

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПР МАТЕРІАЛІВ.

**Розрахунок прокатної балки.
Плоский напружений стан в точці**

Методичні рекомендації
до виконання розрахунково-графічної роботи №3

*Для студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія»
ОП «Промислове і цивільне будівництво»*

Київ 2023

УДК 539.3

О - 61

Укладачі: О.П. Кошевий, канд. техн. наук., доцент

Л.О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук., доцент

А.Г. Чубарєв,

І.Р. Дамнаті

Рецензент: Д.В. Левківський, канд. техн. наук., доцент

Відповідальний за випуск: О.П. Кошевий, канд. техн. наук, за-
відувач кафедри

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, прото-
кол № 3 від 3 листопада 2023 року*

Опір матеріалів. Розрахунок прокатної балки. Плоский напружений стан в точці. Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи №3. Уклад.: О.П. Кошевий, Л.О. Григор'єва, А.Г. Чубарєв, І.Р. Дамнаті. – Київ.: КНУБА, 2023. – 31 с.

Містять теоретичні відомості, приклади та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи №3 з опору матеріалів для студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» ОП «Промислове і цивільне будівництво».

© КНУБА, 2023

Зміст

Загальні вказівки.....	4
1. Теоретичні відомості.....	5
1.1. Плоский згин балки.....	5
1.2. Плоский та лінійний напружений стан.....	10
2. Приклад виконаного завдання.....	12
3. Завдання до самостійної роботи.....	28
Додатки.....	30
Рекомендована література.....	31

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Перед виконанням розрахунково-графічних робіт необхідно опрацювати теоретичні відомості і методи розв'язання задач, стисло наведені в тексті методичних рекомендацій. Відповідні розділи теоретичного курсу опору матеріалів більш широко викладено в підручниках, вказаних в списку літератури.

Задачі і вправи виконуються за індивідуальними завданнями, дані для яких вибираються відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа. Перша цифра шифру відповідає варіанту розрахункової схеми, друга і третя цифри шифру – значенням геометричних розмірів і величин силових факторів. Умови задач наведені в тексті методичних вказівок і в додатках.

При оформленні розв'язків контрольних задач і пояснювальної записки до розрахунково-графічної вправи спочатку вказується шифр, наводиться відповідна шифру схема і необхідні вихідні дані, потім викладається розрахунок.

Розрахунки на кожному окремому етапі оформлюються в такій послідовності: розрахункова формула, підстановка в неї конкретних даних, остаточний результат і одиниця розмірності величини. Розв'язки задач і вправ виконуються в одиницях СІ. При здачі РГР студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу. Наступна робота приймається після здачі попередньої.

Терміни виконання розрахунково-графічних вправ і поточного контролю установлюються відповідно до робочих планів по дисципліні. До іспитів студент допускається тільки після здачі усіх вправ і виконання завдань, передбачених робочим планом.

1. Теоретичні відомості.

1.1. Плоский згин балки.

Побудова епюр поперечної сили Q та згинального моменту M для статично визначеної балки проводиться за методикою, описаною в [4, 5].

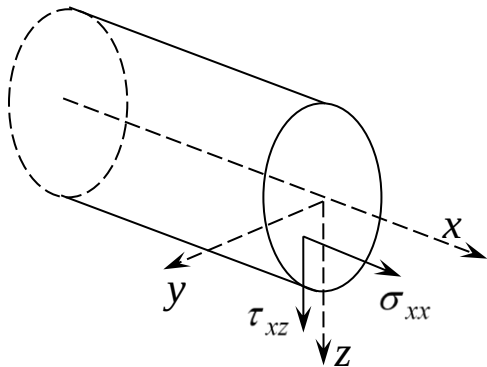


Рис. 1.1

При плоскому згинанні в точках поперечних перерізів балок виникають нормальні напруження $\sigma_{xx}(x, z)$ та дотичні напруження $\tau_{xz}(x, z)$ (Рис. 1.1).

Нормальні напруження σ за законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1)$$

виражаються через поздовжню деформацію

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (2)$$

Для знаходження нормальних напружень через внутрішні зусилля користуємося формулою

$$\sigma = \frac{Mz}{I}. \quad (3)$$

Тут $I = \iint z^2 dA$ – осьовий момент інерції перерізу відносно вісі y [4, 5].

Для визначення дотичних напружень в точках перерізу користуємося формулою Журавського

$$\tau = \frac{QS_y(z)}{Ib(z)}, \quad (4)$$

де $S_y(z)$ – статичний момент “відрізаної” частини перерізу, $b(z)$ – ширина перерізу на відстані z від вісі y (Рис. 1.2).

В загальному випадку перевірка міцності балки в різних точках перерізу проводиться по різному:

– В крайніх точках перерізу ($z = z_{\max}^{\pm}$, рис. 4.2) нормальні напруження набувають максимальних значень $\sigma = \sigma_{\max}^{\pm}$, дотичні напруження $\tau = 0$. Для оцінки міцності користуємося умовою міцності по нормальних напруженнях

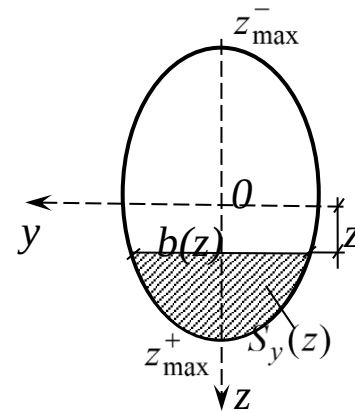


Рис. 1.2

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}. \quad (5)$$

Максимальні напруження визначаються за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y}, \quad (6)$$

де $M_{\max}$ – максимальний згинальний момент (береться по модулю з епюри), $W_y = I_y / z_{\max}$ – момент опору перерізу (для прокатних балок дано в таблицях сортаменту, для інших перерізів рахуємо за формулами п.1).

