma\delta}^0 x^\delta + \frac{1}{2} U_{3|\gamma\delta\omega}^0 x^\delta x^\omega + \dots). \quad (2.59)$$

Матричні вирази для залежностей деформацій від функцій переміщень та їх коваріантних похідних мають такий вигляд.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^L &= \{\varepsilon_{11}^L, \varepsilon_{12}^L, \varepsilon_{21}^L, \varepsilon_{22}^L\}^{\dot{O}}, & \{\varepsilon\}^L &= [D_\varepsilon] \{\bar{\phi}\}, \\ \{\varepsilon\}^{NL} &= \{\varepsilon_{11}^{NL}, \varepsilon_{12}^{NL}, \varepsilon_{21}^{NL}, \varepsilon_{22}^{NL}\}^{\dot{O}}, & \varepsilon_{ij}^{NL} &= \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [D_{g_i}]^T [D_{g_j}] \{\bar{\phi}\}, \\ \{\mathcal{G}\} &= \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\}^{\dot{O}}, & \mathcal{G}_i &= [D_{g_i}] \{\bar{\phi}\}, \\ \{\mu\} &= \{\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}\}^{\dot{O}}, & \{\mu\} &= [D_\mu] \{\bar{\phi}\}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

де $\{\bar{\phi}\}$ – вектор коефіцієнтів апроксимуючого ряду (2.9), $[D_\varepsilon]$, $[D_{g_i}]$, $[D_\mu]$ – матриці, які зв'язують компоненти векторів переміщень та деформацій

$$[D_\varepsilon] = \begin{bmatrix} 3(0) & 1 & 20(0) \\ 4(0) & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3(0) & \frac{x^1}{2} & \frac{x^2}{2} & 12(0) \\ 4(0) & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3(0) & \frac{x^1}{2} & \frac{x^2}{2} & 12(0) \\ 7(0) & 1 & 16(0) \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

$$[D_{g_1}] = \begin{bmatrix} 5(0) & 1 & 3(0) & x^1 & 2(0) & x^2 & 0 & \frac{(x^1)^2}{2} & x^1 x^2 & \frac{(x^2)^2}{2} & 0 & \frac{(x^1)^2 x^2}{2} \\ \frac{(x^1)^2 x^2}{2} & \frac{(x^2)^3}{6} & \frac{x^1 (x^2)^2}{2} & \frac{(x^1)^2 (x^2)^2}{4} & \frac{x^1 (x^2)^3}{6} & \frac{(x^1)^2 (x^2)^3}{12} \end{bmatrix},$$

$$[D_{g_2}] = \begin{bmatrix} 8(0) & 1 & 3(0) & x^1 & x^2 & 0 & \frac{(x^1)^2}{2} & x^1 x^2 & \frac{(x^2)^2}{2} & \frac{(x^1)^3}{6} \\ \frac{x^1(x^2)^2}{2} & \frac{(x^1)^2 x^2}{2} & \frac{(x^1)^3 x^2}{6} & \frac{(x^1)^2(x^2)^2}{4} & \frac{(x^1)^3(x^2)^2}{12} & & & & & \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$[D_\mu] = \begin{bmatrix} 9(0) & 1 & 4(0) & x^1 & x^2 & 2(0) & x^1 x^2 & 0 & \frac{(x^2)^2}{2} & \frac{x^1(x^2)^2}{2} & \frac{(x^2)^3}{6} & \frac{x^1(x^2)^3}{6} \\ 12(0) & 1 & 2(0) & x^1 & x^2 & 0 & \frac{(x^1)^2}{2} & \frac{(x^2)^2}{2} & x^1 x^2 & \frac{(x^1)^2 x^2}{2} & \frac{x^1(x^2)^2}{2} & \frac{(x^1)^2(x^2)^2}{6} \\ 12(0) & 1 & 2(0) & x^1 & x^2 & 0 & \frac{(x^1)^2}{2} & \frac{(x^2)^2}{2} & x^1 x^2 & \frac{(x^1)^2 x^2}{2} & \frac{x^1(x^2)^2}{2} & \frac{(x^1)^2(x^2)^2}{6} \\ 13(0) & 1 & 2(0) & x^1 & x^2 & 0 & x^1 x^2 & \frac{(x^1)^2}{2} & \frac{(x^1)^3}{6} & \frac{(x^1)^2 x^2}{2} & \frac{(x^1)^3 x^2}{6} & \end{bmatrix} + \Gamma([D_{g_1}], [D_{g_2}])^T, \quad (2.63)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix}^T - \text{матриця символів Крістофеля.} \quad (2.64)$$

Вектор вузлових переміщень подано у вигляді

$$\{q\}_e = \left\{ q_1^{--}, q_2^{--}, q_3^{--}, q_{3|1}^{--}, q_{3|2}^{--}, q_{3|12}^{--}, q_1^{+-}, q_2^{+-}, q_3^{+-}, q_{3|1}^{+-}, q_{3|2}^{+-}, q_{3|12}^{+-}, q_1^{-+}, q_2^{-+}, q_3^{-+}, q_{3|1}^{-+}, q_{3|2}^{-+}, q_{3|12}^{-+}, q_1^{++}, q_2^{++}, q_3^{++}, q_{3|1}^{++}, q_{3|2}^{++}, q_{3|12}^{++} \right\}^T, \quad (2.65)$$

де символами „+” і „-”, позначені величини + 0,5 та – 0,5 координат x^1, x^2 .

Пряма та зворотна залежності вектора вузлових переміщень і вектора коефіцієнтів апроксимуючого ряду визначено за допомогою матриці $[\bar{C}]$

$$\{q\}_e = [\bar{C}]\{\bar{\phi}\}, \quad \{\bar{\phi}\} = [\bar{C}]^{-1}\{q\}_e = [\bar{S}]\{q\}_e, \quad (2.66)$$

яка має вид

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} a_{1--}^1 a_{1--}^2 a_{1--}^3 - 0,5a_{1--}^1 - 0,5a_{1--}^2 - 0,5a_{1--}^3 & \dots & (-0,5)^6 a_1^3 \\ a_{2--}^1 a_{2--}^2 a_{2--}^3 - 0,5a_{2--}^1 - 0,5a_{2--}^2 - 0,5a_{2--}^3 & \dots & (-0,5)^6 a_2^3 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Тут $a_{j--}^i = \bar{e}^i(0,0) \cdot \bar{e}_j(-0,5;-0,5)$ – коефіцієнти перетворення коваріантних компонент геометричного вектора при його переміщенні з центру до вузла скінченного елемента.

Матричні залежності деформацій від функцій вузлових переміщень та їх коваріантні похідні набувають виду

$$\{\varepsilon\}^L = [D_\varepsilon][\bar{S}]\{q\}_e,$$

$$\{\varepsilon\}^{NL} = \left(\frac{1}{2} \{q\}_e^T [\bar{S}]^T [D_{g1}]^T [D_{g1}] [\bar{S}]\{q\}_e, \frac{1}{2} \{q\}_e^T [\bar{S}]^T [D_{g1}]^T [D_{g2}] [\bar{S}]\{q\}_e, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \{q\}_e^T [\bar{S}]^T [D_{g2}]^T [D_{g1}] [\bar{S}]\{q\}_e, \frac{1}{2} \{q\}_e^T [\bar{S}]^T [D_{g2}]^T [D_{g2}] [\bar{S}]\{q\}_e \right)^T,$$

$$\{g\} = \left([D_{g1}][\bar{S}]\{q\}_e, [D_{g2}][\bar{S}]\{q\}_e \right)^T, \quad \{\mu\} = [D_\mu][\bar{S}]\{q\}_e. \quad (2.68)$$

Повна потенціальна енергія оболонкового скінченного елемента через вузлові переміщення визначена наступним чином

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \{q\}_e^T [\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] [D_\varepsilon] [\bar{S}] \{q\}_e \sqrt{a} dx^1 dx^2 + \\
& + \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \{q\}_e^T [\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL} \sqrt{a} dx^1 dx^2 + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} (\{\varepsilon\}^{NL})^T [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL} \sqrt{a} dx^1 dx^2 + \quad (2.69) \\
& + \frac{1}{2} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \{q\}_e^T [\bar{S}]^T [D_\mu]^T [\bar{B}] [D_\mu] [\bar{S}] \{q\}_e \sqrt{a} dx^1 dx^2 - \\
& - \{q\}_e^T \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \{P\}_e \sqrt{a} dx^1 dx^2 - \{q\}_e^T \{R\}_e,
\end{aligned}$$

де

$$[\bar{A}] = \frac{Eh}{1-\eta^2} \begin{bmatrix} a^{11}a^{11} & a^{11}a^{12} & a^{11}a^{12} & \eta a^{11}a^{22} + (1-\eta)a^{12}a^{12} \\ a^{11}a^{12} & \eta a^{12}a^{12} + (1-\eta)a^{11}a^{22} & a^{12}a^{21} & a^{12}a^{22} \\ a^{21}a^{11} & a^{21}a^{12} & \eta a^{21}a^{21} + (1-\eta)a^{22}a^{11} & a^{12}a^{22} \\ \eta a^{11}a^{22} + (1-\eta)a^{12}a^{12} & a^{22}a^{12} & a^{22}a^{12} & a^{22}a^{22} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

– матриця пружних сталих матеріалу оболонки;

$[\bar{B}] = \frac{h^2}{12} [\bar{A}]$ – матриця коефіцієнтів перетворення тензорних компонент;

$\{P\}_e$ – навантаження на елемент моделі. Вектор реакцій $\{R\}_e$ визначено

через вузлові компоненти

$$\begin{aligned}
\{R\}_e = & \{R_{--}^1 R_{--}^2 R_{--}^3 M_{--}^1 M_{--}^2 M_{--}^3 R_{++}^1 R_{++}^2 R_{++}^3 M_{++}^1 M_{++}^2 M_{++}^3 \\
& R_{+-}^1 R_{+-}^2 R_{+-}^3 M_{+-}^1 M_{+-}^2 M_{+-}^3 R_{++}^1 R_{++}^2 R_{++}^3 M_{++}^1 M_{++}^2 M_{++}^3\}_e^T. \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Рівняння рівноваги оболонкового скінченного елемента сформульовано із умови стаціонарності функціоналу його повної потенціальної енергії

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}_e} = & \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} ([\bar{S}]^T [D_\mu]^T [\bar{B}] [D_\mu] [\bar{S}] + \\
& + [\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] [D_\varepsilon] [\bar{S}]) \sqrt{a} \, dx^1 dx^2 \{q\}_e + \\
& + \frac{\partial}{\partial \{q\}_e} (\{q\}_e^T \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} [\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL} \sqrt{a} \, dx^1 dx^2 + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} (\{\varepsilon\}^{NL})^T [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL} \sqrt{a} \, dx^1 dx^2) - \\
& - \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \{P\}_e \sqrt{a} \, dx^1 dx^2 - \{R\}_e = 0.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

З рівняння (2.72) отримано вираз для визначення вузлових реакцій скінченного елемента

$$\begin{aligned}
\{R\}_e = & \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} ([\bar{S}]^T [D_\mu]^T [\bar{B}] [D_\mu] [\bar{S}] \{q\}_e + [\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] [D_\varepsilon] [\bar{S}] \{q\}_e + \\
& + [\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL} + \frac{\partial (\{\varepsilon\}^{NL})^T}{\partial \{q\}_e} [\bar{A}] [D_\varepsilon] [\bar{S}] \{q\}_e + \\
& + \frac{\partial (\{\varepsilon\}^{NL})^T}{\partial \{q\}_e} [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL}) \sqrt{a} \, dx^1 dx^2 - \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \{P\}_e \sqrt{a} \, dx^1 dx^2.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

У виразі (2.24) подвійний інтеграл

$$\int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} [\bar{S}]^T [D_\mu]^T [\bar{B}] [D_\mu] [\bar{S}] \sqrt{a} \, dx^1 dx^2 \{q\}_e$$

характеризує складову вузлових реакцій, які виникають в оболонковому скінченному елементі від його згинальних деформацій, а інтеграл

$$\int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \left([\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] [D_\varepsilon] [\bar{S}] \{q\}_e + [\bar{S}]^T [D_\varepsilon]^T [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \left((\varepsilon)^{NL} \right)^T}{\partial \{q\}_e} [\bar{A}] [D_\varepsilon] [\bar{S}] \{q\}_e + \frac{\partial \left(\{\varepsilon\}^{NL} \right)^T}{\partial \{q\}_e} [\bar{A}] \{\varepsilon\}^{NL} \right) \sqrt{a} \, dx^1 dx^2 \quad (2.74)$$

– складову вузлових реакцій від тангенціальних деформацій з урахуванням нелінійних деформацій елемента.

З урахуванням виразу (2.60) частинна похідна нелінійних тангенціальних деформацій від вузлових переміщень визначена за формулою

$$\frac{\partial \left(\{\varepsilon\}^{NL} \right)^T}{\partial \{q\}_e} = \left[\frac{\partial \varepsilon_{11}^{NL}}{\partial \{q\}_e} \quad \frac{\partial \varepsilon_{12}^{NL}}{\partial \{q\}_e} \quad \frac{\partial \varepsilon_{21}^i}{\partial \{q\}_e} \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}^i}{\partial \{q\}_e} \right]^T =, \quad (2.75) \\ = \left[G_{11} \{q\}_e \quad G_{12} \{q\}_e \quad G_{21} \{q\}_e \quad G_{22} \{q\}_e \right]$$

де

$$G_{11} = [\bar{S}]^T [D_{g1}]^T [D_{g1}] [\bar{S}], \quad G_{12} = [\bar{S}]^T [D_{g1}]^T [D_{g2}] [\bar{S}],$$

$$G_{21} = [\bar{S}]^T [D_{g2}]^T [D_{g1}] [\bar{S}], \quad G_{22} = [\bar{S}]^T [D_{g2}]^T [D_{g2}] [\bar{S}].$$

2.2. Чисельні методи розв'язання задачі пружної стійкості та нелінійної задачі статички тонкостінних стержнів відкритого профілю

2.2.1. Метод розв'язання рівнянь статичної рівноваги твердого деформівного тіла з урахуванням нелінійних членів тензора деформацій

Для розв'язання нелінійних систем алгебраїчних рівнянь застосовується метод Ньютона-Рафсона [78]. При умові довільності варіацій переміщень

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega = \{P\}. \quad (2.76)$$

Відповідно до даного методу розв'язання нелінійних систем алгебраїчних рівнянь на кожному кроці інтегрування вектор похибки $\{\psi\}^{(k)}$ визначається за формулою

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \Big|^{(k)} \cdot \{dq\} \approx 0; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (2.77)$$

де k – номер ітерації.

З рівняння (2.76) і з урахуванням вектора похибки маємо

$$\{\psi\}^k = \{P\} - \sum_e \int_{\Omega^e} \left([\tilde{B}]^T \{\sigma\} \right)^{(k)} d\Omega; \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.78)$$

Відповідно з (2.77), (2.78) і враховуючи, що $\partial\{P\} / \partial\{q\} = 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \Big|^{(k)} \{dq\} &= - \frac{\partial}{\partial \{q\}} \left(\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)} \{dq\} = \\ &= - \left(\sum_e \int_{\Omega^e} d[\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T d\{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Оскільки $d[B] \equiv 0$ і з урахуванням (2.37)-(2.41), (2.43), то

$$\begin{aligned}
 \sum_e \int_{\Omega^e} d[\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega &= \sum_e \int_{\Omega^e} d[\bar{B}]^T \{\sigma\} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} d[A][C]^T \{\sigma\} d\Omega = \\
 &= \sum_e \int_{\Omega^e} [C]^T d[A]^T \{\sigma\} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} [C]^T [S] d\{\theta\} d\Omega = \\
 &= \sum_e \left(\int_{\Omega^e} [G]^T [S][G] d\Omega \cdot \{dq\}_e \right).
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Тут введено матриці

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} [S] & 0 & 0 \\ 0 & [S] & 0 \\ 0 & 0 & [S] \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}; \tag{2.81}$$

$$[G] = [[G_1], [G_2], \dots, [G_m], \dots, [G_M]]^T;$$

$$[G_m] = \begin{bmatrix} p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} \end{bmatrix}^T. \tag{2.82}$$

де $m = 1, 2, \dots, M$ – номер вузла; M – кількість вузлів скінченно-елементної моделі конструкції.

В матриці $[S]$ компоненти напружень σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) визначаються відповідно до фізичних законів на основі вектора вузлових переміщень $\{q\}$.

Введемо глобальну симетричну матрицю геометричної жорсткості моделі

$$[K_\sigma] = \sum_e [K_\sigma]_e; \quad [K_\sigma]_e = \int_{\Omega^e} [G]^T [S][G] d\Omega. \quad (2.83)$$

З фізичного закону (2.78) маємо

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon\} = [D][\tilde{B}]\{dq\}_e. \quad (2.84)$$

Підставимо вираз (2.84) в (2.79), тоді отримаємо

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{d\sigma\} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D][\tilde{B}] d\Omega \cdot \{dq\}_e. \quad (2.85)$$

Введемо матрицю жорсткості, яка враховує великі переміщення

$$[\bar{K}]_e = \int_{\Omega^e} [\bar{B}]^T [D][B] d\Omega + \int_{\Omega^e} [B]^T [D][\bar{B}] d\Omega + \int_{\Omega^e} [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] d\Omega; \quad (2.86)$$

Тоді вираз (2.84) набуває виду

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{d\sigma\} d\Omega = \sum_e \left([K]_e + [\bar{K}]_e \right) \cdot \{dq\}_e. \quad (2.87)$$

Підставимо отримані вирази в (2.79), а результат в формулу (2.77). Тоді отримаємо наступний вираз

$$\left([K] + [\bar{K}] + [K_\sigma] \right)^{(k)} \{dq\} = \{\psi\}^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (2.88)$$

На практиці розглядаються не нескінченно малі прирости, а кінцеві значення. Тому в рівнянні (2.87) замість знаку диференціювання d застосовують знак приросту Δ , а замість (2.88) наступні вирази

$$([\mathcal{K}] + [\bar{\mathcal{K}}] + [\mathcal{K}_\sigma])^{(k)} \{\Delta q\} = \{\psi\}^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}. \quad (2.89)$$

Формула (2.89) відповідає одній ітерації алгоритму Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійної системи алгебраїчних рівнянь, який побудовано на основі методу Ньютона-Канторовича. У виразі (2.89) матриця нестабільна і формується на кожній ітерації. Для наведеного вище алгоритму доведені теореми існування і єдиності розв'язку. Існує модифікація цього методу, коли система алгебраїчних рівнянь оновлюється через кілька ітерацій.

Отримані вирази методу Ньютона-Рафсона можна застосовувати і при малих деформаціях. В цьому випадку матриці $[\bar{B}]$, $[\bar{\mathcal{K}}]$ і $[\mathcal{K}_\sigma]$ відсутні, а матриця $[\tilde{B}] = [B]$. Тоді вираз (2.89) спрощується до виду

$$[\mathcal{K}]^{(k)} \{\Delta q\} = \{\psi\}^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}. \quad (2.90)$$

2.2.2. Метод розв'язання задачі втрати стійкості твердого деформівного тіла

При постановці крайової задачі втрати стійкості твердого тіла розрізняють початковий і суміжний стан тіла. Початковий стан описується згідно підходу наведеного в 2.1.3. Для опису суміжного стану тіла система алгебраїчних рівнянь має вид (2.89). Але невідомо, який приріст навантаження треба прийняти, щоб навантаження досягнуло критичного значення. Зазвичай процес навантаження від початкового стану до втрати стійкості змінюється пропорційно коефіцієнта α і представляється формулою $P_j = P_j^* + \Delta P_j = \alpha P_j^*$, де додаткове навантаження

$\Delta P_j = (\alpha - 1)P_j^*$. Оскільки початковий стан є врівноваженим, то відповідно до формули (2.78) вектор похибки наближено буде дорівнювати $\{\psi\} = (\alpha - 1)P^*$. Компоненти від напружень $[K_\sigma]\{q\}$ теж будуть змінюватися пропорційно множнику β . У випадку малих деформацій $[\bar{K}] = 0$ і $\beta = \alpha$. Якщо деформації великі, але пружні, то $\beta \approx \alpha$.

Втрата стійкості може проходити по різним геометричним формам, для яких кількість коефіцієнтів α, β є теоретично нескінченною. Тоді з виразу (2.89) набуває виду

$$([K] + [\bar{K}] + \beta_i [K_\sigma])\{\Delta q\} = (\alpha_i - 1)\{P^*\}; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.91)$$

в якому у випадку малих деформацій матриця $[\bar{K}] = 0$, тобто

$$([K] + \beta_i [K_\sigma])\{\Delta q\} = (\alpha_i - 1)\{P^*\}.$$

Оскільки після втрати стійкості тіла нема єдиного геометричного стану тіла, то немає єдиного розв'язку системи (2.91). При втраті стійкості матриця цієї системи алгебраїчних рівнянь буде виродженою, а її детермінант буде дорівнювати нулю

$$\det([K] + [\bar{K}] + \beta_i [K_\sigma]) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.92)$$

При $\beta \approx \alpha$ кожне значення коефіцієнту β_i буде вказувати ступінь недовантаженості ($\beta_i > 1$) або перенавантаження ($\beta_i < 1$) тіла відносно i -го стану втрати стійкості.

2.2.3. Алгоритми вирішення крайової задачі з урахуванням геометричної нелінійності на основі метода Ньютона-Рафсона

Для вирішення нелінійних задач у програмному комплексі NASTRAN використовується метод Ньютона-Рафсона, відповідно до якого прийнято, що

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}, \quad (2.93)$$

де вектор нев'язки $\{\psi\}$ визначається як різниця між правою та лівою частинами рівнянь; k - номер ітерації. Тому із виразу (2.76) вектор нев'язки

$$\{\psi\}^{(k)} = (\{P\}_0)^{(k)} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)}, \text{ або}$$

$$\{\psi\}^{(k)} = (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.94)$$

З урахуванням (2.94) вираз (2.93) можна записати у вигляді ітераційної послідовності системи рівнянь

$$-\left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} = (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (2.95)$$

Відповідно до виразу (2.94) для послідовності СЛАР (2.95):

$$\left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} = \left(\frac{\partial}{\partial \{q\}} \left(\{P\}_0 - \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right) \right)^{(k)} \{dq\} = \left(\frac{\partial \{P\}_0}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} -$$

$$-\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial [\tilde{B}]^T}{\partial \{q\}_e} \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \frac{\partial \{\sigma\}_0}{\partial \{q\}_e} (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\} \quad (2.96)$$

Розглянемо окремо кожний вираз з правої частини (2.96).

Не дивлячись на значні переміщення і повороти, вважаємо, що деформації є відносно невеликими (до 2%). Врахуємо що

$$\left(\frac{\partial \{P\}_0}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\} \quad (2.97)$$

Оскільки $[\tilde{B}] = [B] + [\bar{B}]$, а $\partial[B]/\partial\{q\}_e = [0]$, то з урахуванням (2.42) та (2.33)... (2.37) перший інтеграл із правої частини (2.96):

$$\begin{aligned} & \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial [\tilde{B}]^T}{\partial \{q\}_e} \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial [\bar{B}]^T}{\partial \{q\}_e} \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \\ & = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial ([A][W])^T}{\partial \{q\}_e} \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T \frac{\partial [A]^T}{\partial \{q\}_e} \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \\ & \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T \{\sigma\}_0 [W] (d\Omega)_0 \right)^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

де врахована симетрія матриці $[\sigma]_0$ із компонент вектора $\{\sigma\}_0$; враховано $([A][W])^T = [W]^T [A]^T$, $\partial[W]/\partial\{q\}_e = [0]$, а також, що матриця $\partial[A]^T/\partial\{q\}_e = [W]$.

Введемо глобальну симетричну матрицю:

$$[K_\sigma]_0 = \sum_e ([K_\sigma]_0)_e, \text{ де } ([K_\sigma]_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [G]^T [\tilde{S}] [G] (d\Omega)_0 \quad (2.99)$$

Тоді з першого інтеграла правої частини (2.96), отримуємо

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial [\tilde{B}]^T}{\partial \{q\}_e} \{\sigma\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \sum_e \left(([K_\sigma]_0)_e \right)^{(k)} = ([K_\sigma]_0)^{(k)} \quad (2.100)$$

Розглянемо останній вираз з правої частини (2.97), визначимо що

$$\frac{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}_0}{\partial \{\boldsymbol{q}\}_e} = \frac{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}_0}{\partial \{\boldsymbol{\epsilon}\}} \frac{\partial \{\boldsymbol{\epsilon}\}}{\partial \{\boldsymbol{q}\}_e} = [\tilde{D}] \frac{\partial \{\boldsymbol{\epsilon}\}}{\partial \{\boldsymbol{q}\}_e} \quad (2.101)$$

Відповідно до (2.79)

$$\frac{\partial \{\boldsymbol{\epsilon}\}}{\partial \{\boldsymbol{q}\}_e} = [\tilde{B}] \quad (2.102)$$

Тому

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \frac{\partial [\boldsymbol{\sigma}]_0}{\partial \{\boldsymbol{q}\}_e} (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\} \quad (2.103)$$

Тоді визначаємо вираз для матриці

$$[\tilde{D}] = \frac{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}_0}{\partial \{\boldsymbol{\epsilon}\}} \quad (2.104)$$

Варіантів таких рівнянь стільки скільки моделей матеріалів, тому тут вирази для матриці $[\tilde{D}]$ не розглядаємо.

Позначимо:

$$\left([\tilde{K}]_0 \right)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] (d\Omega)_0, \quad [\tilde{K}]_0 = \sum_e \left([\tilde{K}]_0 \right)_e \quad (2.105)$$

Ліва частини першого виразу з (2.95) отримує вигляд:

$$-\left(\frac{\partial \{\boldsymbol{\psi}\}}{\partial \{\boldsymbol{q}\}} \right)^{(k)} \{dq\} = \left([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0 \right)^{(k)} \{dq\} = ([\underline{K}]_0)^{(k)} \{dq\}, \quad (2.106)$$

де введена матриці

$$[\underline{K}]_0 = [K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0. \quad (2.107)$$

Тоді вираз (2.95), тобто рівняння Ньютона-Рафсона, отримує вигляд:

$$[\underline{K}]_0 \{dq\} \approx \left(\{P\}_0 \right)^{(k)} - \left(\{R\}_0 \right)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (2.108)$$

Перший вираз (2.108) є лінійною системою алгебраїчних рівнянь для знаходження вектора $\{dq\}$ на $(k+1)$ -ї ітерації відповідно до методу Ньютона-Рафсона.

На нульовій ітерації, коли у тілі ще немає напружень і деформацій, компоненти рівняння (2.98) $(\{R\}_0)^{(0)} = \{0\}$; $[K_\sigma]_0 = [0]$, а

$$[\tilde{K}]_0 = [K]_0, \text{ де } [K]_0 = \sum_e [K_0]_e; [K_0]_e = \int_{(\Omega^e)_0} [B]^T [D][B](d\Omega)_0, \quad (2.109)$$

тому на нульовій ітерації (2.108) виражаються в

$$[K]_0 \{dq\} \approx (\{P\}_0)^{(0)}; \{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \{dq\}. \quad (2.110)$$

Реально розглядаються не нескінченно малі прирости, а кінечні. Тому в (2.108) і (2.110) замість знаку диференціалу d використовують знак приросту Δ :

$$([\underline{K}]_0)^{(k)} \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}; \quad (2.111)$$

$$[K]_0 \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0)^{(k)}; \{q\}^{(1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}. \quad (2.112)$$

Для алгоритму Ньютона-Рафсона доведена теорема існування і єдиності рішення. Алгоритм має велику швидкість сходимості. Його основний недолік – побудова нових матриць на кожному кроці ітерації.

Матрицю $[K_\sigma]$ називають матрицею геометричної жорсткості чи матрицею початкових напружень.

2.3. Моделювання геометричних недосконалостей тонкостінних стержнів відкритого профілю.

Алгоритм комп'ютерного моделювання геометричних недосконалостей тонкостінних стержнів відкритого профілю містить: розв'язання задачі стійкості стержня з ідеальною поверхнею (Buckling), формування нової геометрії стержня з урахуванням вибраної форми втрати стійкості із

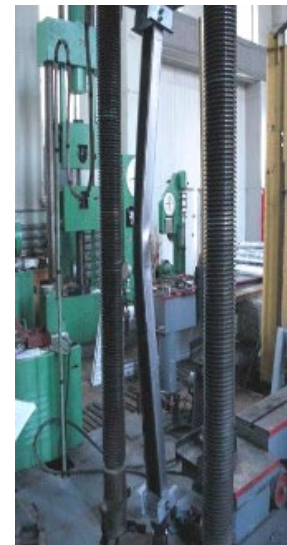
задаванням амплітуди недосконалості; побудову скінченно-елементної моделі стержня з недосконалостями форми.

Прикладами реалізації представлено алгоритму є дослідження стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю зі змодельованими недосконалостями форми, які наведені в статтях [66, 67]. Отримані результати розрахунку були підтверджені експериментально за допомогою гідравлічного пресу типу Р-100 у Випробувальному центрі будівельних конструкцій при кафедрі металевих та дерев'яних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури (рис. 2.2, б).

Розглянемо реалізацію розробленого алгоритму комп'ютерного моделювання геометричних недосконалостей на прикладі тонкостінного стержня відкритого профілю (розділ 4.1).



а



б

Рис.2.2. Конструкція покрівлі (а), випробування стержнів на стійкість за допомогою пресу (б).

Поділимо алгоритм комп'ютерного моделювання геометричних недосконалостей тонкостінних стержнів відкритого профілю на основні етапи.

Етап 1. Побудова скінченно-елементної моделі тонкостінного стержня з ідеальною поверхнею.

Спочатку задаємо геометрію поперечного перерізу стержня. Для цього використавши команду Geometry – Point задаємо кутові точки поперечного перерізу (рис. 2.3).

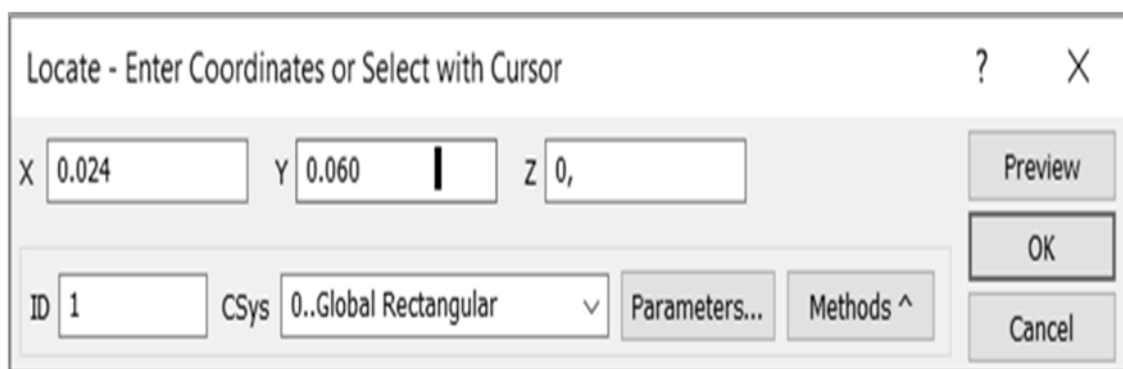


Рис.2.3. Діалогове вікно команди Geometry – Point.

У відкритому діалоговому вікні (рис. 2.3) вводимо послідовно координати кутових точок в декартовій системі координат

Точка 1 X: 0.024, Y: 0.060, Z: 0.0, Ok,

Точка 2 X: 0.000, Y: 0.060, Z: 0.0, Ok,

Точка 3 X: 0.000, Y: 0.000, Z: 0.0, Ok,

Точка 4 X: 0.200, Y: 0.000, Z: 0.0, Ok,

Точка 5 X: 0.200, Y: 0.060, Z: 0.0, Ok

Точка 6 X: 0.176, Y: 0.060, Z: 0.0, Ok.

Використавши команди Geometry – Curve - Line – Points з'єднаємо задані шість точок п'ятьма лініями і отримаємо геометрію поперечного перерізу стержня як показано на рис. 2.4.

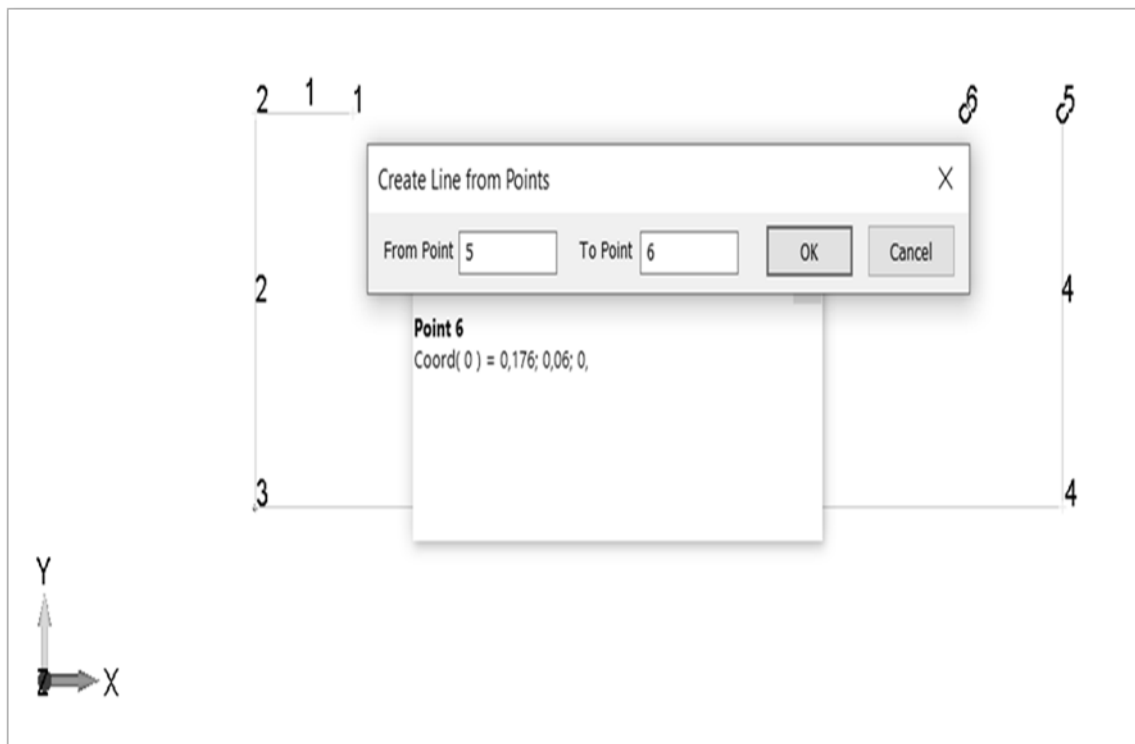


Рис. 2.4. Поперечний переріз стержня.

Застосовуємо команду Geometry – Surface – Extrude, Select All, Ok для створення серединної поверхні стержня.

Задаємо довжину стержня в діалоговому вікні (рис. 2.5):

Base X: 0; Y: 0; Z: 0; Tip X: 0; Y: 0; Z: -2.0, Ok, Cancel.

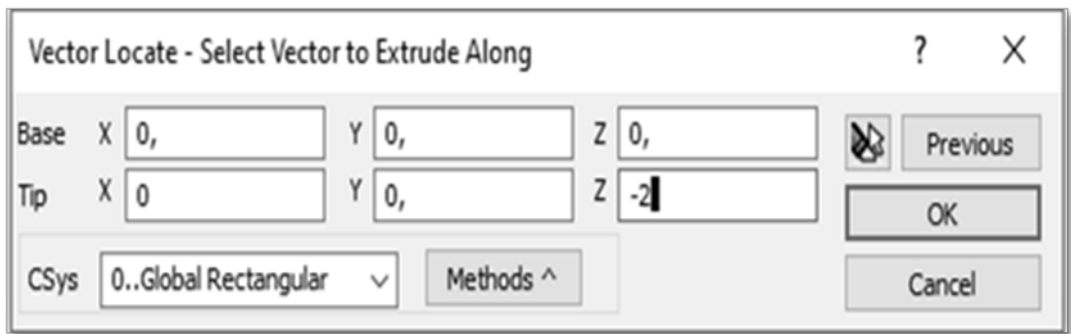


Рис. 2.5. Діалогове вікно створення серединної поверхні стержня.

На рис.2.6 представлена геометрія тонкостінного стержня відкритого профілю з ідеальною поверхнею.

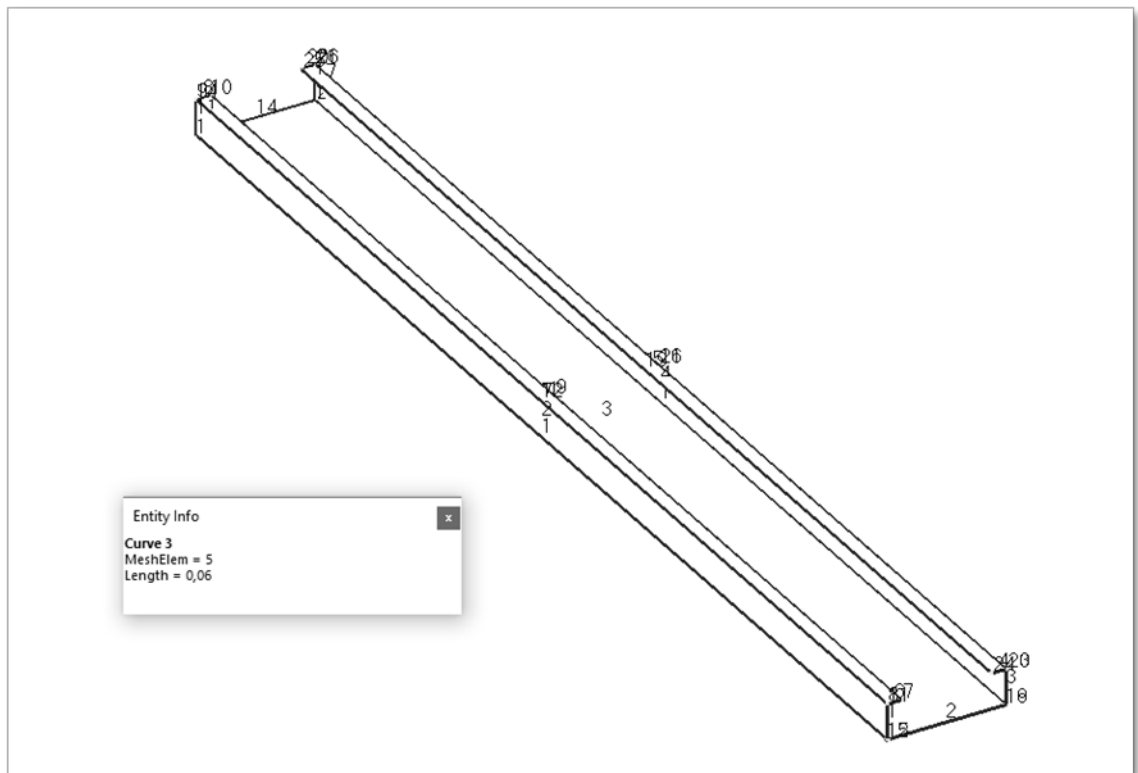


Рис. 2.6. Геометрія тонкостінного стержня відкритого профілю з ідеальною поверхнею.

Далі задаємо механічні характеристики матеріалу, які відповідають сталі С245 по ДСТУ 8539:2015 використавши команди Model – Material та діалогового вікна (рис. 2.7).

Для апроксимації серединної поверхні стержня у вигляді сукупності чотирикутних скінченних елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі “Plate”. За допомогою команди Model – Property задаємо властивості елемента. У відкритому діалоговому вікні (рис. 2.8) вводимо такі параметри: Title: «лист», Thickness: 0.002, Ok, у рядку Material оберемо задану раніше сталь 245, Ok, Ok, Cancel.

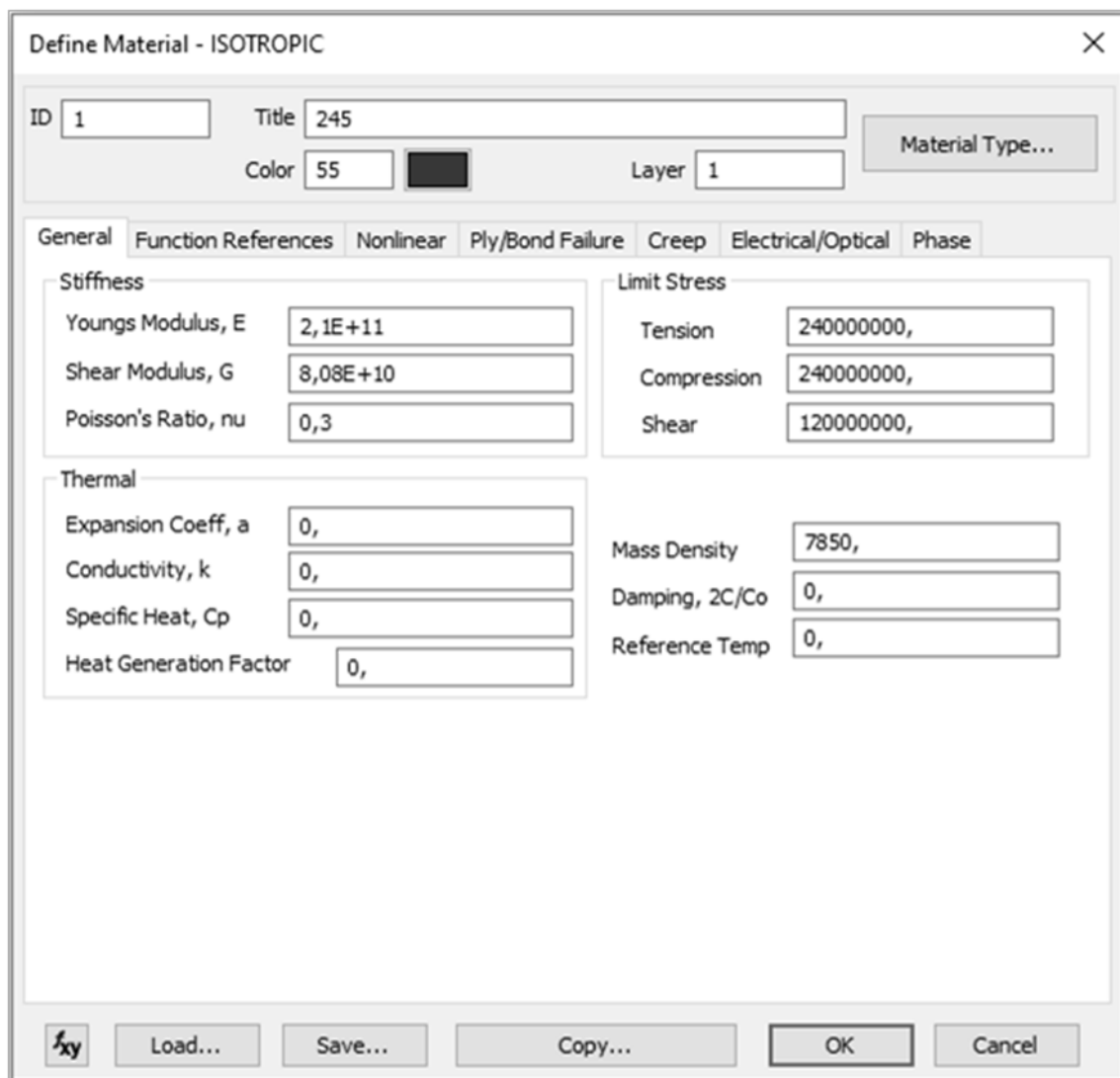


Рис.2.7. Діалогове вікно задавання характеристик матеріалу.

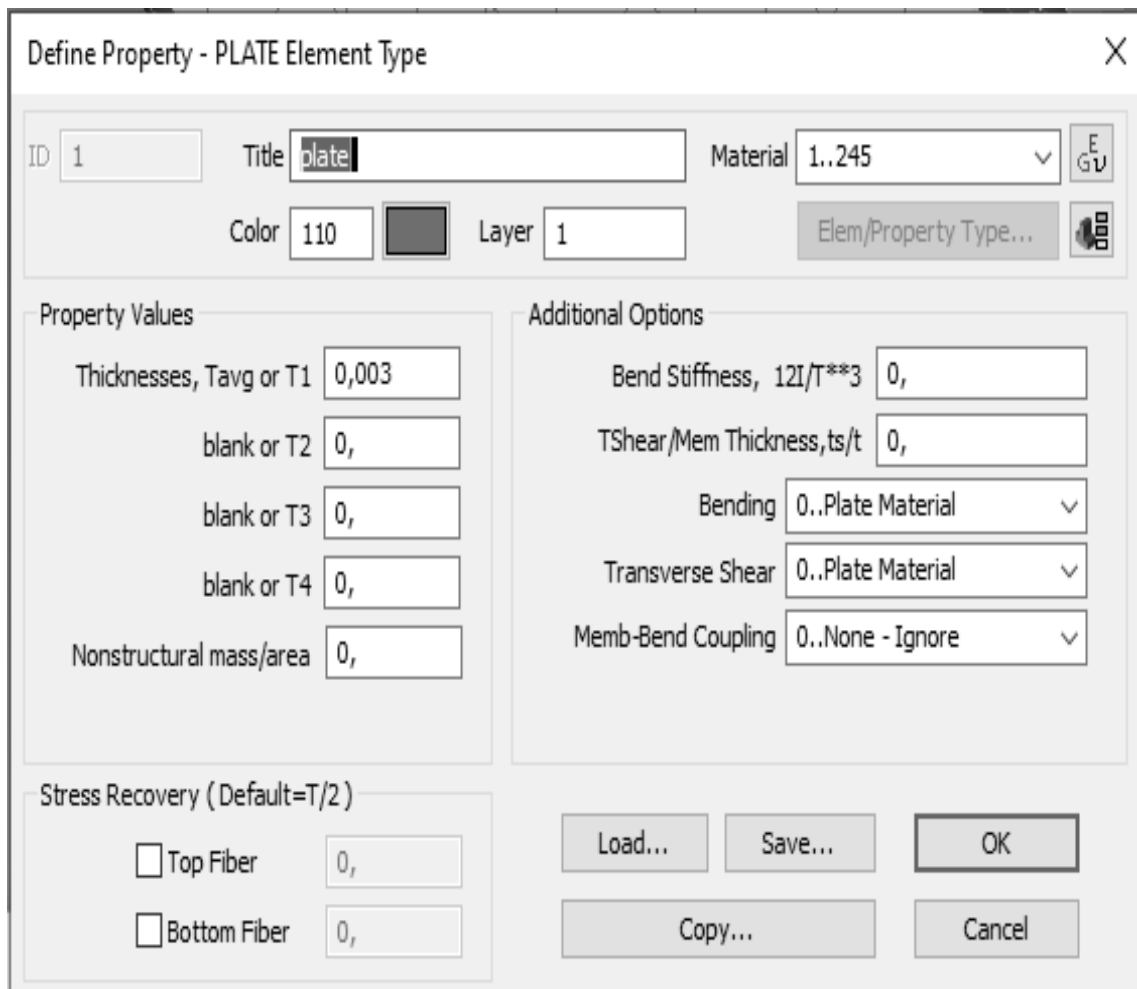


Рис. 2.8. Діалогове вікно задавання властивостей скінченного елемента типу “Plate”.

За допомогою команди Mesh – Geometry – Surface з відповідними параметрами, виконаємо розбиття поверхні на скінченні елементи що зображені на рис. 2.9.

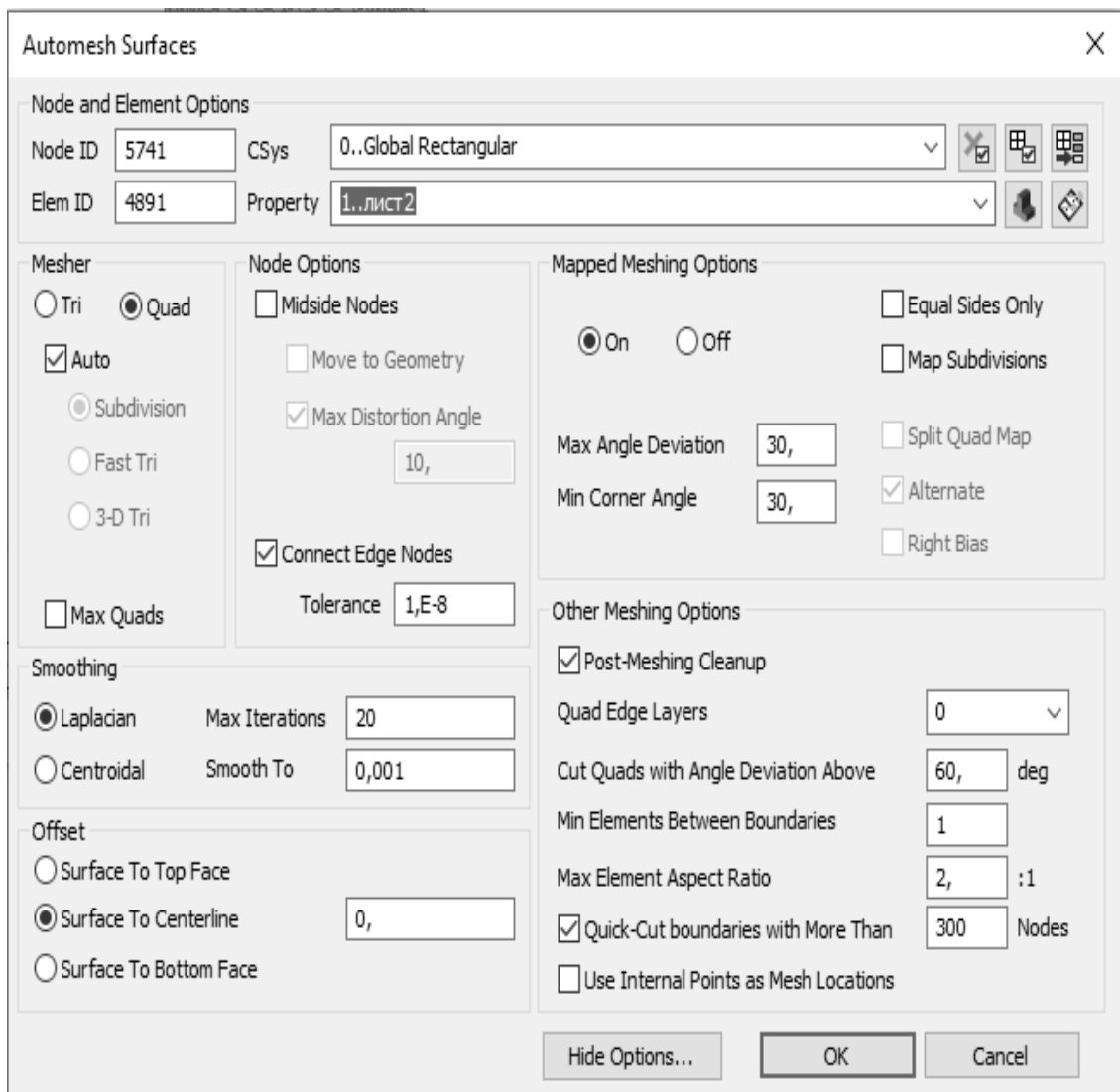


Рис. 2.9. Діалогове вікно створення скінченно-елементної сітки на серединній поверхні стержня.

За допомогою команди Model – Constraint – Nodal задаємо граничні умови в обраних вузлах моделі та визначаємо вид кріплення за використавши команду Model – Constraint – Nodal. На одному кінці стержня вводимо шарнірно-рухоме кріплення: T_x - так, T_y - так, T_z - ні, R_x - ні, R_y - так, R_z - так, а на протилежному – шарнірно-нерухоме: T_x - так, T_y - так, T_z - так, R_x - ні, R_y - так, R_z - так.

Навантаження у вигляді одиничної поздовжньої сили з модулем 1.0 Н задаємо у вузлах моделі, де введені шарнірно-рухомі опори. Використовуємо

команду Model – Load – Nodal, обираємо два вузли та задаємо: $F_x=0$, $F_y=0$, $F_z=-1$.

Тепер, після виконання вищенаведених дій, маємо сформовану скінченно-елементну модель тонкостінного стержня відкритого профілю з ідеальною поверхнею.

Етап 2. Виконуємо розрахунок на стійкість ідеального стержня в лінійній постановці (Buckling) методом Ланцоша для моделювання геометричної недосконалості стержня у вигляді біфуркаційної форми втрати стійкості.

У діалоговому вікні Model – Analysis, створюємо тип розрахунку «b1» з наступними параметрами: Type – Buckling, Analysis Type – Simcenter Nastran, Solve Using – Integrate solver.

Скориставшись командою Next входимо у діалогове вікно NASTRAN Output Requests і задаємо для параметру Number Desired кількість форм та критичних сил, які необхідні для дослідження. Командою Analyze запускаємо задачу на розрахунок. Після завершення розрахунку ми можемо скористатися панеллю "Post" для перегляду та аналізу результатів стійкості стержня: критичні значення навантаження та форми втрати стійкості. Наприклад, на рис. 2.10 зображена перша форма втрати стійкості ідеального стержня від дії повздовжньої сили $P_{кр}=95,387$ кН. Ця форма є формою загальною втрати стійкості стержня, яка прийнята у розрахунках за геометрії його початкової недосконалості.

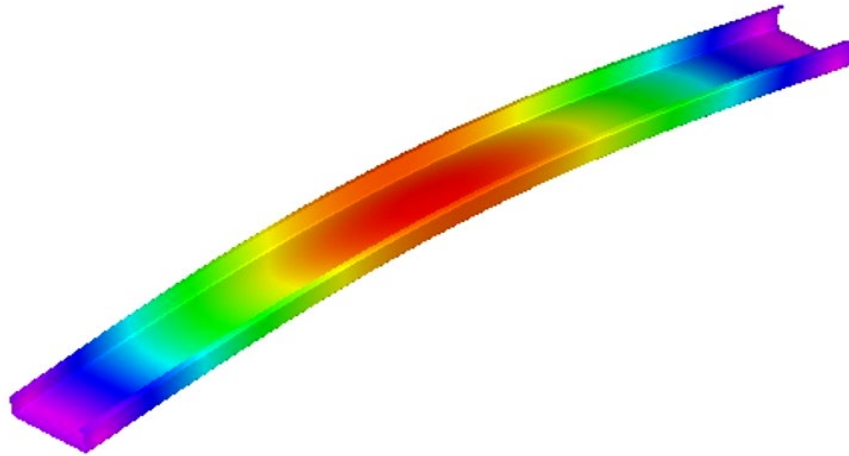


Рис.2.10. Перша біфуркаційна форма втрати стійкості ідеального стержня від дії повздовжньої сили.

Етап 3. За допомогою спеціально розробленої авторами програми, яка написана на мові ФОРТРАН90 і зберігається в Microsoft Developer Studio та використавши нейтральний файл FEMAP NASTRAN, формуємо скінченно-елементну модель стержня з геометричними недосконаlostями та з заданою амплітудою.

Використаємо для подальшого розрахунку першу форму втрати стійкості. Для цього видаляємо всі результати розрахунку, окрім результату розрахунку стійкості з номером 1 командою Delete – Output – Set.... Виконуємо експорт моделі у нейтральний файл: File – Export – Femap Neutral.

Запускаємо Microsoft Developer Studio (рис. 2.11) та створюємо новий проект: File – New з назвою “e200_60” та завантажуюмо всі файли програми у проект.

В головній програмі main.for задаємо такі параметри: ім'я вихідного нейтрального файлу, кількість строк нейтрального файлу (цей параметр можна дізнатися відкривши у текстовому редакторі нейтральний файл), кількість вузлів моделі, та параметр, який визначає максимальну амплітуду недосконаlostей δ відносно до товщини стінки стержня t .

Виконуємо компіляцію Build – Complete Main.for та запускаємо програму Build – Build e200_60.exe. У результаті виконання програми створюється нейтральний файл 403n, який містить нові координати вузлів стержня з геометричними недосконаlostями та заданою максимальною амплітудою. Далі за допомогою текстового редактора у нейтральному файлі виконуємо заміну блоку 403 на блок 403n. Після цього, відкоригований файл імпортуємо в середовище FEMAP NASTRAN як вхідну скінченно-елементну модель тонкостінного стержня відкритого профілю з заданою недосконаlostю форми і максимальною амплітудою.

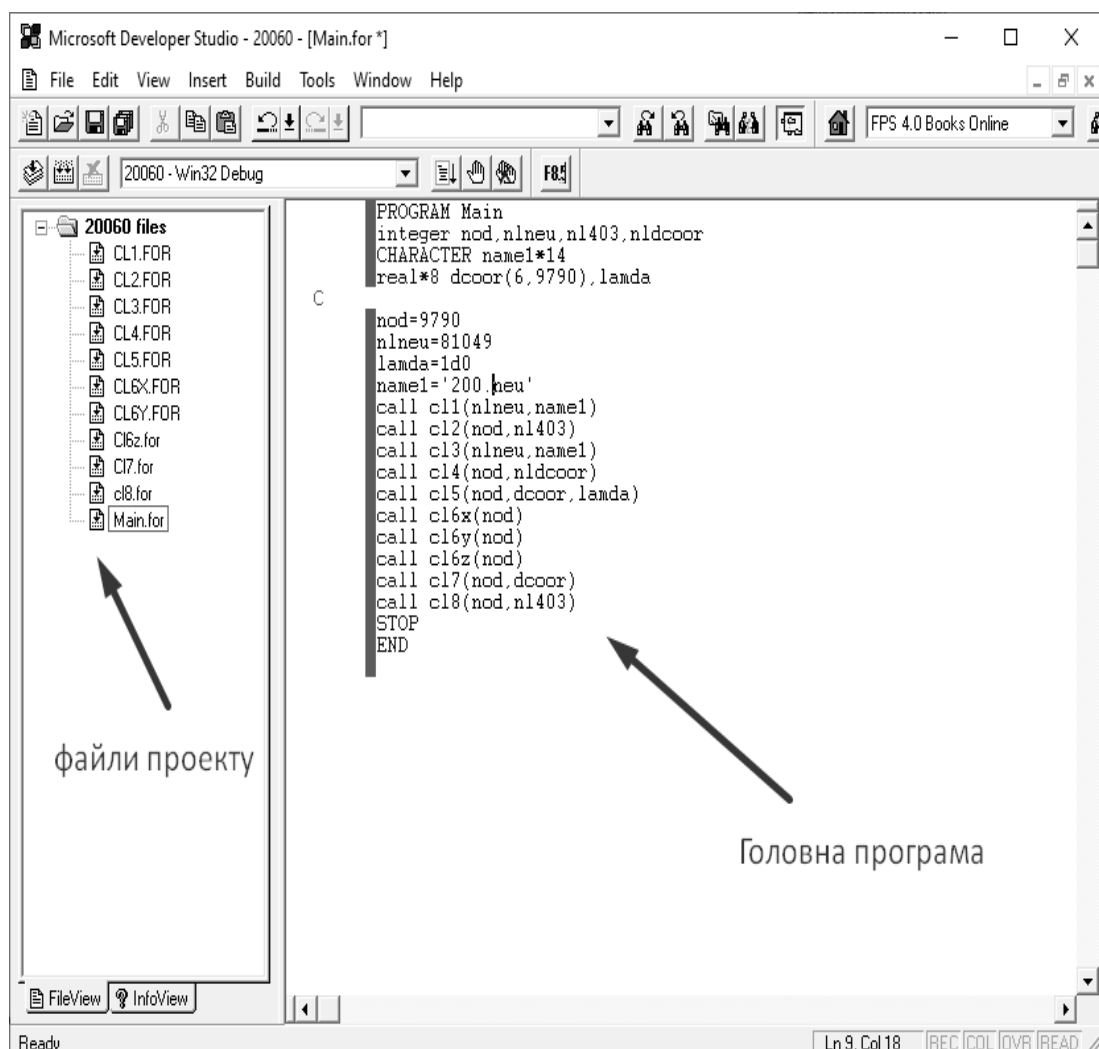


Рис. 2.11. Інтерфейс Microsoft Developer Studio.

Як приклад, розглянемо розв'язання геометричної нелінійної задачі статички (Nonlinear Static) для даного стержня. Згідно представленої чисельної методики застосовуємо обчислювальну процедуру комплексу NASTRAN. Створюємо новий тип розрахунку «b2 у діалоговому вікні Model – Analysis» з наступними параметрами: Type – Nonlinear Static, Analysis Type – Simcenter Nastran, Solve Using – Integrate solver. Розрахунки проводимо методом Ньютона-Рафсона.

В результаті даної процедура отримано деформації і напруження в елементах і вузлах скінченно-елементної моделі стержня, які зберігаються у відповідних вихідних файлах.

В комплексі можна побудувати залежності відгуку стержня (напруження в елементах, переміщення вузлів та інше.) від покрокової дії навантаження, дослідити докритичний, критичний (граничний) та закритичний стан стержня та визначити критичне (граничне) значення навантаження. Для цих цілей застосовуємо панель Post.

Як приклад, на рис. 2.12 зображена форма втрати стійкості тонкостінного стержня відкритого профілю з заданою максимальною амплітудою недосконалості $\delta=t$, яка отримана в результаті розв'язання методом Ньютона-Рафсона геометрично нелінійної задачі статички.

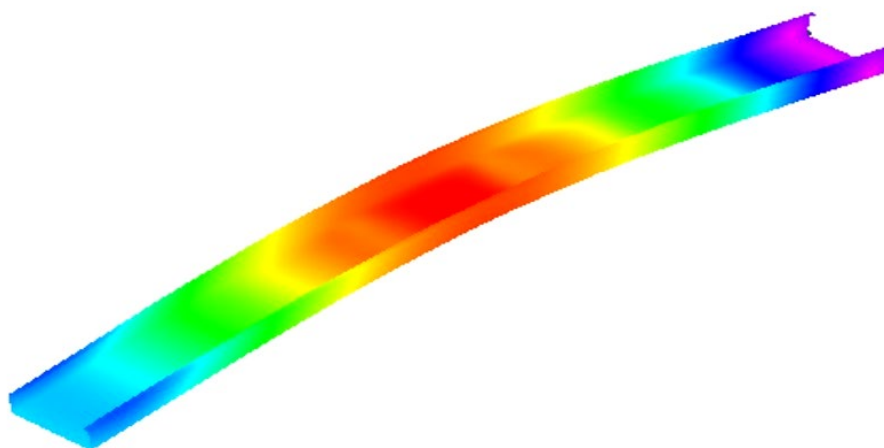


Рис..2.12. Форма втрати стійкості стержня з недосконалістю форми ($\delta/t= 1$) від дії повздовжнього навантаження.

На рис. 2.13 представлена залежність прогину стержня (w) від повздовжнього навантаження, яке задається через параметр навантаження β . З рисунку видно, що втрата стійкості стержня відбулась від дії повздовжньої сили, значення якої дорівнює $95,387 \cdot 0,822 = 78,396$ кН.

Таким чином, розроблений алгоритм комп'ютерного моделювання геометричних недосконалостей стержнів дозволяє подавати їх у вигляді різних форм втрати стійкості або форм деформування з задаванням амплітуди недосконалостей.

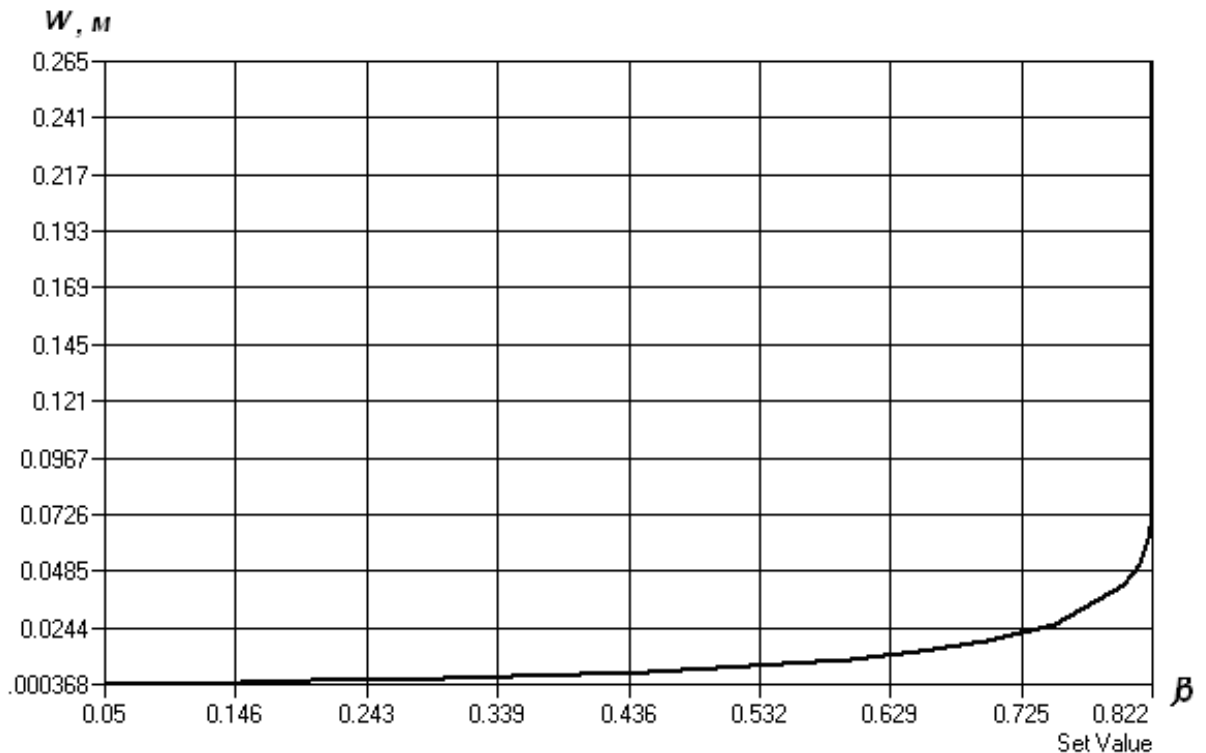


Рис. 2.13. Крива повздовжнього навантаження стержня з недосконалістю форми ($\delta/t=1$).

Представлена в розділі 2 чисельна методика базується на методі скінченних елементів та обчислювальних процедурах програмного

комплексу NASTRAN, вона дозволяє дослідити вплив геометричних недосконалостей тонкостінних стержнів відкритого профілю на критичні значення навантаження, форми втрати стійкості та їх напружено-деформований стан.

РОЗДІЛ 3

ТЕСТУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОГО ПІДХОДУ ЩОДО АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

3.1. Тестова задача 1. Дослідження ефективності комп'ютерного моделювання стержнів відкритого профілю у вигляді сукупності плоских скінченних оболонкових елементів.

Метою задачі є дослідження ефективності комп'ютерного моделювання стержнів відкритого профілю у вигляді сукупності плоских скінченних оболонкових елементів в задачах їх стійкості. Розглянута реальна конструкція покриття торговельного комплексу в м. Миколаєві, яка піддалась впливу пікового снігового навантаження (рис. 3.1).



а



б

Рис. 3.1. Технічний стан конструкцій покрівлі (а), снігове навантаження (б).

Основними несучими конструкціями торговельного комплексу є трьохпрольотні двоскатні сталеві рами перемінного перерізу з ухилом покрівлі рівним 6%. Рами розміщені з кроком 12 м та мають прольот 24 м, (рис. 3.2). Висота будівлі в рівні карнизного вузла поперечних рам складає 9,18 м, та 11,34 м – на рівні гребеневого вузла (рис. 3.3). Поперечні рами каркасу запроектовані з двотаврів зварного перемінного перерізу. Габарити поперечного перерізу колон знаходяться в межах 400-740 мм, ригелів – 500-740 мм.

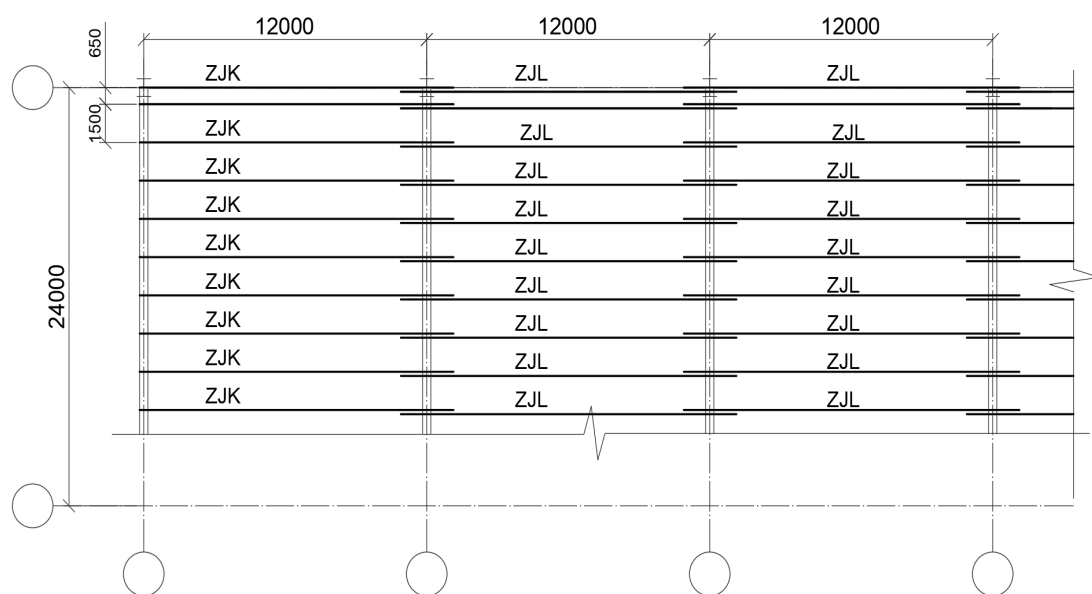


Рис. 3.2. Схема покриття торговельного комплексу в м. Миколаєві.

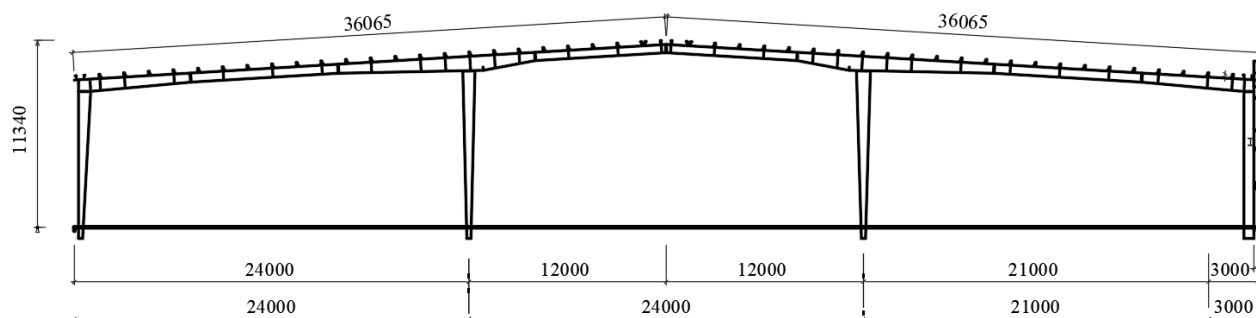


Рис. 3.3. Поперечний переріз торговельного комплексу в м. Миколаєві.

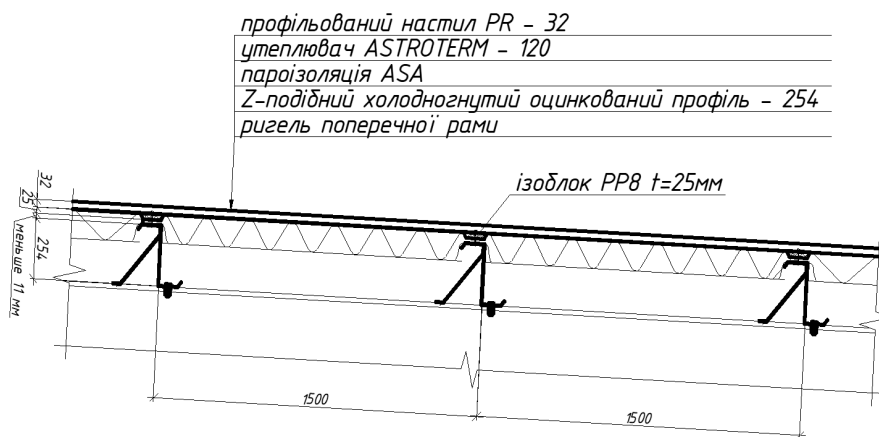


Рис. 3.4. Конструкція покрівлі.

Дослідженню підлягають покрівельні прогони, які виконані із Z-подібних холодногнутих оцинкованих профілів висотою 254 мм: типу «ZJL» у середніх прольотах і типу «ZJK» у крайніх прольотах (рис. 3.4, 3.5). Прогони розміщені з кроком 1500 мм, запроектовані за нерозрізною схемою та виготовлені зі сталі з межею текучості 355 МПа. В районах парапету, для компенсації додаткового снігового навантаження, крок прогонів зменшений до 600 мм.. Прогони з'єднуються по довжині внапусток і прикручуються до несучих конструкцій покриття за допомогою самонарізних гвинтів.



Рис. 3.5. Поперечні перерізи прогонів.

Досліджена стійкість тонкостінних прогонів з різними варіантами розкріплення до рам несучого сталевого каркасу (рис. 3.6) від дії вертикального навантаження в лінійній постановці методом Ланцоша. Перші

три варіанти відрізнялися способом розкріплення верхньої полицки стержнів: не розкріплена (а), розкріплена за допомогою пружної в'язі (б), розкріплена повністю (в). При цьому для забезпечення геометричної незмінюваності системи одна крайня опора приймалась шарнірно-нерухомою, інші – шарнірно-рухомими. У четвертому варіанті (г) задано повне розкріплення полицки стержня з площини при шарнірно нерухомих опорах.

Шарнірно-рухомі опори (рис. 3.6, а, б, в) задані шляхом обмеження переміщень по напрямкам x , y трьох вузлів нижньої полицки скінченноелементної моделі прогону у місцях його примикання до ригеля рами і звільнення переміщень вздовж власної осі - z . У шарнірно-нерухомих опорах у свою чергу обмежувались переміщення по всім трьом напрямкам x , y і z (рис. 3.6, г). У скінченноелементну модель введені стержневі елементи для моделювання розкріплена за допомогою пружній в'язей. Ці елементи за жорсткістю, геометрією та розташування відповідають реальній конструкції (рис. 3.6, б). Повне розкріплення верхньої полицки досягалося введенням обмеження переміщень вузлів верхньої полицки по осі x (рис. 3.6, в, г); таке розкріплення класифікується за п. 5.16 ДБН [31] як повне.

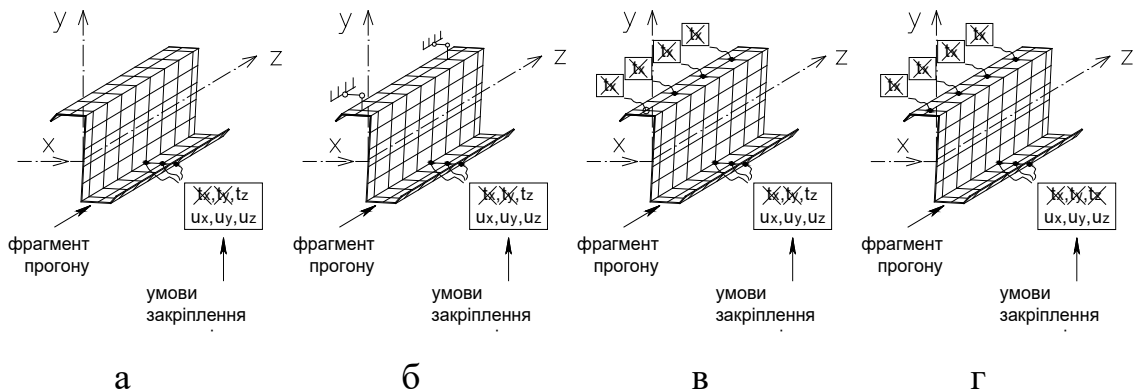


Рис. 3.6. Чотири варіанти розкріплення прогонів.

Скінченно-елементна модель конструкції сформована за допомогою обчислювального комплексу NASTRAN. Розглянуто нерозрізний п'ятипрольотний прогон (довжина прольоту – 12 м) з відповідними до

проекту Z-подібними холоднодеформованими оцинкованими профілями висотою 254 мм (рис. 3.5). Полички, стінки і відгини змодельовані плоскими чотирикутними скінченними елементами розмірами 5x5 см з шістьма ступенями вільності у вузлі. Модель містила 13200 елементів і 14440 вузлів. За матеріал приймалась сталь з механічними характеристиками: $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0,3$, $R_y=355$ МПа і межею текучості 355 МПа. Вертикальне навантаження задавалось як сумарне граничне розрахункове навантаження на покрівлю згідно проекту 150 кг/мп.

Результати розрахунків наведено в табл. 3.1. Пружне розкріплення полички на (3,8 - 16,7) % зменшило критичну силу по відношенню до варіанта з повним розкріпленням. Вплив закріплення опор на стійкість стержня є значним: критична сила при шарнірно-нерухомих опорах в тричі вища ніж з шарнірно-рухомими при інших рівних умовах.

Таблиця 3.1

Коефіцієнти втрати стійкості п'ятипрольотного прогону

Форми втрати стійкості	Варіанти розкріплення			
	1	2	3	4
Перша	0,15	0,557	0,536	1,792
Друга	0,171	0,624	0,75	1,793
Третя	0,225	0,708	0,75	2,037

З метою дослідження даної особливості проведена серія розрахунків для порівняння втрати стійкості прогону з різною кількістю прольотів, товщиною листа і способу закріплення серединних опор при умові повного розкріплення верхньої полички профілю. Коефіцієнти втрати стійкості прогону наведено в табл. 3.2.

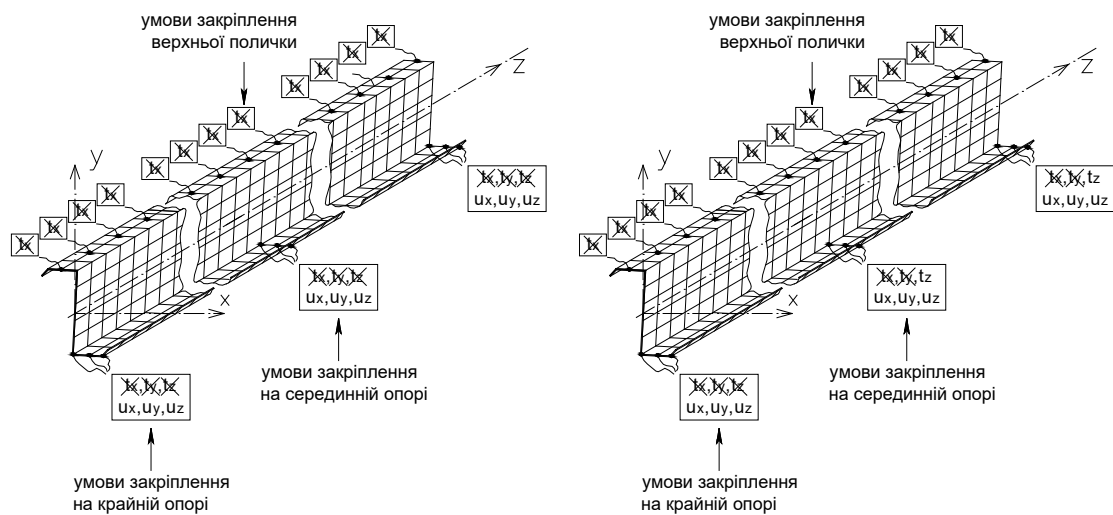


Рис. 3.7. Шарнірно-рухоме і шарнірно–нерухоме розкріплення прогонів

Таблиця 3.2

Коефіцієнти втрати стійкості прогону

Товщина листа, мм	Спосіб закріплення серединних опор	Кількість прольотів				
		1	2	3	4	5
2,3	шарнірно-рухомі	1,078	0,571	0,462	0,447	0,431
	шарнірно-нерухомі	0,966	1,053	1,216	1,219	1,221
2,9	шарнірно-рухомі	1,771	0,772	0,635	0,620	0,601
	шарнірно-нерухомі	1,8865	1,6784	1,937	1,9442	1,946
3,5	шарнірно-рухомі	2,663	1,003	0,841	0,827	0,806
	шарнірно-нерухомі	2,848	2,426	2,783	2,797	2,800
4,1	шарнірно-рухомі	3,772	1,267	1,085	1,074	1,051
	шарнірно-нерухомі	3,875	3,240	3,644	3,659	3,662

У табл. 3.2 наведені результати розрахунків, а саме: перші форми втрати стійкості, при одно-, дво-, трьох-, чотирьох– і п'ятипрольотній схемах. Як видно з рис. 3.8 для багатопрольотних схем є принципова різниця між формами втрати стійкості для шарнірно-нерухомих і шарнірно-рухомих випадків. У першому випадку втрата стійкості проходить у вигляді зминання нижньої полицки у місці виникнення максимального згинального моменту. У

другому випадку зминання на опорах не відбувається, проте прогон втрачає стійкість за загальною формою при значно вищих критичних силах. Форми втрати стійкості для однопрольотних схем суттєво відрізняються від багатопрольотних. Відповідні форми втрати стійкості прогону з різною кількістю прольотів представлено на рис.3.8.

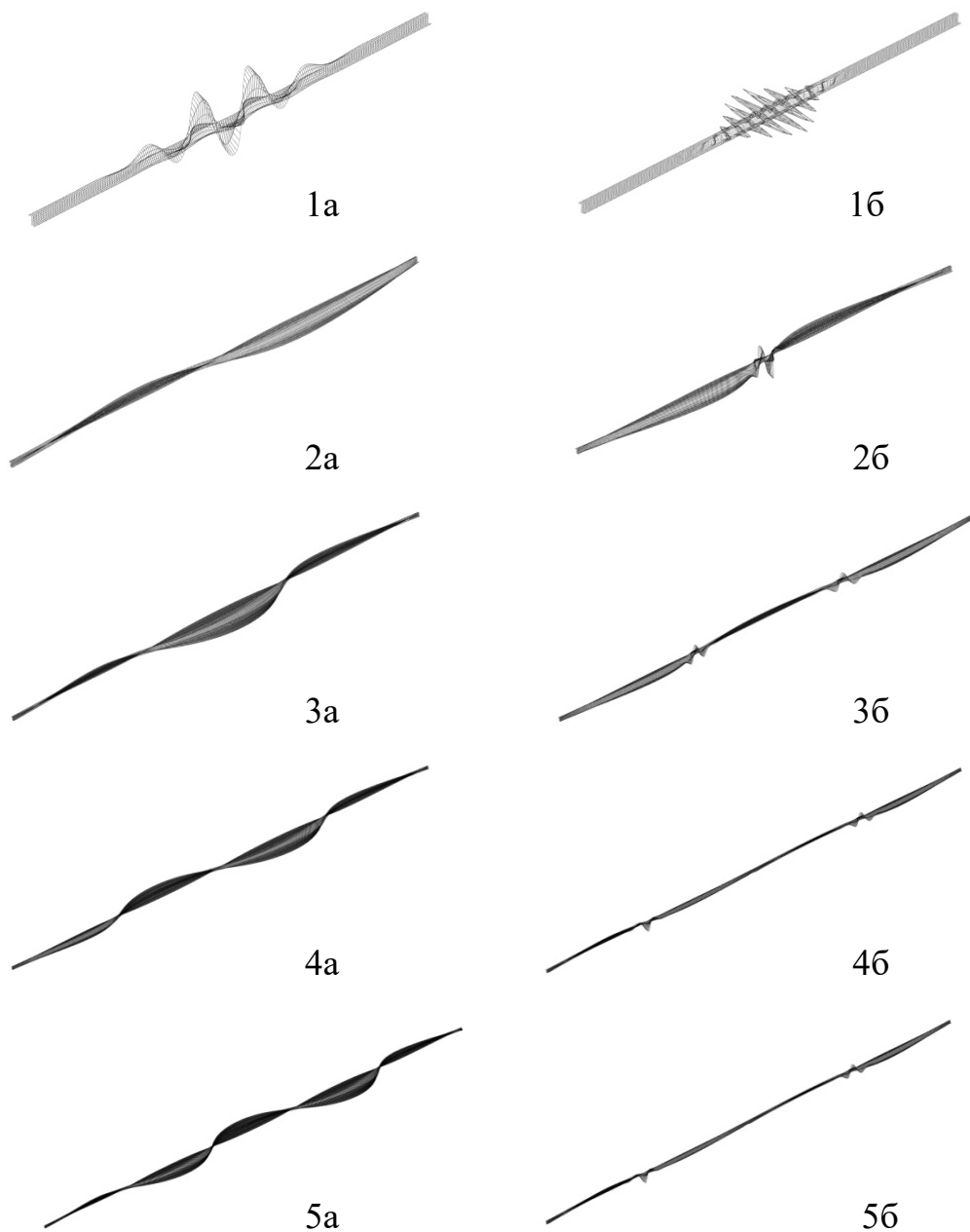


Рис. 3..8. Форми втрати стійкості прогонів з різною кількістю прольотів шарнірно-нерухомих (а) та шарнірно-рухомих розкріпленнях серединних опор (б)

Порівняння критичних значень навантаження з результатами, отриманими розрахунками по діючим державним нормам [34], а також по Eurocode [129], показало їх достатню збіжність з похибкою 2-3%.

3.2. Тестова задача 2. Порівняльний аналіз результатів дослідження стійкості тонкостінного стержня відкритого профілю з результатами інших авторів.

Досліджена стійкість тонкостінного стержня відкритого профілю з геометричними недосконаlostями та двома варіантами товщини полиць і стінки стержня (рис. 3.9) від дії осевого стиснення. Поперечний переріз стержнів зображено на рис. 3.9, стержні мають однакову довжину – 2000 мм та відрізняються товщинами стінок: $t=1,1$ мм та $t=3$ мм відповідно. Розрахункова схема стержнів являє собою вертикальний стержень жорстко закріплений знизу та шарнірно-рухомий – зверху.

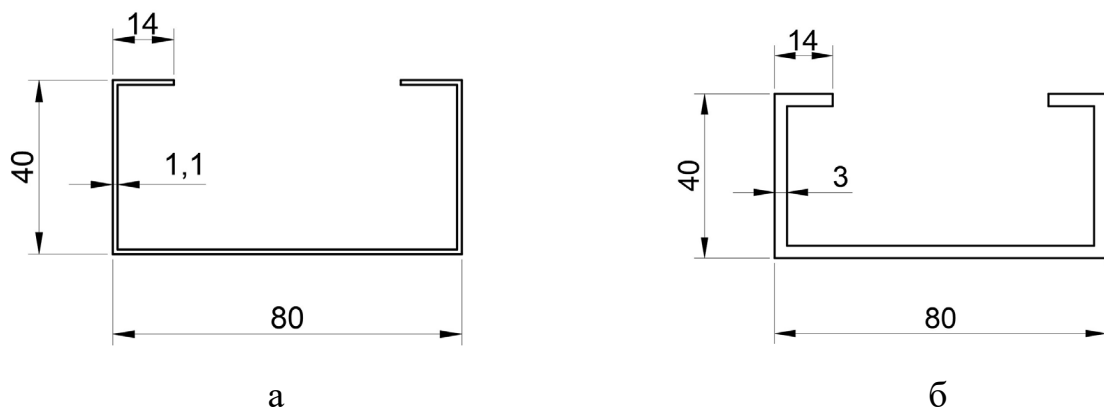


Рис. 3.9. Профілі стержнів з С 80/40/14/1,1 (а) і С 80/40/14/3,0 (б).

Геометричні параметри тонкостінних стержнів С 80/40/14/1,1 і С 80/40/14/3,0 наведено в табл. 3.3.

Геометричні характеристики стержнів відкритого профілю

Параметр		Профіль		Одн. вимі-ру
		C80/40/14/1,1	C80/40/14/3	
A	Площа поперечного перерізу	2,02	5,28	см ²
I _y	Момент інерції відн. центр. осі y1	4,873	11,501	см ⁴
I _z	Момент інерції відн. центр. осі z1	21,041	52,338	см ⁴
i _y	Радіус інерції відносно осі y1	1,553	1,476	см
i _z	Радіус інерції відносно осі z1	3,228	3,148	см
W _{u+}	Макс. момент опору відн. осі u	5,26	13,085	см ³
W _{v+}	Макс. момент опору відн. осі v	3,363	7,913	см ³
W _{v-}	Мін. момент опору відн. осі v	1,91	4,516	см ³
z _m	Координата центра мас по осі z	1,449	1,453	см

За механічні характеристики матеріалу (оцинкована сталь) приймалися: межі текучості $R_y=321,2$ МПа і міцності $R_u=402,34$ МПа, модуль пружності $E=205300$ МПа, коефіцієнт Пуасона $\eta=0,29$ та модуль зсуву $G=79600$ МПа. Стержень жорстко закріплений знизу та шарнірно-рухомий зверху.

Побудова скінченно-елементних моделей стержнів відкритого профілю виконана в програмному комплексі NASTRAN [78]. Стінка, полицки та відгини стержнів змодельовано як сукупність чотирьохкутних оболонкових елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі. Геометричні недосконалості задано у вигляді першої загальної форми втрати стійкості ідеального, яка отримана з лінійного розрахунку на стійкість методом Ланцоша (рис. 3.10).

Геометричні недосконалості змодельовано у вигляді першої загальної біфуркаційної форми втрати стійкості ідеального стержнів, яка отримана з лінійного розрахунку стійкості. Амплітуда недосконалостей форми стержнів формувалась пропорційно до товщини стінки $\delta/t=[0,25; 0,5; 1]$.

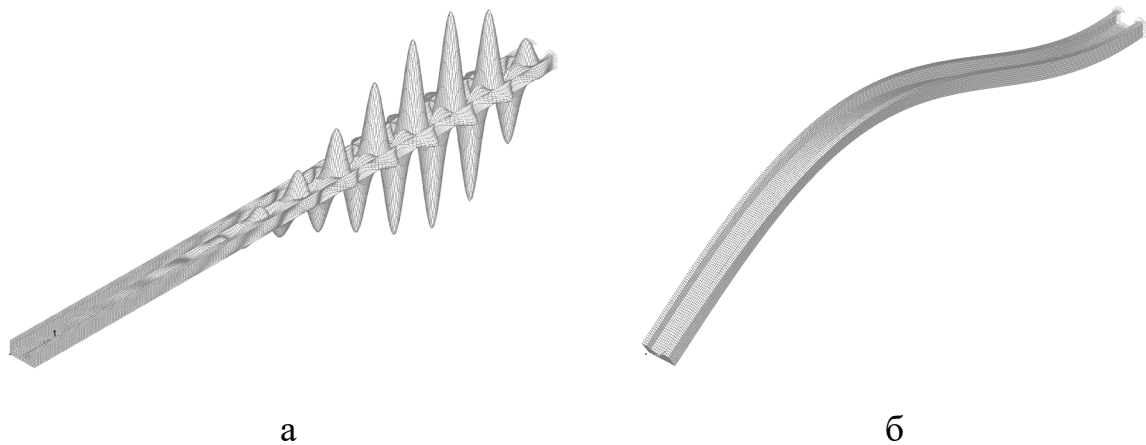


Рис. 3.10. Моделі геометричної недосконалості стержня:
С 80/40/14/1,1 (а), С 80/40/14/3 (б).

Чисельні розрахунки стійкості стержнів відкритого профілю виконано в лінійній постановці, методом Ланцоша, і нелінійній, методом Ньютона-Рафсона, за допомогою обчислювальних процедур комплексу NASTRAN. За результатами розрахунків отримані критичні значення навантаження і відповідні форми деформації стержнів з ідеальною поверхнею та з урахуванням недосконалостей форми з різними амплітудами. Вплив недосконалостей визначено для стержнів з максимальними амплітудами, які приймалися пропорційними товщини t стержнів: $0,25t$, $0,5t$ та $1t$.

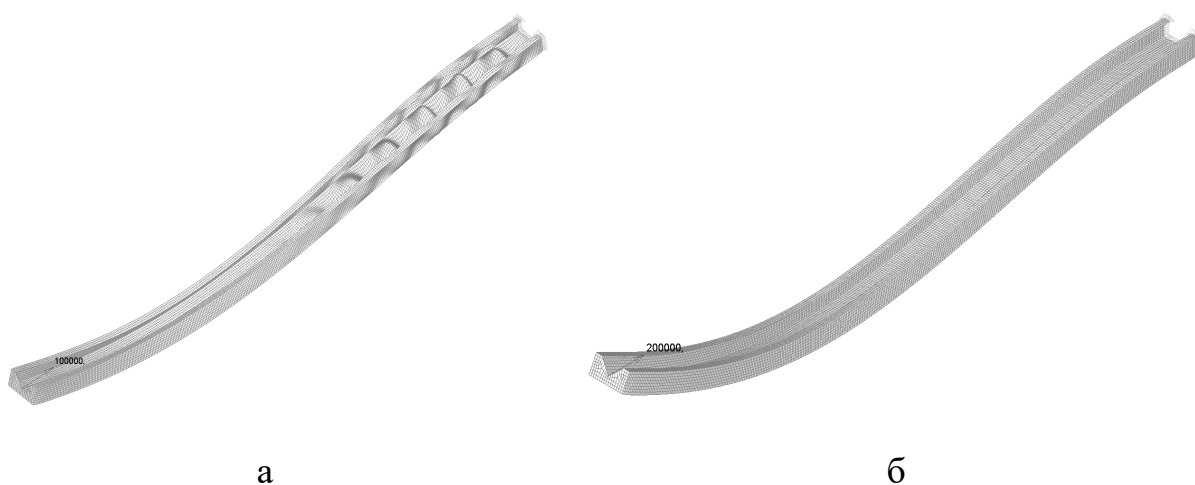


Рис. 3.11. Форми деформування стержня з амплітудою недосконалості t : С 80/40/14/1,1 (а), С 80/40/14/3 (б).

Критичні значення стискаючої сили для всіх стержнів наведено в табл. 3.4. На рис. 3.11 зображені форми деформування стержнів при втраті стійкості, отриманих в нелінійній постановці методом Ньютона-Рафсона.

Для порівняння результатів розрахунків взяті результати дослідження стійкості стержнів з аналогічними геометричними і механічними характеристиками (табл. 3.3 та табл. 3.4), які отримані у 2016 році [157] в лабораторії будівельного факультету Загребського університету (Хорватія). Випробувань стійкості стержня проводилися з використанням статичного преса. До торців вертикально встановленого стержня були приварені сталеві пластини які забезпечували передачу зосередженого навантаження та жорстке кріплення у нижньому торці. Навантаження передавалось ступінчасто. Приріст на кожному кроці навантаження відрізнявся в залежності від товщини стінки стержнів: для зразків з товщиною стінки $t=1,1$ мм приріст складав $\Delta F=10$ кН, для зразка з товщиною стінки $t=3,0$ мм – $\Delta F=30$ кН. Втрата стійкості стержня з поперечним перерізом 80/40/14/1,1 відбулась при навантаженні $F_{\text{exp}}=30,8$ кН при цьому значної локальної деформації зазнала стінка стержня. Для стержня з перерізом 80/40/14/3 значення критичної сили склало $F_{\text{exp}}=144,5$ кН. Форма втрати стійкості такого стержня була подібна до загальної форми втрати стійкості. Результати лабораторних випробувань наведено в табл. 3.4.

Дослідниками будівельного факультету Брестського державного технічного університету (Білорусь) виконано порівняння результатів лабораторних дослідження [62] з аналітичними та чисельними розрахунками. Аналітичні розрахунки виконані із застосуванням програмного комплексу скінченно-елементного аналізу ABAQUS а чисельні - за формулами (3.1) теорії тонкостінних стержнів. Результати розрахунків наведено в табл. 3.4.

$$F_{cr} = (y_A^2 + z_A^2 - r^2) \cdot F^3 + [(F_y + F_z + F_\omega) \cdot r^2 - z_A^2 \cdot F_y - y_A^2 \cdot F_z] \cdot F^2 - r^2 \cdot (F_y \cdot F_z + F_y \cdot F_\omega + F_z \cdot F_\omega) \cdot F + F_y F_z F_\omega r^2 = 0 \quad (3.1)$$

тут величини F_z, F_y, F_ω визначаються за:

$$F_z = \frac{\pi^2 EI_z}{(\eta l)^2}; \quad F_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(\eta l)^2}; \quad F_\omega = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{(vl)^2} + GI_t \right); \quad r^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_A^2 + z_A^2.$$

Для стержня який жорстко закріплений внизу та шарнірно-рухомий вверху: $\eta=0,7, v=0,7$.

Таблиця 3.4

Порівняння отриманих результатів

Тип дослідження	Амплітуда недосконалостей	Критичні значення стискаючої сили, кН	
		С 80/40/14/1,1	С 80/40/14/3
Експериментальне дослідження			
F_{exp}	0	30,8	144,3
Аналітичні і чисельні дослідження ідеального стержня			
F_{theory}	0	42,6	145,5
F_{FEM}	0	39,38	270,08
F_{NL0}	0	39,375	135,50
F_{NL025}	0,25 t	38,875	135,495
F_{NL05}	0,5 t	38,871	135,483
F_{NL1}	1,0 t	38,869	135,412

Виявлено, що для стержня товщиною 1,1 мм критичні значення стискаючих сил менші за величини, які обраховані аналітичним та чисельним методами, на (8,7-8,75) % та (1,2-1,3) %, відповідно. Різниця з експериментальними даними складає 26,2%, що можна пояснити значною

локальною деформацією стінки стержня в даному експерименті. Для стержня товщиною 3 мм різниця між теоретичними та чисельними значеннями критичних сил складає 6,9% та 49,5%, а між експериментальними – 6,1%. Збільшення амплітуди недосконалостей не значно вплинуло на значення критичної стискаючої сили.

РОЗДІЛ 4

ОЦІНКА ВПЛИВУ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ НА НЕЛІНІЙНУ ПОВЕДІНКУ І СТІЙКІСТЬ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

4.1. Стійкість стержня відкритого профілю з різними моделями геометричних недосконалостей від дії повздовжньої сили.

Чисельна методика, що представлена в розділі 2, застосована до дослідження впливу різних моделей геометричних недосконалостей стержня відкритого профілю на стійкість від дії повздовжньої сили. На рис. 4.1 показана геометрія поперечного перерізу стержня відкритого профілю довжиною 2 м, накладені на нього граничні умови та діюча повздовжня сила.

За допомогою обчислювального комплексу NASTRAN сформована скінченно-елементна модель стержня. Стінка, полицки і відгини стержня моделювалися плоскими скінченними чотирикутними елементами типу Plate розмірами 10x10 мм. Всього у моделі 6400 елементів і 6633 вузлів. Як матеріал використано сталь Ст3кп по ДСТУ 2651:2005 з наступними механічними характеристиками: $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0,3$. Прийнятий матеріал відповідає матеріалу реального стержня.

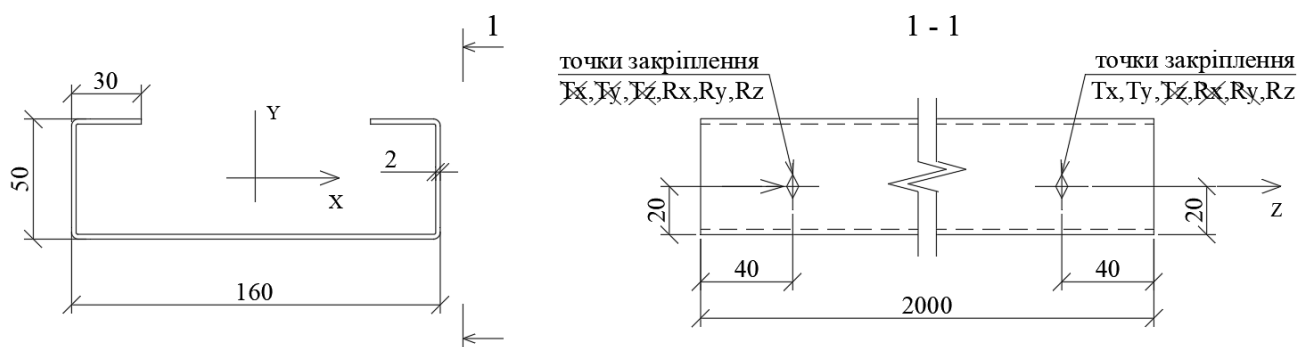


Рис. 4.1. Профіль стержня, повздовжнє навантаження та граничні умови.

Результати попередніх розрахунків стержня у лінійній постановці методом Ланцоша показали, що критичні сили змінюються плавно (рис. 4.2),

різниця між першою критичною силою $F_{cr}^{0-1} = 51,5 \text{ кН}$, яка відповідає місцевій формі втрати стійкості, і 15-ю $F_{cr}^{0-15} = 66,02 \text{ кН}$, яка відповідає загальній формі, складає 22%. На рис. 4.2 у вигляді гістограми наведена множина критичних сил для досліджуваного стержня. На гістограмі по осі абсцис відкладений номер форми втрати стійкості, а по осі ординат відповідні значення критичних сил. Для подальших досліджень вирішено взяти 1-шу та 15-ту форми втрати стійкості як найбільш характерні.

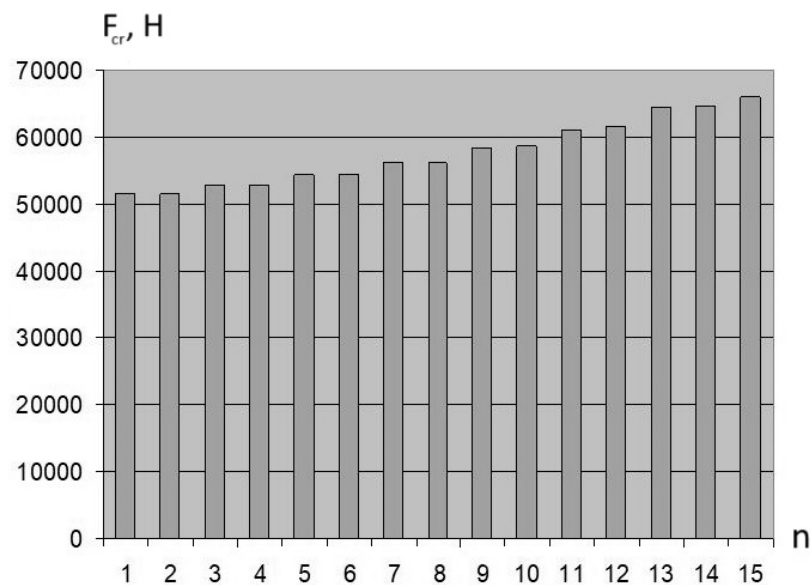
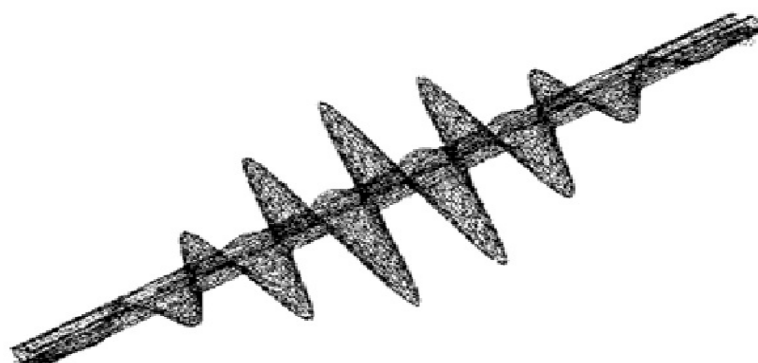


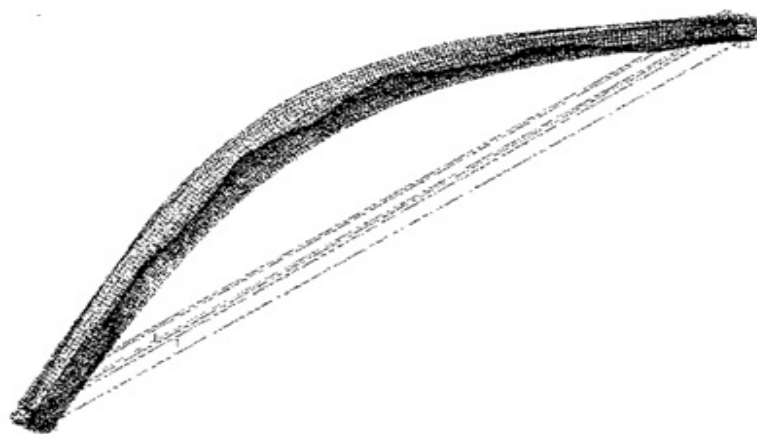
Рис. 4.2. Множина критичних сил

Розрахункову модель недосконалого стержня побудовано за допомогою обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу NASTRAN та спеціальної розробленої програми, в якій для формування нових координат вузлів моделі стержня компоненти вектора подібного до форми втрати стійкості додаються до координат серединної поверхні стержня. Програма написана на мові ФОРТРАН і орієнтована на комплекс NASTRAN. Недосконалість форми моделювалась амплітудою $\delta = [0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5]t$ у вигляді місцевої (рис. 4.3, а) і загальної (рис. 4.3, б) біфуркаційних форм втрати стійкості стержня з ідеальною поверхнею,

отриманими при розв'язанні задачі стійкості в лінійній постановці методом Ланцоша.



а



б

Рис. 4.3. Моделі геометричної недосконалості стержня: місцева (1-а) та загальна (15-а) біфуркаційні форми.

Для стержня з різними амплітудами початкових недосконалостей визначаються критичні значення стискаючої сили з використанням процедур обчислювального комплексу розв'язання нелінійної задачі статки. Критичні значення навантаження на стержень визначалося параметром критичного навантаження $F_{cr} = \beta \cdot F_{cr}^0$, де F_{cr}^0 – значення критичної сили у випадку втрати

стійкості стержня з ідеальною поверхнею і прийнята 51,5 кН та 66,02 кН відповідно; β – безрозмірний параметр критичної сили.

За допомогою метода Ньютона-Рафсона на кожному етапі навантаження знаходяться розв'язки рівняння рівноваги недосконалого стержня до досягнення забезпечення умови збіжності по зміні нев'язки навантаження та по роботі внутрішніх сил на приростах вузлових переміщень.

На рис. 4.4 представлений графік залежності параметра критичної сили β від величини амплітуди початкових недосконалостей δ . Тут, по осі абсцис відкладена амплітуда недосконалостей δ у мм, по осі ординат – безрозмірний параметр критичної сили β . Недосконалість стержня змодельована у вигляді місцевої форми втрати стійкості.

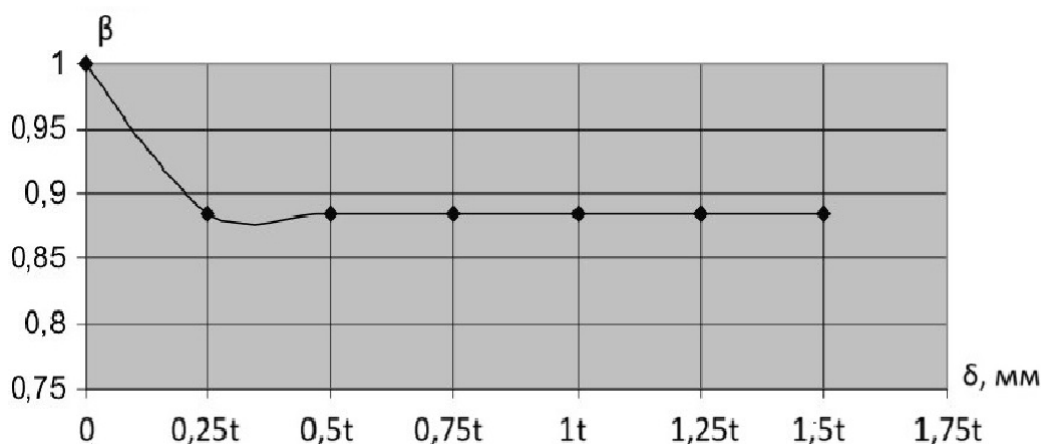


Рис. 4.4. Залежність параметру критичної сили від амплітуди недосконалості, яка подана у вигляді місцевої форми втрати стійкості.

На рис. 4.5 представлений графік залежності параметра критичної сили β від величини амплітуди початкових недосконалостей δ . Недосконалість стержня змодельована у вигляді загальної форми втрати стійкості.

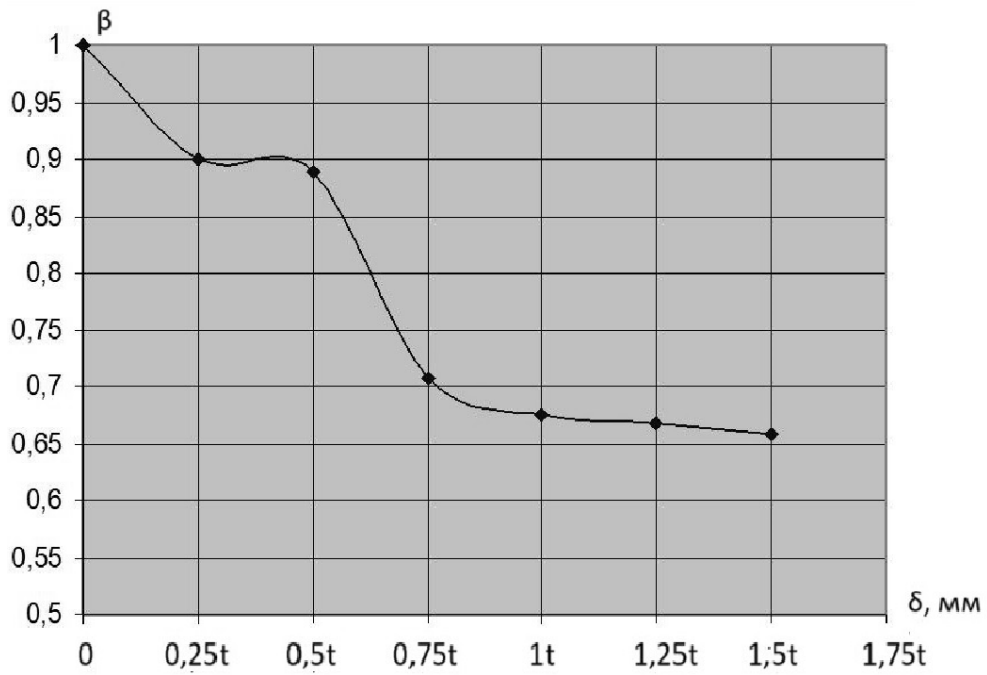


Рис. 4.5. Залежність параметру критичної сили від амплітуди недосконалості, яка подана у вигляді загальної форми втрати стійкості.

Також оцінено вплив моделі і амплітуди геометричної недосконалості на криві поздовжнього навантаження та відповідні форми втрати стійкості стержня.

Як приклад, на рис. 4.6 показана форма деформування стержня в граничному стані, а на рис. 4.7 - крива навантаження з недосконалістю у вигляді місцевою біфуркаційної форми амплітудою $\delta = 0,5t$ відповідно .

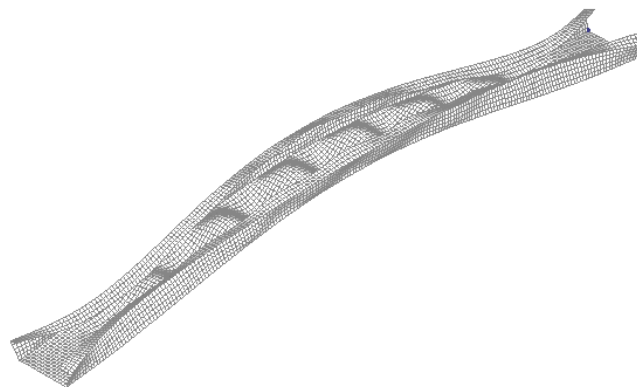


Рис. 4.6. Форма втрати стійкості стержня при $\delta / t = 0,5$.

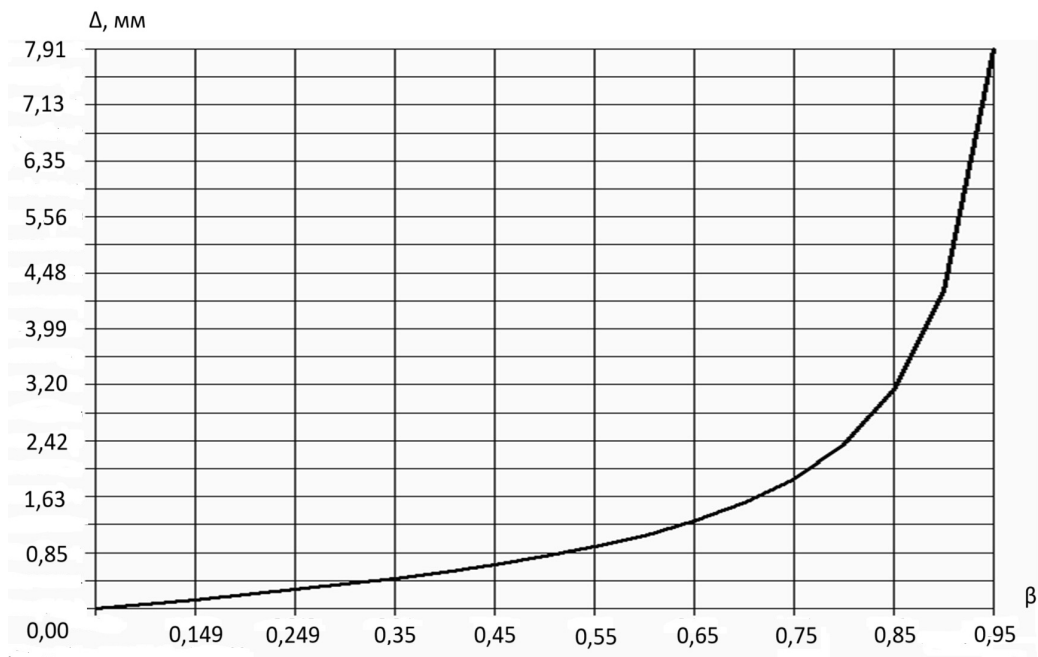


Рис. 4.7. Крива навантаження при $\delta / t = 0,5$.

4.2. Дослідження сумісного впливу амплітуди геометричних недосконалостей та ексцентриситету прикладання повздовжньої сили на стійкість тонкостінного стержня відкритого профілю.

Перші випробування тонкостінних стержнів, які проведені в період з 1840 по 1857 роки І. Ходкінсоном [137], показали, що навіть незначний ексцентриситет прикладання навантажень дає результати, які сильно різняться з теорією. Для проведення повного аналізу стійкості стержнів необхідно враховувати сумісний вплив недосконалостей при різних значеннях ексцентриситетів прикладення сили та по чотирьом можливим формам: загальної, хвилеподібного випучування стінок, місцевої втрата стійкості на кінцях стержня, депланації.

Для дослідження сумісного впливу ексцентриситету та початкових недосконалостей на стійкість стержнів відкритого профілю обрано стержень С 200/60/24/2, який зображений на рис. 4.8. Стержень має габарити поперечного перерізу 200х60 мм, товщину 2 мм та довжину 2000 мм. Даний стержень використовується в реальних конструкціях як елемент поясів і

розкосів сталевих ферм, та у якості гілки колон складеного перерізу. Розглядалися три варіанти навантаження: центрально-стиснений і позацинрово-навантажений стержень з ексцентриситетами 10 мм і 20 мм (рис. 4.8).

Математична (комп'ютерна) модель стержня формується за допомогою обчислювального комплексу основанийого на методі скінченних елементів. Стінка, полицки і відгини стержня моделювалися плоскими скінченними чотирикутними елементами розмірами 10x10 мм. Всього у моделі 8600 елементів і 16640 вузлів. Матеріал - сталь Ст3кп по ДСТУ 2651:2005 з наступними механічними характеристиками: $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0,3$.

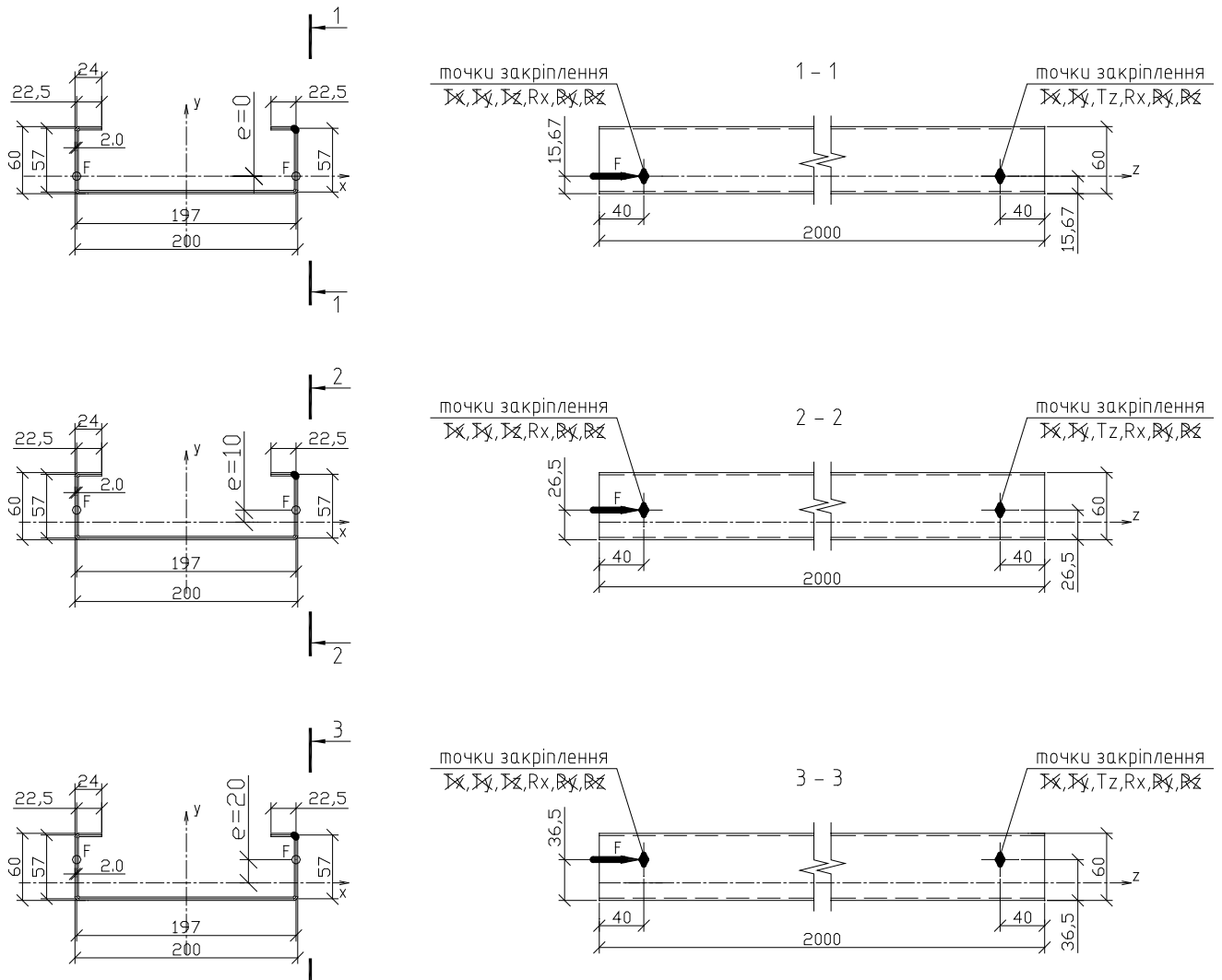


Рис. 4.8. Профіль стержня, повздовжнє навантаження та граничні умови.

За моделі недосконалостей прийнято перші біфуркаційні форми втрати стійкості стержня з ідеальною поверхнею, які отримано при розв'язанні задачі стійкості в лінійній постановці методом Ланцоша. Амплітуда недосконалостей задана пропорційно до товщини стінки стержня $\delta=[0,25; 0,5; 1; 1,5]t$, де $t=2$ мм. На рис. 4.9 – 4.11 представлені моделі геометричних недосконалостей стержня у вигляді перших біфуркаційних форм втрати стійкості при ексцентриситеті прикладення поздовжнього навантаження $e=0$.

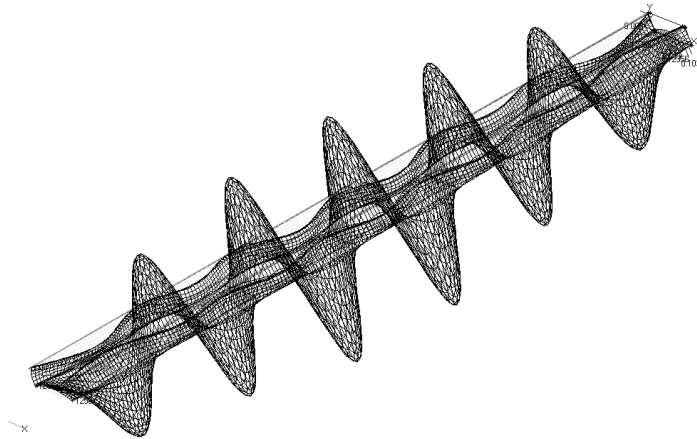


Рис. 4.9. Модель недосконалості стержня при ексцентриситеті прикладення поздовжнього навантаження $e=0$.

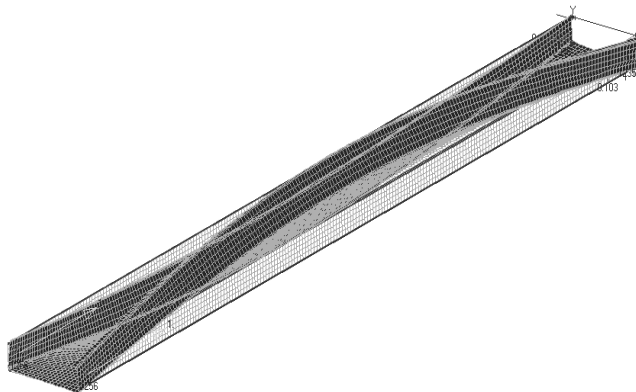


Рис. 4.10. Модель недосконалості стержня у вигляді першої форм втрати стійкості при $e=10$.

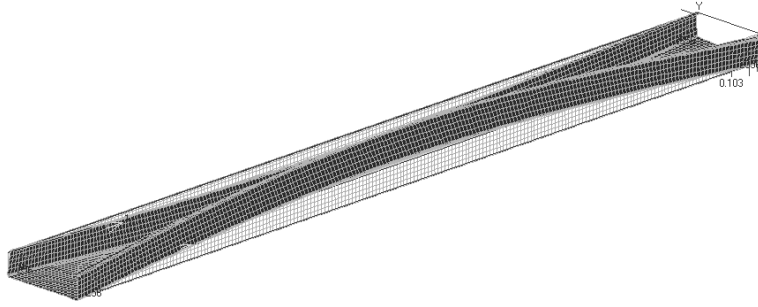


Рис. 4.11. Модель недосконалості стержня у вигляді першої форм втрати стійкості при $e=20$.

Стійкість стержня досліджена в лінійній постановці методом Ланцоша та в нелінійній – методом Ньютона-Рафсона при дії поздовжнього навантаження $F_{cr}^0 = [110,13; 97,99; 83,47]$ кН, відповідно при ексцентриситетах $e=[0; 10; 20]$ мм. Вздовж осі абсцис відкладено параметр критичного навантаження $F_{cr} = \beta \cdot F_{cr}^0$, вздовж осі ординат – максимальне сумарне переміщення Δ вузлів моделі стержня. На рис. 4.12 – 4.14 представлено залежності кривих поздовжнього навантаження від ексцентриситету $e=0$ та амплітуди недосконалості стержня $\delta=[0; 0,5; 1]$ т .

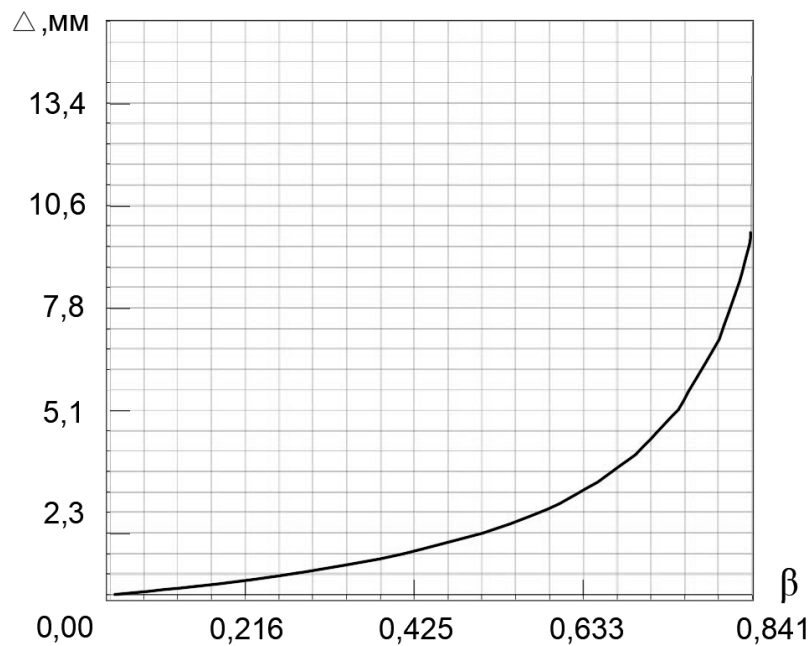


Рис. 4.12. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом: $e=0$ мм, $\delta / t = 0,5$.

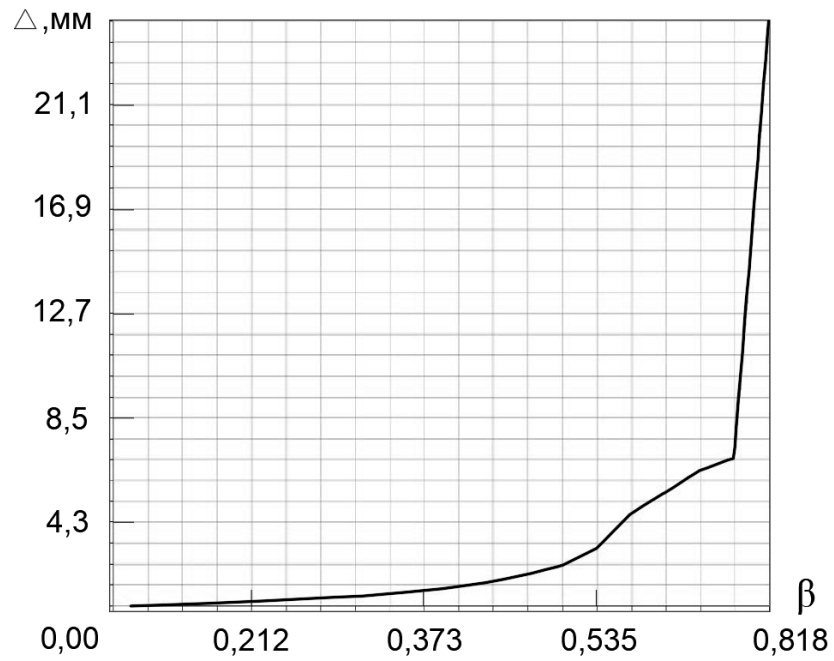


Рис. 4.13. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=0$ мм, $\delta/t=0,5$.

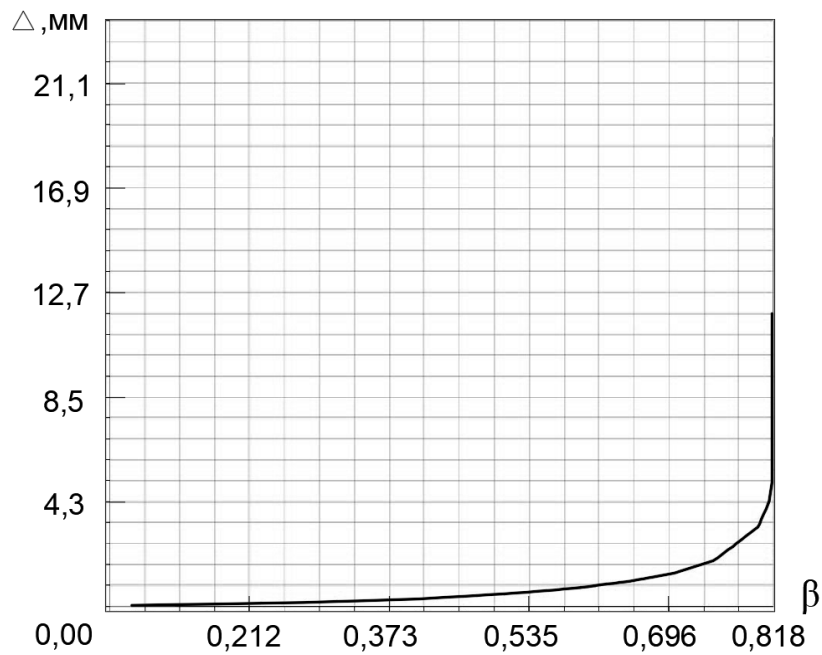


Рис. 4.14. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=0$ мм, $\delta/t=1$.

На рис. 4.15 – 4.17 представлено залежності кривих поздовжнього навантаження від ексцентриситету $e=10$ та амплітуди недосконалості стержня $\delta=[0; 0,5; 1]t$, відповідно.

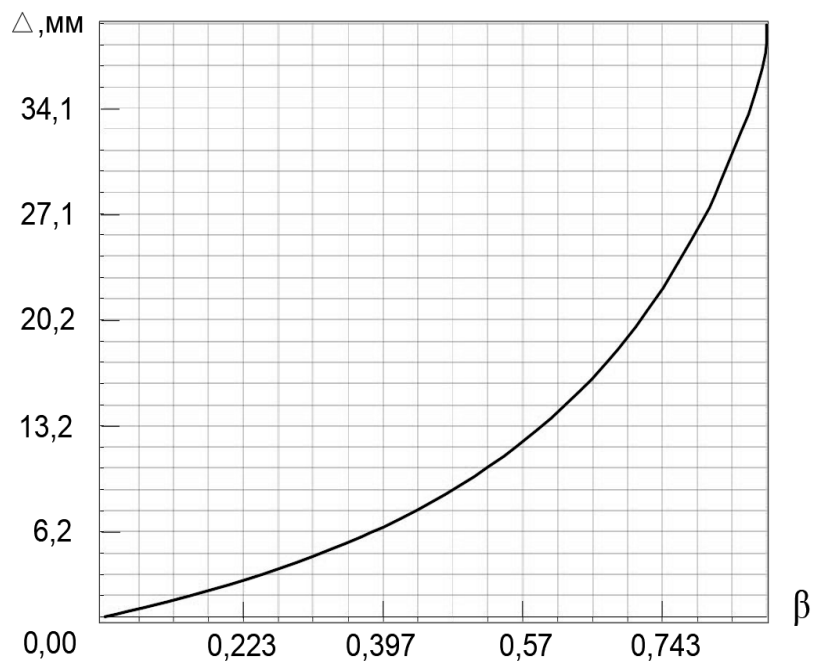


Рис. 4.15. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=10$ мм, $\delta/t=0$.

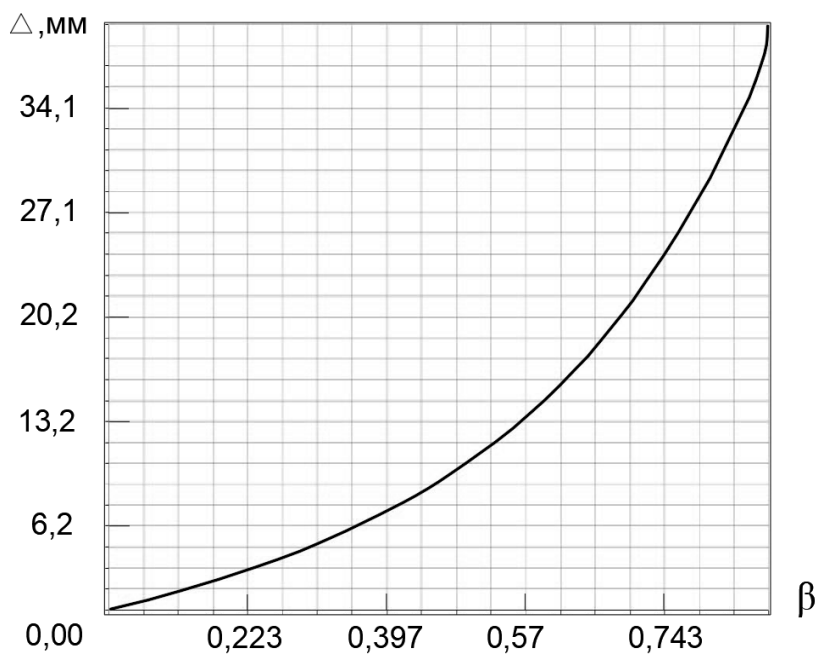


Рис. 4.16. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=10$ мм, $\delta/t=0,5$.

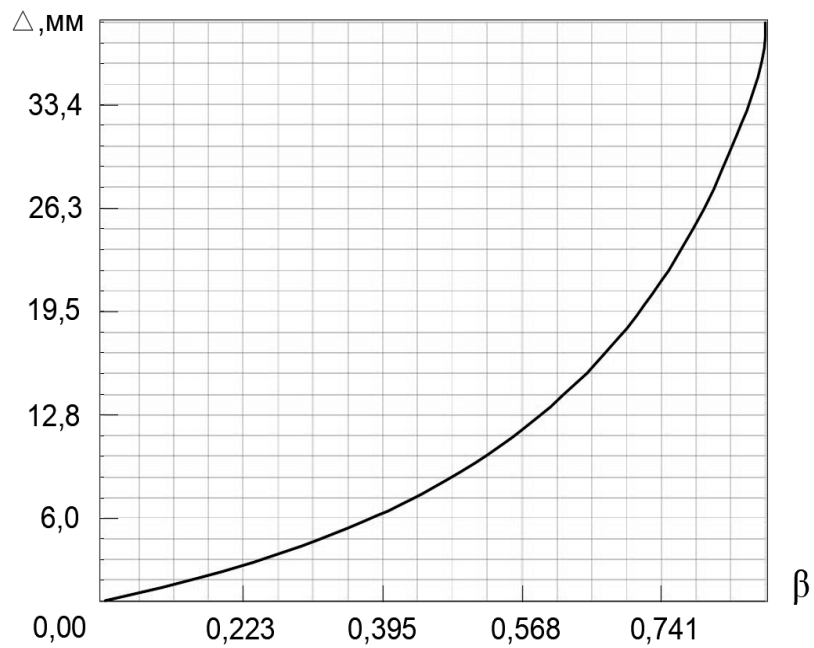


Рис. 4.17. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=10$ мм, $\delta/t=1$.

На рис. 4.18 – 4.20 представлено залежності кривих поздовжнього навантаження від ексцентриситету $e=20$ та амплітуди недосконалості стержня $\delta=[0; 0,5; 1]t$, відповідно.

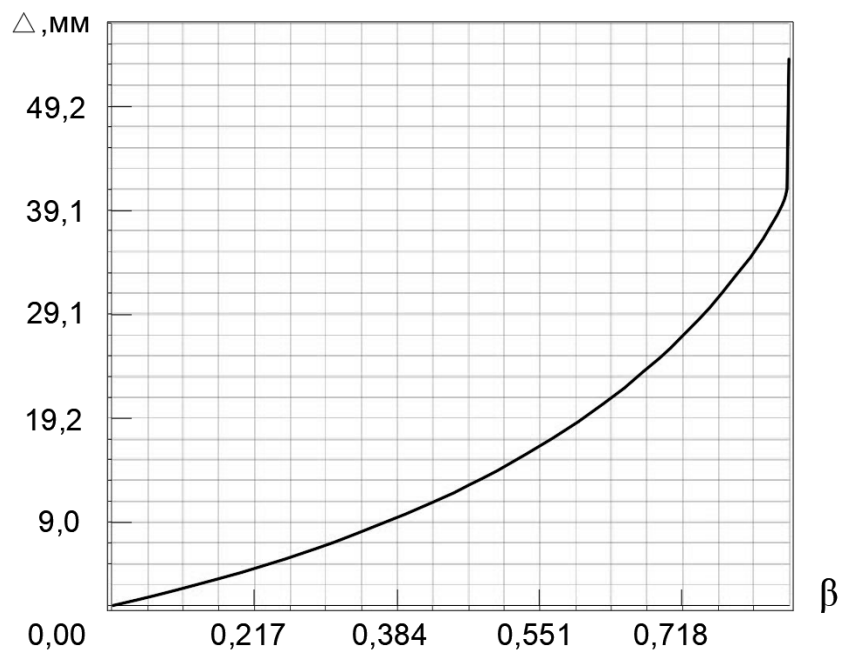


Рис. 4.18. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=20$ мм, $\delta/t=0$.

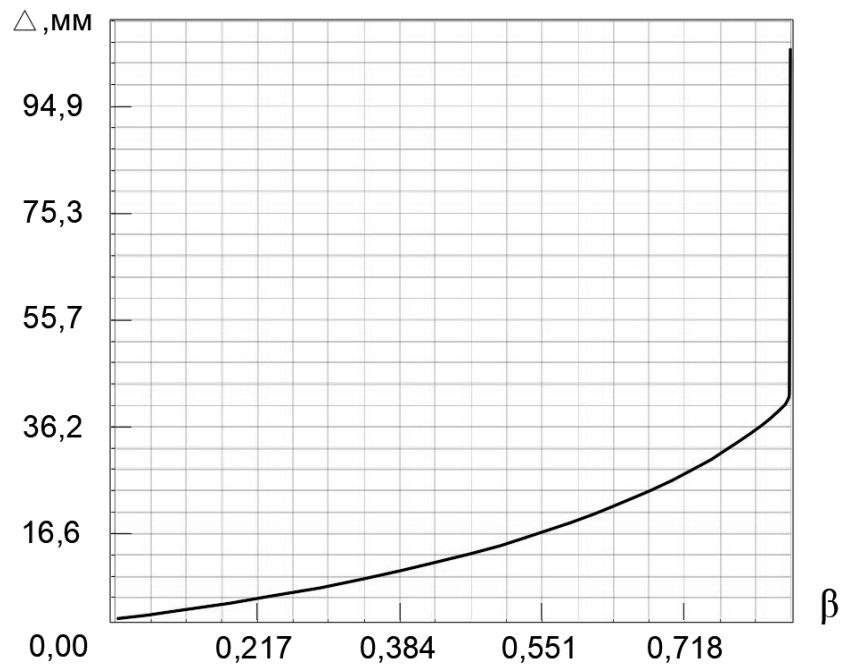


Рис. 4.19. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=20$ мм, $\delta/t=0,5$.

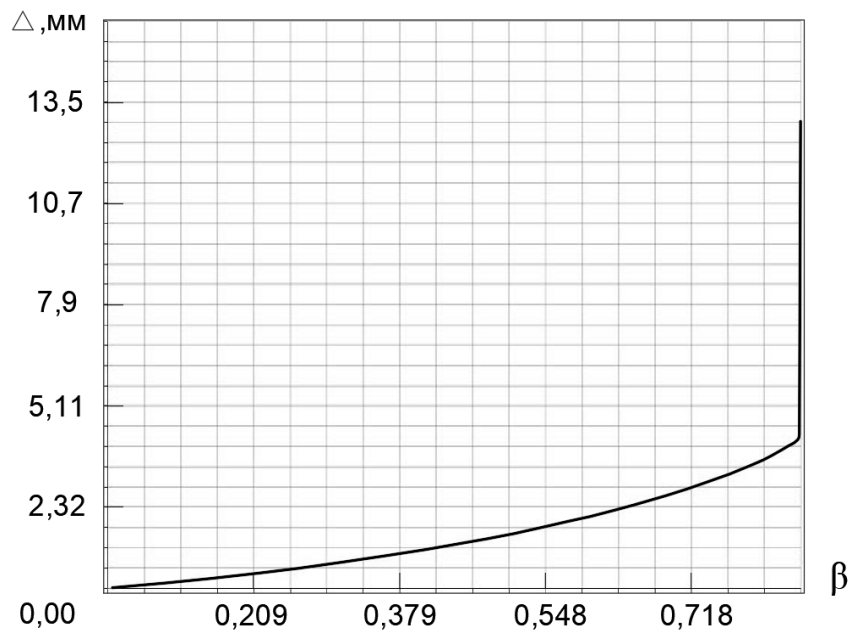
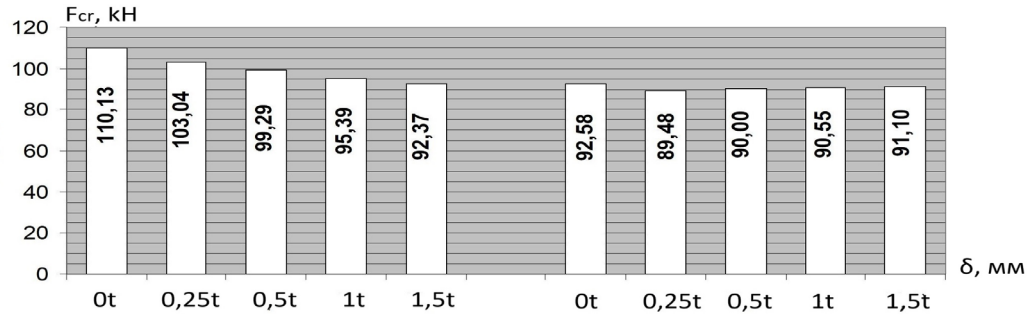


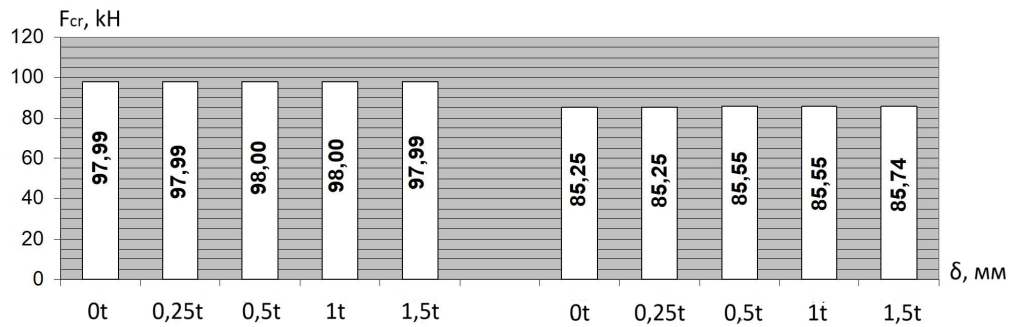
Рис. 4.20. Крива навантаження стержня з ексцентриситетом:
 $e=20$ мм, $\delta/t=1$.

На рис. 4.21. представлена залежність критичної сили від амплітуди недосконалості форми стержня та ексцентриситету прикладання повздовжньої сили.

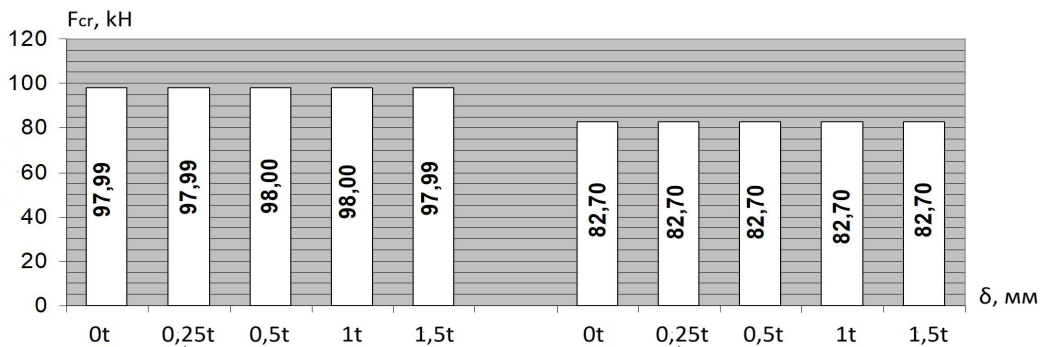
На рис. 4.22 – 4.30 зображені форми втрати стійкості стержня з різними амплітудами недосконалостями та ексцентриситету прикладання повздовжньої сили.



а



б



в

Рис. 4.21. Залежність критичних значень навантаження стержня з недосконалістю при різних ексцентриситетах:
 $e=0$ (а), $e=10$ мм (б), $e=20$ мм (в).

З рис. 4.21 видно, що збільшення амплітуди недосконалостей змінює момент різкого зростання максимального сумарного переміщення вузлів моделі. Зі збільшенням ексцентриситету прикладання поздовжньої сили спостерігається зменшення критичних значень навантаження: при лінійному розрахунку максимально на 11%, при нелінійному – 7,9% та 10,7%, відповідно при $e = 10$ мм та $e = 20$ мм.

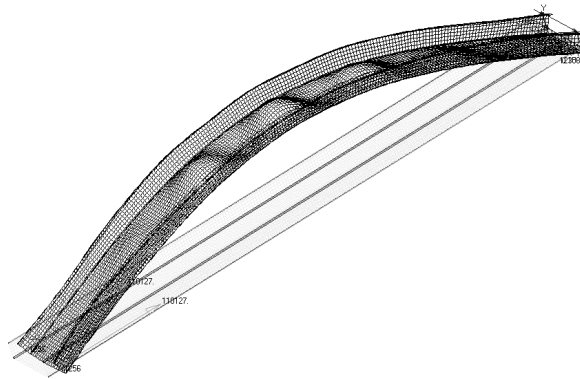


Рис. 4.22. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=0$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=0$ мм.

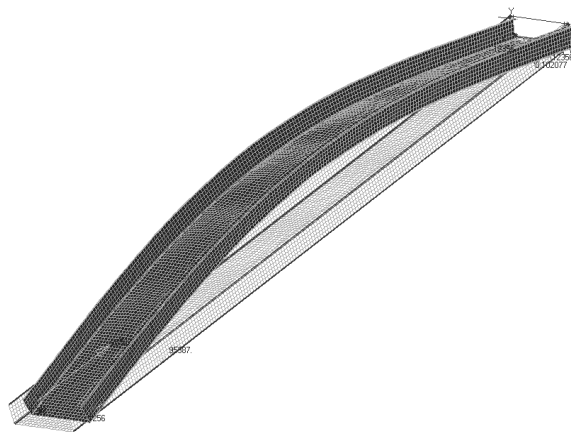


Рис. 4.23. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=0,5$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=0$ мм.

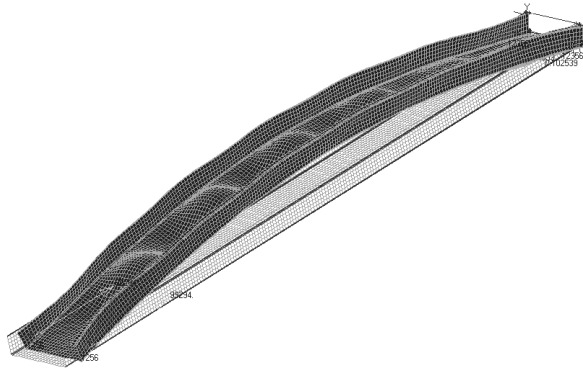


Рис. 4.24. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=1$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=0$ мм.

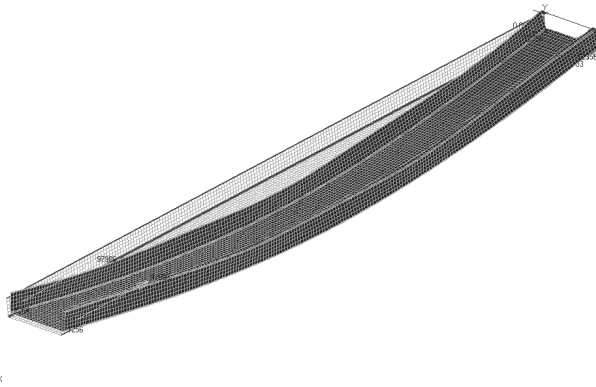


Рис. 4.25. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=0$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=10$ мм.

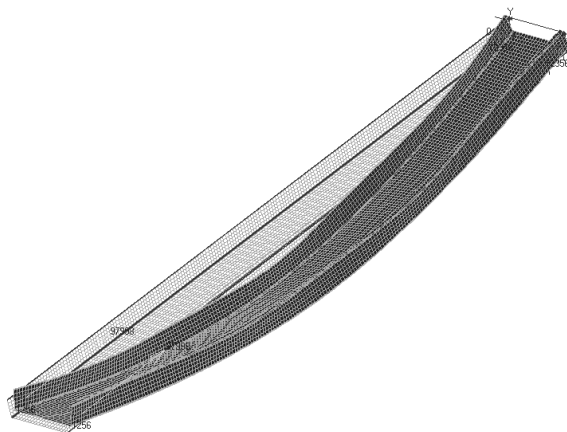


Рис. 4.26. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=0,5$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=10$ мм.

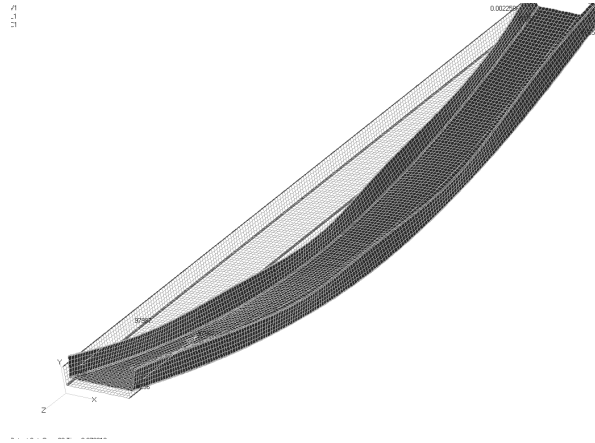


Рис. 4.27. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=1$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=10$ мм.

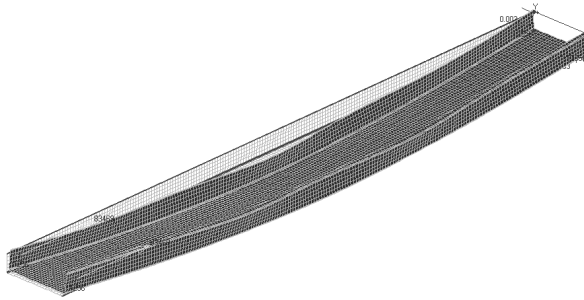


Рис. 4.28. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=0$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=20$ мм.

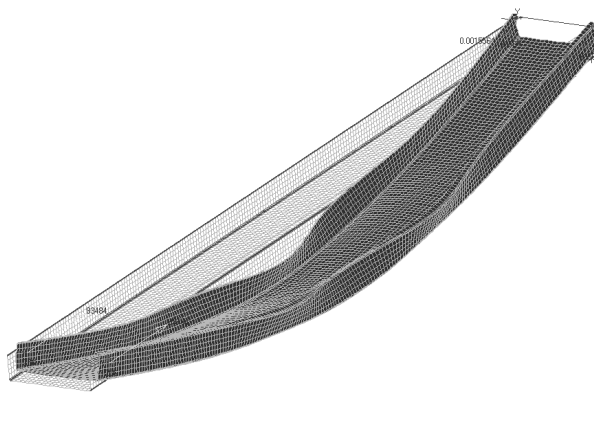


Рис. 4.29. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=0,5$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=20$ мм.

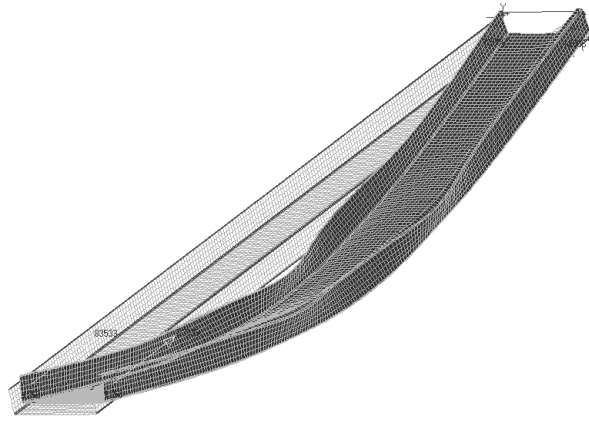


Рис. 4.30. Форми втрати стійкості стержня з недосконалістю $\delta/t=1$ та ексцентриситетом прикладання повздовжньої сили $e=20$ мм.

Форма деформування стержня при втраті стійкості (рис. 4.22 – 4.30) зі зростанням амплітуди недосконалостей при конкретних значеннях ексцентриситету прикладання навантаження суттєво не змінюється і повторює відповідну прийнятну модель недосконалості форми стержня (рис. 4.9 – 4.11).

Результати розрахунків зведені в таблицю 4.1.

Таблиця 4.1

Результати розрахунків

δ/t	Амплітуда недосконалості, мм	$e=0$		$e=10$ мм		$e=20$ мм	
		F_{cr}^0, kH	F_{cr}, kH	F_{cr}^0, kH	F_{cr}, kH	F_{cr}^0, kH	F_{cr}, kH
0	0	110,13	92,62	97,99	85,25	97,99	82,70
0,25	0,5		89,54		85,25		82,70
0,5	1,0		89,98		85,55		82,70
1	2,0		90,53		85,55		82,70
1,5	3,0		91,08		85,74		82,70

Аналізуючи результати наведені у табл. 4.1 бачимо, що для центрально-стиснутого стержня введення у розрахунок недосконалостей форми знижує критичну силу на 3,3% у порівнянні з ідеальним стержнем. У той же час, для позацентрово-стиснутих стержнів (при $e=10$ мм та при $e=20$ мм) вплив

недосконалостей форми є мізерним. У даному випадку ексцентриситет прикладання поздовжньої сили знижує критичну силу на 7,95% та 10,7% відповідно і нівелює вплив недосконалостей форми.

ДСТУ 8808:2018 «Профілі сталеві гнуті Технічні умови» містить технічні вимоги щодо форми поперечного перерізу та допустимих дефектів. ДСТУ 8806:2018 «Швелери сталеві гнуті рівнополічні. Сортамент» уточнює вимоги ДСТУ 8808:2018 для виготовлення С-подібних стержнів відкритого профілю та приводить гранично-допустимі відхилення по геометрії стержня: висоті стінки, перпендикулярності елементів, довжині, скручуванню, кривизні, хвилястості полицок та інше. У 2023 році прийнятий новий документ - ДСТУ 9233:2023 «Профілі сталеві холодногнуті несні та армувальні конструктивних елементів будівель та споруд. Загальні технічні умови». Цей стандарт встановлює загальні вимоги до вихідних матеріалів, класифікації, видів, параметрів та маркування ПХГ, призначений для використання у виробництві.

Величину відхилень в міліметрах для порівняння їх з граничними величинами по ДСТУ типу «скручування швелеру» та «відхилення від 90° при ширині полиці до 100 мм» для стержня С 200/60/24/2 визначено на рис. 4.31.

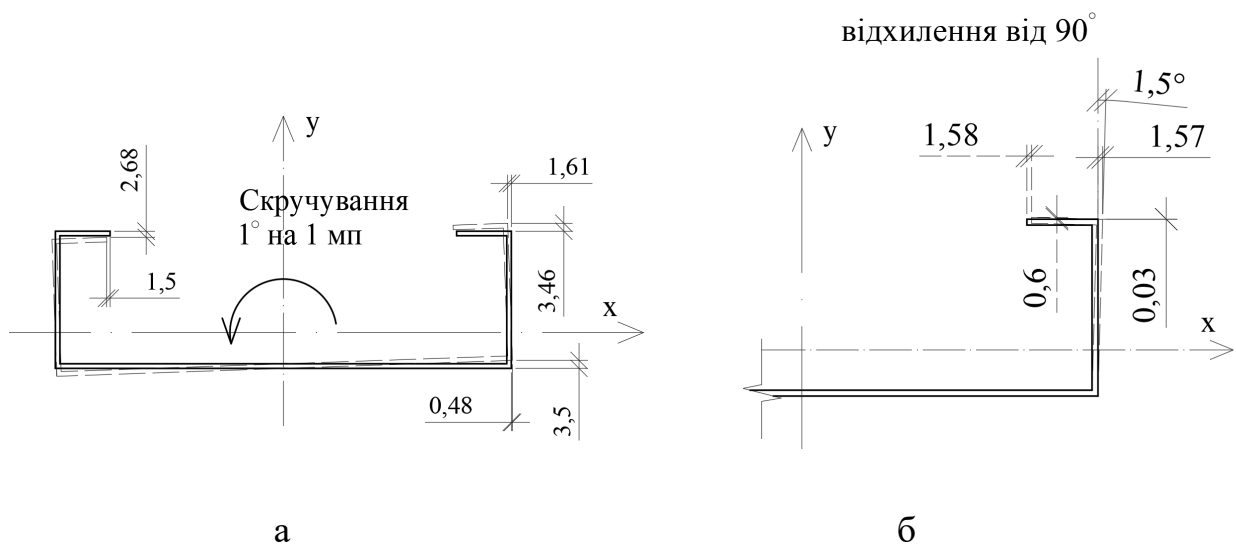


Рис. 4.31. Визначення деформацій по ДСТУ у вигляді скручування стержня (а) та відхилення від 90° полицок (б).

У табл. 4.2 зведені граничні відхилення згідно з ДСТУ, які можна застосувати до досліджуваного стержня С 200/60/24/2. Як бачимо, діапазон відхилень знаходиться в межах 1,58 – 3,56 мм, що відповідає діапазону максимальних амплітуд недосконалостей $\delta = [0,25; 0,5; 1; 1,5]t = [0,5; 1; 2; 3]$ мм, який прийнятий у розрахунках.

Таблиця 4.2

Порівняння граничних відхилень

Граничні відхилення					Відхилення для стержня, С 200/60/24/2, мм
Тип	по ДСТУ 8806:2018		по ДСТУ 9233:2023		
Стінка та полиці швелера мають бути розташовані під прямим кутом	відхилення від 90° при ширині полиці до 100 мм	+/-1° 30'	відхилення від 90° при ширині полиці до 80 мм	+/-1° 30'	1.58 рис. 4.31 б
	відхилення від 90° при ширині полиці більше за 100 мм	+/-1°	відхилення від 90° при ширині більше за 80 мм	+/-1°	-
Скручування швелерів	не має перевищувати добуток від перемноження 1° на довжину	1° на мп	не має перевищувати добуток від перемноження довжину	1° на мп	3.5 рис. 4.31 а
	у будь-якому випадку не більше	10°	у будь-якому випадку не більше	10°	3,5 рис. 4.31 а
Допустима кривизна швелера		0,1% від довжини		0,1° від довжини	2,0
Допустима хвилястість полиць		2 мм на 1 мп		2 мм на 1 мп	2,0

Проаналізувавши табл. 4.1 та 4.2 можна зробити висновок, що прийняті у розрахунках величини максимальних амплітуд навантажень співрозмірні з гранично-допустимими дефектами по ДСТУ, що підтверджує правильність вибору діапазону зміни максимальних амплітуд недосконалостей у дослідженнях.

ВИСНОВКИ

Основні результати, отримані в дисертаційній роботі, полягають у наступному:

- розроблена нова чисельна методика дослідження нелінійного деформування і стійкості тонкостінних пружних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми на основі методу скінченних елементів;

- вперше створено ефективний алгоритм комп'ютерного скінченно-елементного моделювання тонкостінних стержнів відкритого профілю у вигляді сукупності плоских оболонкових елементів з геометричними недосконаlostями на основі обчислювальних процедур програмного комплексу NASTRAN;

- досліджена стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю з ідеальною поверхнею в лінійній постановці методом Ланцоша, визначено критичні значення навантаження і біфуркаційні форми втрати стійкості;

- досліджено в геометрично нелінійній постановці методом Ньютона-Рафсона напружено-деформований стан та стійкість недосконалих тонкостінних стержнів відкритого профілю з визначенням критичних значень навантажень і форм деформування при втраті стійкості;

- вперше оцінено вплив різних моделей та амплітуд геометричних недосконалостей на стійкість стержнів відкритого профілю з різними умовами та видами навантаження;

- Отримані нові результати дослідження сумісного впливу амплітуди початкових недосконалостей та ексцентриситету прикладання сил на нелінійне деформування і стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю реальних конструкцій;

- обґрунтована достовірність отриманих результатів строгістю математичних перетворень, узгодженням чисельних результатів з результатами інших авторів, збіжністю результатів в залежності від числа

невдомих скінченно-елементної моделі та точності розв'язання системи рівнянь;

- підтверджена ефективність застосування чисельної методики до оцінки впливу недосконалостей форми на стійкість стержнів відкритого профілю;

- створено програмне забезпечення для моделювання геометричних недосконалостей форми тонкостінних стержнів відкритого профілю на основі комплексу NASTRAN.

В дисертаційній роботі сукупність отриманих результатів являє собою розв'язання актуальної науково-технічної проблеми будівельної механіки щодо забезпечення стійкості стержневих конструкцій з тонкостінних стержнів відкритого профілю при дії статичних навантажень з метою їх безаварійної експлуатації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Стройиздат, 1968. – 210 с
2. Айрумян Э.Л. Особенности расчета стальных конструкций из тонкостенных гнутых профилей // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2008, № 3. – С. 2-7.
3. Аскинази В.Ю. Пространственная устойчивость элементов стальных рамных конструкций переменной жесткости: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук / 3. Аскинази В. Ю. – СПб, 2017.
4. Атавин И.В. Лёгкие стальные тонкостенные конструкции в строительстве спортивных сооружений / И. В. Атавин. // Синергия Наук. – 2016. – №6. – С. 367–376.
5. Баженов В.А. Варіаційні принципи будівельної механіки. Нариси з історії. / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, Ю.В. Ворона, В.В. Отрашевська – К.: Каравела, 2018. – 924 с.
6. Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В. Імовірнісний підхід до визначення надійності за стійкістю недосконалої оболонки-опори // Проблеми прочності. – 2014, №4. – С.152-161.
7. Белый Г.И. О расчете упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме с учетом касательных напряжений деформаций и деформаций сдвига / Г.И. Белый. // Металлические конструкции и испытания сооружений. – 1985. – №62. – С. 10–20.
8. Белый Г.И. Пространственная устойчивость элементов конструкций из стальных холодногнутых профилей / Г. И. Белый, И. В. Астахов // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2006, – № 9.
9. Белый Г.И. Особенности работы стержневых элементов конструкций из оцинкованных гнутых профилей / Белый Г.И.// Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 3. – С. 99-103.

10. Белый Г.И. Методы расчета стержневых элементов конструкций из тонкостенных холодногнутых профилей / Белый Г.И // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – № 4 (45). – С. 32-37.
11. Белый Г.И. К определению редуцированных сечений стержневых элементов легких стальных тонкостенных конструкций // Вестн. гражданских инженеров. – 2017. – № 5 (64). – С. 33-37.
12. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. – М: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1959.
13. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 339 с.
14. Ватин Н.И. Холодногнутый стальной профиль в малых мостовых конструкциях / Н.И. Ватин, А.С. Синельников. // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2012. – №3. – С. 39–51.
15. Ватин Н.И., Жмарин Е.Н., Куражова В.Г., Усанова К.Ю. Конструирование зданий и сооружений. Легкие стальные тонкостенные конструкции. Систем. требования: AdobeAcrobatReader. URL: <http://dl.unilib.neva.ru/dl/2/3400.pdf> (2017).
16. Вержбовский Г.Б. Рамные конструкции из легких стальных тонкостенных профилей / Г.Б. Вержбовский, Д.С. Горохова. // Актуальные процессы формирования науки в новых условиях. Сборник статей Международной научно-практической конференции. – 2016. – С. 23–25.
17. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
18. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
19. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 419с.

20. Гавриленко Г.Д. Устойчивость ребристых оболочек несовершенной формы. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. - 190 с.
21. Гавриленко Г.Д. Исследование влияния локальных и регулярных осесимметричных прогибов на критические нагрузки ребристых оболочек // Прикл. механика. - 1982. - 18, № 4. - С. 53 - 57. 5.
22. Гавриленко Г.Д. Устойчивость цилиндрических оболочек с продольными вмятинами // Динамика и прочность машин. - Харьков: Вища шк., 1981. - С. 32 - 35.
23. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. Москва: Госстройиздат, 1933. 371 с.
24. Галлагер Р. МКЭ: Основы /Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 215с
25. Голованов А.И., Бережной Д. В. Метод конечных элементов механике деформируемых твердых тел. - - Казань: ДАС, 2001. - 301 с.
26. Голованов А.И. Универсальный конечный элемент тонкой оболочки // Исследования по теории оболочек: труды семинара. КФТИ, КНЦ АН СССР, 1990. - С. 66-83. - Вып. 25. – Казань.
27. Городецкий А.С., Евзеров И.Д., Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Городецкий Д.А., Метод конечных элементов: теория и численная реализация. Программный комплекс "Лира-Windows" — Киев: ФАКТ, 1997.
28. Горохова Д.С., Вержбовский Г.Б. Особенности расчетов легких стальных тонкостенных элементов по нормативным документам различных стран // В книге: Строительство и архитектура - 2015 материалы международной научно-практической конференции. ФГБОУ ВПО "Ростовский государственный строительный университет", Союз строителей южного федерального округа, Ассоциация строителей Дона. – 2015. – С. 336-337.
29. Гоцуляк Е.А., Прусов Д.Э., Аранчий Н.Е. Об устойчивости геометрически несовершенных оболочек общего вида // Там же. - 2000. - 36, № 11. - С. 82 - 87.

30. Гоцуляк Є.О., Охтень І.О., Лук'янченко О.О. Дослідження стійкості тонкостінних елементів відкритого профілю з урахуванням початкових недосконалостей // Зб. Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2008. – Вип.82. – С.131-136.
31. ДБН 2.6-198:2014. Сталеві конструкції. Норми проектування -К.: Міністерство регіонального розвитку будівництва та житлово-комунального господарства України., 2014. – 198 с
32. ДБН 362-92. Оцінка технічного стану сталевих конструкцій виробничих будівель і споруд, що знаходяться в експлуатації-К.: Держкомітет України буд-ва і архіт., 2003. – 82 с.
33. ДБН В.1.2-14-2018. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Загальні принципи – К: Міністерство регіонального розвитку будівництва та житлово-комунального господарства України, 2018.- 29 с.
34. ДСТУ 8806:2018. Швелери сталеві гнуті рівнополічні. Сортамент.
35. ДСТУ 8808:2018. ПРОФІЛІ СТАЛЕВІ ГНУТІ. Технічні умови.
36. ДСТУ 9233:2023. Профілі сталеві холодногнуті несні та армувальні конструктивних елементів будівель та споруд. Загальні технічні умови.
37. Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней - М.-Л.: Гостехиздат, 1948 – 208 с.
38. Дібір, О.Г. Будівельна механіка авіаційних конструкцій : навч. посіб. В 2 ч. Ч. 2 : Розрахунок тонкостінних стрижнів / О. Г. Дібір. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. – 280 с.
39. Доннелл Л.Г., Ван К. Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии // Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит-ры. – 1951, №408, С.91 – 107.
40. Дьяков С.Ф., Лалин В.В. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций

- сдвига при кручении // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. – 2011, № 2. – С. 130-140.
41. Дьяков С.Ф., Лалин В.В. Построение и анализ конечного элемента тонкостенного стержня с учетом деформаций сдвига для решения задач динамики // Интернет-журнал «Науковедение». – 2013, №5(18). С.18-42.
42. Дьяков С.Ф. Применение полусдвиговой теории В.И. Сливкера к решению задач статики и динамики тонкостенных стержней. Дис. канд. техн. наук. СПб, 2013. – 147 с.
43. Жилкин В.А. Численный расчет тонкостенных стержней открытого профиля в MSC Patran-Nastran // АПК России. – 2013, Т. 65. – С. 84-95.
44. Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975. – 542 с.
45. Илюшин А.А. Пластичность. – М. ОГИЗ. – 1948.
46. Карпіловський В.С. Метод скінченних елементів і задачі теорії пружності. – Київ: «Софія А», 2022. – 275 с.
47. Кикоть А.А. Влияние ширины пояса и параметров стенки на эффективность стального холодногнутого профиля сигмаобразного сечения при работе на изгиб / А.А. Кикоть, В.В. Григорьев // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 97–101.
48. Кикоть А.А. Влияние ширины поясов и отгибов в сечениях с- и z-образных стальных тонкостенных гнутых профилей на эффективность работы в условиях изгиба // Ползуновский вестник. – 2011. – № 1. – С. 1–6.
49. Койтер В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Сб. перев. иностр. статей. – 1960. – №5, С.99 – 110.
50. Корнилов Т.А., Герасимов Г.Н. О некоторых ошибках проектирования и строительства малоэтажных домов из легких стальных тонкостенных конструкций в условиях крайнего севера // Промышленное и гражданское строительство. 2015. № 3. С. 41-45.

51. Корсун Н.Д. Проблемы проектирования рамных конструкций из ЛСТК // В сборнике: Инвестиции, строительство и недвижимость как материальный базис модернизации и инновационного развития экономики. Материалы Пятой Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 частях. под редакцией Ю. Т.Овсянниковой. 2015. С. 301-307.
52. Корсун Н.Д., Простакишина Д.А. Анализ НДС составного сечения из тонкостенных профилей с учетом начальных геометрических несовершенств // Академический вестник УРАЛНИИПРОЕКТ РААСН –2018.— 4. — С. 83–88.
53. Корчак М.Д. Влияние геометрических несовершенств на несущую способность легких металлических конструкций: Автореф. дис. д-ра. техн. наук: 05.23.01. – Электросталь, 1993. – 39 с.
54. Кудинов В.В. Метод конечных элементов в задачах устойчивости тонкостенных стержней. Маг.дисс. СПб, 2017. 86 с.
55. Лагранж Жозеф. Аналитическая механика // Объединенное научно-техническое издательство (Ленинград). 1938. С.347.
56. Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 27. № 1. С. 53-73.
57. Лалин В.В., Рыбаков В.А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 8. С. 69-80.
58. Лук'янченко О.О., Охтеня І.О. Комп'ютерне моделювання в задачах стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконалостями форми // Зб. Управління розвитком складних систем. К.: КНУБА. – 2021. – Вип. 47. – С. 95-101. (Index Copernicus).
59. Лук'янченко О.О., Костіна О.О., Гаран І.Г. Моделювання початкових недосконалостей циліндричної оболонки змінної товщини при дослідженні її стійкості при дії комбінованого навантаження // Опір

- матеріалів і теорія споруд. 2009. № 84.
60. Мезенцева Е.А., Лушников С.Д. Быстровозводимые здания из легких стальных конструкций // Вестник МГСУ. Спецвыпуск. 2009. №1. С. 62-64.
61. Муляр Ю.М., Федоров В.М., Трясучев Л.М. О влиянии начальных несовершенств на потерю устойчивости стержня в условиях осевого сжатия // Космическая техника. Ракетное вооружение. 2017. Вып. 1 (113).
62. Надольский В.В., Вережка Ф.А. Анализ потери устойчивости симметричных тонкостенных элементов С-образного сечения // Теория и практика исследований, проектирования и САПР в строительстве : сборник статей IV Международной научно-технической конференции, Брест, 27 марта 2020 года / Министерство образования Республики Беларусь, Брестский государственный технический университет, Строительный факультет, ООО "Ли́ра САПР", ООО "ПСС-SOFiSTiK", ООО НПФ "СКАД СОФТ", ОДО НПІ "БрестКАД", ЧУП "Брестстройнаука" ; редкол.: Н. Н. Шалобыта [и др.]. – Брест: БрГТУ, 2020. – С. 126–132. – Библиогр.: с. 131–132 (12 назв.).
63. Назмеев Т.В.. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля // Инженерно-строительный журнал, №5, 2013.
64. Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г., Лимаренко А.М. Анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня открытого профиля в программе ANSYS // Труды ОГАСА. 2005. Вып. 17. С.195-200.
65. Осокин А.В. Развитие метода конечных элементов для расчета систем, включающих тонкостенные стержни открытого профиля: Дис. канд. техн. наук. М., 2010. 134 с.
66. Охтеня І.О., Гоцуляк Є.О., Лук'янченко О.О. Дослідження стійкості тонкостінних елементів відкритого профілю з урахуванням початкових

- недосконалостей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.82. – К.: КНУБА, 2008.
67. Охтеня І.О., Гоцуляк Є.О., Лук'янченко О.О. Дослідження сумісного впливу початкових недосконалостей і ексцентриситету на стійкість стержнів відкритого профілю //Зб. Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2009. – Вип.83. – С.126-132.
68. Охтеня І.О., Гоцуляк Є.О. Дослідження стійкості тонкостінних елементів відкритого профілю з різними варіантами розкріплення // Зб. Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2010. – Вип.86. – С.56-64.
69. Охтеня І.О., Лук'янченко О.О., Козак А.А. Аналіз втрати стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з урахуванням недосконалостей форми // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех.збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 108. – С. 360-368. (Web of Science).
70. Охтеня І.О. Особливості проектування конструкцій зі сталевих гнутих профілів і профілів підвищеної жорсткості // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА, м. Київ, 17-19 жовтня 2006 р. – С. 31.
71. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Программные средства и нормативные документы: вопросы и проблемы. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, В. А. Рыбаков // 2008.-30 с.
72. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / Изд. 3-е, переработанное и дополненное. - М.: Изд- во ДМК, 2007. - 595 с.
73. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы: в 3-х т. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, 4, № 1, 2001. – 2007. – 670 с.

74. Перельмутер А.В., Юрченко В.В.. До питання розрахунку просторових конструкцій із тонкостінних стержнів відкритого профілю // НПО «СКАД Софт», 2014.
75. Писаренко Г.С. Опір матеріалів. Київ, 1973.
76. Ракша С.В. Связная потеря устойчивости и весовая оптимизация тонкостенных стержней открытого профиля. Дисертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Днепропетровск – 2003.
77. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зннатне, 1988.
78. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К.: КПИ, 2011. – 317 с.
79. Рыбаков В.А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 207 с.
80. Рыбаков В.А. Применение полусдвиговой теории В.И. Сливкера для анализа напряженно-деформированного состояния систем тонкостенных стержней. Дис. канд. техн. наук. СПб, 2012. 184 с.
81. Рыбаков В.А., Гамаюнова О.С. Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. №7 (12). С. 79-123.
82. Семко В.О. Сталеві холодноформовані тонкостінні конструкції: монографія / В. О. Семко. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2017. – 325 с
83. Сен-Венан. Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм //ГИФМЛ, М. 1961.
84. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 2005. 736 с.
85. СНиП II-23-81*. Стальные конструкции/Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. – 96с.

86. Советников Д.О., Азаров А.А., Иванов С.С., Рыбаков В.А. Методы расчета тонкостенных стержней: статика, динамика, устойчивость // Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, 2018, Россия, г. Санкт-Петербург.
87. Советников Д.О., Виденков Н.В., Трубина Д.А. Легкие стальные тонкостенные конструкции в многоэтажном строительстве // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 3 (30). С. 152-165.
88. СП 16.13330.2017. Стальные конструкции / Минстрой России. — М., 2017. —140 с.
89. СП 260.1325800.2016. Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутой оцинкованной профилей и гофрированных листов / Минстрой России. – М., 2016. –124 с.
90. Тарасов А.В., Тарасов И.В., Петухова И.Я. Рамная конструкция с несущими элементами нового типа сечения из тонколистовой оцинкованной стали // Международный научно-исследовательский журнал. 2015. № 11-4 (42). С. 131–134.
91. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с.
92. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Добавление: В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни и оболочки с жестким открытым профилем. – М.; Л., 1946.
93. Трубина Д.А., Кононова Л.А., Кауров А.А., Пичугин Е.Д., Абдулаев Д.А. Местная потеря устойчивости стальных холодногнутой профилей в условиях поперечного изгиба // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. № 4 (19). С. 109-127.
94. Туев Д.С., Умнова О.В. Влияние местной потери устойчивости на несущую способность ЛСТК профиля // В сборнике: Новые информационные технологии в науке. Сборник статей международной научно-практической конференции. 2016. С. 177-184.

95. Туснин А.Р. Точность расчета тонкостенного стержня открытого профиля методом конечных элементов // Промышленное и гражданское строительство. 2003. Т. 6. С. 59–60.
96. Туснин А.Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. Дис. докт. техн. наук. М., 2003.
97. Туснина О.А. Особенности работы тонкостенного холодногнутого прогона С-образного сечения // ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2004.
98. Уэй Э., Хэйвуд М., Беляев Н.А., Билык С.И., Билык А.С. Расчет элементов из стальных холодноформованных профилей в соответствии с Еврокодом 3. Украинский Центр Стального Строительства, 2015,
99. Уманский А.А. Изгиб и кручение тонкостенных авиационных конструкций. М.: Оборониздат, 1939. 112 с.
100. Уманский А.А. Расчет тонкостенных криволинейных балок // Труды научно-технической конференции ВВА им. Жуковского, вып. 2, 1944. 12 с.
101. Шемкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC NASTRAN fir Windows - М.: ДМК Пресс, 2003 – 448 с.
102. Юрченко В.В., Перельмутер А.В. Несуча здатність стержневих елементів конструкцій із холодногнутих профілів – К.: Каравела, 2020 – 310 с.
103. Юрченко В.В. Разработка аналитических зависимостей для оценки значений критических сил потери местной устойчивости и потери устойчивости формы сечения тонкостенных стержней открытого профиля // Металлические конструкции. 2012. № 3(18). С. 185-196
104. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней.. М, 1952. 428 с.
105. AISI S100–12 North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, 2014.

106. Arbocz J. and Babcock C.D. The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells // J. Appl. Mech. Ser. E. – 1969. – 36, No. 1. - P. 28 - 38.
107. AS 4084 – 2012. Australian Standard. Steel storage racking.
108. Bach C. Versuche uber die tatsachliche Widerstandskraft von Balken mit U-formigem Querschnitt // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. – 1909. – Vol. 53. – P. 1790-1795.
109. Bauschinger J. // Mittheilungen aus dem mechanisch technischen Laboratorium der Technischen Hochschule in Munchen. – 1886, 1887. – H. XV.
110. Bilyk S.I., Yurchenko V.V. Size optimization of single edge folds for cold-formed structural members // Опір матеріалів і теорія споруд / Strength of Materials and Theory of Structures. 2020. № 105.
111. Bushnell D. Computerized buckling analysis of shells. Springer Netherlands. 1985.
112. Bushnell D., Rankin C. Optimization of perfect and imperfect ring and stringer stiffened cylindrical shells with PANDA2 and evaluation of the optimum designs with stags. AIAA 43rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA Paper 2002-1408, 2002.
113. Camotim D., Basaglia C. On the behaviour, failure and direct strength design of thin-walled steel structural systems. Thin-Walled Structures. 2014. Vol. 81. pp. 50-66.
114. Carrera E., Kaleel I., Petrolo M. Elastoplastic analysis of compact and thinwalled structures using classical and refined beam finite element models. Mechanics of Advanced Materials and Structures 4, 0-0. 2017.
115. Considere A. G. Resistance des piences comprimees // Congres International des procedes de construction. – T. 3. – Paris: 1891. – P. 371.
116. Dinis P., Camotim D., Local/distortional/global buckling mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns, in: Proceedings of SSRC Annual Stability Conference, 2009, pp. 295–323.

117. Dinis P. B., Camotim D., Local/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel beams, *Thin-Walled Structures* 48 (10-11) (2010) 771–785.
118. Dinis P., Camotim D., Post-buckling behavior of cold-formed steel lipped channel columns affected by distortional/global mode interaction, in: *Proceedings of SSRC Annual Stability Conference, 2008*, pp. 405–431.
119. Donnell L.H.: A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending. *Trans, ASME*, vol. 56, 1934, pp. 795-806.
120. Dubina D. The ECBL approach for interactive buckling of thin-walled steel members, *Steel and Composite Structures, An International Journal* 1 (1) (2001). 75–96.
121. Dubina D., Ungureanu V. Behaviour of multi-span purlins of bolted lapped cold-formed Z-sections // *Proceedings of 5th conf. on coupled instabilities in systems. - Principles for struc metal structures. - Sydney, Australia, 2008. – Vol. 1, 2008. – P. 507-514.*
122. Dubina D., Ungureanu V. Behaviour of multi-span cold-formed Z-purlins Members, ECCS. - Brussels, with bolted lapped connections // *Thin-walled structures. – 48(10-11), 2010. – P. 866-871.*
123. Dubina D., Ungureanu V. Effect of imperfections on numerical simulation of instability behaviour of cold-formed steel members // *Thin-walled structures. 40, 2002. – P. 239-262.*
124. Dubina D., Ungureanu V. Elastic-plastic interactive buckling of thin-walled steel compression members // *Proceedings of 15th int. conf. on cold-formed steel structures. – St. Louis, USA, 2000. – P. 223-237.*
125. Dubina D., Ungureanu V., Rondal J. Numerical modelling and codification of imperfections for cold-formed steel members analysis // *Steel and composite structures. – Vol. 5, No. 6, 2005. – P. 515-533.*
126. Dubina D., Ungureanu V., Stratan A. Ultimate design capacity of pitch-roof portal frames made by thin-walled cold-formed members // *Proceedings*

- of the 5th int. conf. on thin-walled structures: recent innovations and developments, Vol. 1.
127. Dubina, D., Ungureanu V. Instability mode interaction: From van der neut model to ECBL approach, *Thin-Walled Structures* 81 (2014) 39–49.
 128. Duleau A. Essai the orique et experimental sur la resistance du fer forge. – Paris: 1820.
 129. Euler L. Sur la force de colonnes // *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 13, 1759. – P. 252–282.
 130. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1–3: General rules. Supplementary rules for coldformed members and sheeting. Ref. No. EN 1993-1-3:2006. – Brussels: European Committee for H, 2006. – 125 p.
 131. Farzalian S., Louhghalam A., Schafer B. W., Tootkaboni M. Geometric imperfection models for CFS structural members, Part I: Comparative review of current models // *Thin-Walled Structures*. – 2023. – №186.
 132. Giunta G., Belouettar S., Biscani F., Carrera E. Hierarchical theories for a linearised stability analysis of thin-walled beams with open and closed cross-section. *Advances in aircraft and spacecraft science* 1:3, 253-271. 2014.
 133. Giunta G., Belouettar S., Higher-Order Hierarchical Models for the Free Vibration Analysis of Thin-Walled Beams. *Mathematical Problems in Engineering*, 1-12. 2015.
 134. Halphen G. Sur les déplacements infiniment petits des surfaces élastiques. – Paris, - 1884.
 135. Hsiao K.M., Lin J.Y. and Lin W.Y.A Consistent Co-Rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1999. Vol. 169. pp. 1-18.
 136. Hsiao K.M., Wen Y., Chen R. Geometrically nonlinear dynamic analysis of thin-walled beams. *Proceeding of the worldcongress on engineering.* 2009. Vol. 2. pp. 124-139.

137. Hodgkinson E. Experimental research on the strength of pillars of castiron and other materials // Philosophical Transactions. – 1840. – Part II. – P. 385 – 456.
138. Hutchinson J. W., Tennison R. S., and Muggeridge D. B. Effect of a local axisymmetric imperfection on the buckling behavior of a circular cylindrical shell under axial compression // AIAA J. – 1971. – 9, No. 1. – P. 48 – 52.
139. Hutchinson J.: Axial Buckling of Pressurized Imperfect Cylindrical Shells. AIAA J., vol. 3, Aug. 1965, pp. 1461-1466.
140. Huu-Tai Thai, Brian Uy, Mahbub Khan. A modified stress-strain model accounting for the local buckling of thin-walled stub columns under axial compression. Journal of Constructional Steel Research. 2015. Vol. 111. pp. 57-69.
141. In Seop Choi, Gang-Won Jang, Soomin Choi, Dongil Shin, Yoon Young Kim. Higher order analysis of thin-walled beams with axially varying quadrilateral cross sections. Computers & Structures, 179, 127–139. 2017.
142. Jobbágy D., Ádány S. Local buckling behaviour of thin-walled members with curved cross-section parts. Thin-Walled Structures. 2017. Vol. 115. pp. 264-276.
143. Kamenskikh I.V. (2004). Matematicheskoye i chislennoye modelirovaniye zadach ustoychivosti tonkostennykh konstruktsiy metodom modul-elementov. [Mathematical and numerical modeling of problems of stability of thin-walled structures using modular elements] Diss. na soisk. uchen. step. k.f-m.n.: Spets. 05.13.18. Komsomolsk-na-Amure, 2004. 210 p. (rus).
144. Koiter W.T.: The Effect of Axisymmetric Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells Under Axial Compression. 6-90-63-86, Lockheed Missiles and Space Company, Sunnyvale, California, Aug. 1963.
145. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams. Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 578-579. Pp. 858-863.

146. Lee L. H. N.: Effects of Modes of Initial Imperfections on the Stability of Cylindrical Shells under Axial Compression, Collected Papers on Instability of Shell Structures, NASA TN D-1510, 1962, p. 143-162.
147. Li L.Y., Chen J.K. An analytical model for analysing distortional buckling of cold-formed steel sections. Thin-walled structures. 2008. Vol. 46. Issue 12. Pp. 1430-1436.
148. Lukianchenko O., Kostina O., Okhten I. Numerical approach to research of elastic systems parametric vibrations with shape imperfections // Світ наукових досліджень. Випуск 16. 3б. Наукових публікацій міжнародної мультидисциплінарної наукової інтернет-конференції. м. Тернопіль, Україна – м. Переворськ, Польща, 16-17 лютого 2023 р. – С. 403.
149. Lu S.Y., and Nash W.A.: Buckling of Initially Imperfect Axially Compressed Cylindrical Shells. Collected Papers on Instability of Shell Structures, NASA TN D-1510, 1962, pp.187–202.
150. Musschenbroek P. Physique experimentales et geometricae. – Lugdum: 1729.
151. Okhten I. Influence of initial imperfections on thin-wall beams stability // XXVII International Scientific and Practical Conference «Multidisciplinary academic research and innovation» (May 25-28, Amsterdam, Netherlands, 2021).
152. Okhten I.O., Lukianchenko O.O. Some aspects of consideration of initial imperfections in the calculations of stability of thin-walled elements of open profile // Strength of materials and theory of structures. K.: KNUCA. – 2021. – Issue 106. – P. 122-128. (Web of Science).
153. Pala M. A new formulation for distortional buckling stress in cold-formed steel members. Journal of Constructional Steel Research. 2006. Vol. 62. Iss. 7. Pp. 716 – 722.
154. Pala M. Genetic programming-based formulation for distortional buckling stress of cold-formed steel members. Journal of Constructional Steel Research. 2008. Vol. 64. Issue 12. pp. 1495-1504.

155. Pavazza R., Vlak F., Vukasović M. Short Steel Thin-walled Columns Subjected to Eccentric Axial Loads. *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 161. pp. 349–355.
156. Schafer B. W., Peköz. T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses // *Journal of Constructional Steel Research*. – 1998. – №47. – C. 193–200.
157. Šimić, D. Critical. Force Analysis of Thin-Walled Symmetrical Open-Section Beams, *Applied Mechanics and Materials (Volume 827)*, Trans Tech Publications. – Switzerland, 2016. – P. 283-286.
158. Simitses G.J., Shaw D., Sheinman I. Imperfectionsensitivity of laminated cylindrical shells in torsion and axial compression. *Compos. Struct.*4, 335-360 (1985).
159. Simitses G.J. Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells: a review. *Appl. Mech. Rev.* 39, 1517–1524 (1986).
160. Tetmajer L. *Mittheilungen der Anstalt zur Pruefung von Baumaterialen in Zuerich*. 1890. – H. IV.
161. Tsouvalis N.G., Zafeiratou A.A., Papazoglou V.J. et al., “Numerical modelling of composite laminated cylinders in compression using a novel imperfection modelling method”, *Composites Part B Engineering*, 32 (2001), 387–399.
162. Tsouvalis N.G., Zafeiratou A.A., and Papazoglou V.J. “The effect of geometric imperfections on the buckling behaviour of composite laminated cylinders under external hydrostatic pressure”, *Composites Part B Engineering*, accepted for publication (2002).
163. van Karman Th. and Tsien, H.S.: The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression. *J. Aeron. Sci.*, vol, 8, 1941, pp. 303-312.
164. Vieira R., Virtuoso F., Pereira E. Buckling of thin-walled structures through a higher order beam model. *Computers & Structures*. 2017. Vol. 180. Pp. 104-116.

165. Wang B., Bosco G.L., Gilbert B.P., Guan H. The. Unconstrained shape optimisation of singly-symmetric and open cold-formed steel beams and beamcolumns. 2016. Thin-Walled Struct. Vol. 104. pp. 54–61.
166. Winter G. Strength of thin steel compression flanges // Transactions. - 1947. Vol. 112, Paper № 2305. – P. 527 – 554.
167. Yu Wei-wen and Davis C.S. "Buckling Behavior and Post-Buckling Strength of Perforated Stiffened Compression Elements" (1971).

ДОДАТКИ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Повітрофлотський пр. 31, м. Київ-37, 03037, тел. (044)241-55-80, факс (044)248-32-65
E-mail: knuba_admin@ukr.net, Web: http:// www.knuba.edu.ua, код ЄДРПОУ 02070909

№ _____

На № 1 від 01.06.2023

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Охтеня І.О. на тему «Стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми» у наукових дослідженнях кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) та Науково-дослідного інституту будівельної механіки (НДІБМ КНУБА).

Результати дисертаційної роботи Охтеня І.О. на тему «Стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми» використані при виконанні науково-дослідних робіт, що виконувалась за напрямком 05 – «Нові комп'ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України:

ЗДБ-2008 «Теоретичні основи та методики дослідження стійкості та руйнування просторових тонкостінних конструкцій пружних систем» (2008-2010 рр. № держ. реєстрації 0108U000230);

4ДБ-2022 «Створення теорії і методів дослідження вібраційних процесів у складних деформівних системах при експлуатаційних навантаженнях періодичного, стохастичного та ударного характеру» (№ держ. реєстрації 0122U001336).

Науковий внесок Охтеня І.О. полягає в чисельній реалізації методу скінченних елементів в задачах нелінійного деформування і стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконаlostями форми.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 за місцем захисту дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.

Проректор з наукової роботи
та інноваційного розвитку КНУБА



Олександр КОВАЛЬЧУК



ПРИВАТНЕ АКЦІОНЕРНЕ ТОВАРИСТВО "ОБОЛОНЬ",
Україна, 04212, м. Київ, вул. Богатирська, 3. Тел.: +38 (044) 392-30-17
E-mail: general@obolon.ua

03.11.2023 № 53711

На № _____ від _____

ДОВІДКА

У 2023 році проектна група ТОВ «Класика Комфарту» під керівництвом провідного інженера Охтеня І.О. виконала обстеження технічного стану та перевірни розрахунки несучої здатності конструкцій покриття з урахуванням додаткового навантаження по проекту «Влаштування дахової сонячної електростанції на покрівлі виробничої будівлі «Цех розливу в скляні банки по вул. Богатирській, 3, літера «М» в м. Києві».

В рамках даної роботи проведений аналіз міцності та стійкості тонкостінних Σ - подібних прогонів покриття ($h=200$ мм), виготовлених зі сталі марки S350GD, з урахуванням виявлених пошкоджень та дефектів.

Результати розрахунків дозволили прийняти рішення про можливість влаштування додаткового обладнання на покрівлі даного виробничого корпусу.

Директор інжинірингового центру



Ярослав СЕМЬОШКІН