– На нейтральній лінії $z = 0$ нормальні напруження $\sigma = 0$, дотичні напруження набувають максимальних значень $\tau = \tau_{\max}$. Оцінка міцності проводиться по дотичних напруженнях

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} \quad (7)$$

Допустиме дотичне напруження пов'язане з допустимим нормальним напруженням приблизною рівністю $\tau_{adm} \approx \sigma_{adm} / \sqrt{3}$. Максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{I b(0)}. \quad (8)$$

– В інших точках перерізу $\sigma \neq 0$, $\tau \neq 0$ перевірка міцності проводиться по приведених напруженнях

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}. \quad (9)$$

Приведене напруження по різних теоріях міцності має різне значення. Для третьої теорії міцності

$$\sigma_{red} = \sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (10)$$

для четвертої (енергетичної) теорії

$$\sigma_{red} = \sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (11)$$

При практичних розрахунках підбір перерізу проводиться за умовою міцності по нормальних напруженнях (5), (6), а умови (7), (9) перевіряються.

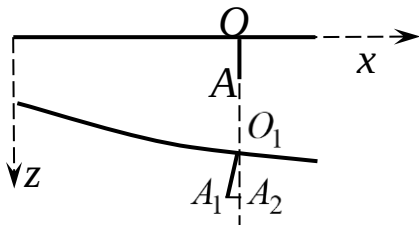


Рис. 1.3

Розглянемо деформований стан балки. Нехай відрізок OA поперечного перерізу при деформуванні прийняв положення O_1A_1 (рис. 1.3). На рисунку $OO_1 = w$ – прогин балки, $\angle A_1O_1A_2 = \frac{dw}{dx} = \phi$ – кут повороту перерізу балки.

Згинальний момент M та прогин w пов'язані диференціальним співвідношенням

$$M = -EI \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (12)$$

яке називається *рівнянням зігнутої осі балки*.

Для знаходження переміщень через відомі внутрішні зусилля будемо застосовувати *метод початкових параметрів* (МПП).

Прогин балки $w(x)$ та кути повороту поперечних перерізів $\phi(x) = \frac{dw}{dx}$ при постійній жорсткості балки EI визначаються за формулами

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - M_0x - Q_0 \frac{x^2}{2} + \sum M(x - x_m) + \sum P \frac{(x - x_p)^2}{2} + \sum q \left[\frac{(x - x_{qn})^3}{6} - \frac{(x - x_{qk})^3}{6} \right]; \quad (13)$$

$$EIw(x) = EIw_0 + EI\varphi_0x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} + \sum M \frac{(x - x_m)^2}{2} + \sum P \frac{(x - x_p)^3}{6} + \sum q \left[\frac{(x - x_{qn})^4}{24} - \frac{(x - x_{qk})^4}{24} \right]. \quad (14)$$

Рівняння методу початкових параметрів (13), (14) впливають з рівняння (12) шляхом послідовного інтегрування з врахуванням початкових умов. Додатні напрями M , P , q показані на рис. 1.4. Початок відліку координат x знаходиться на лівому кінці балки.

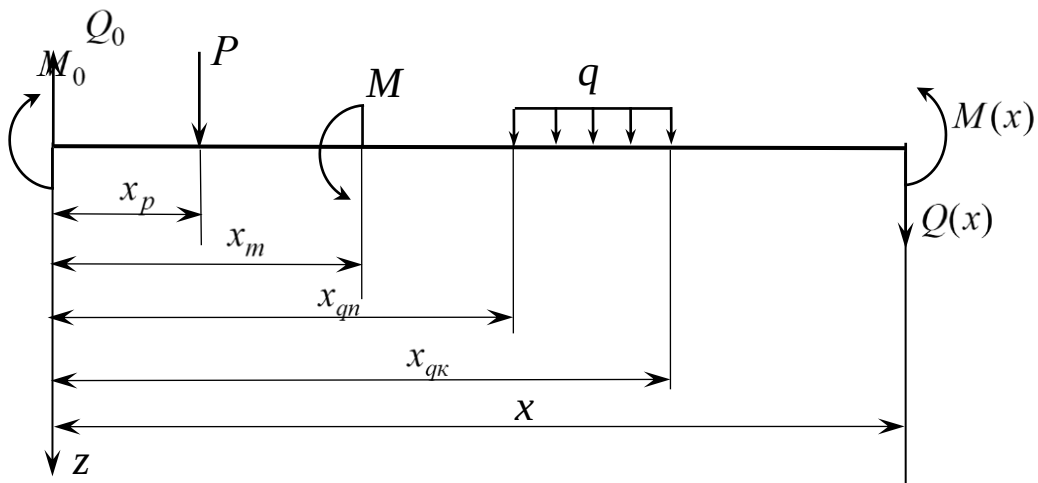


Рис. 1.4

Правило знаків для рівнянь (4.13), (4.14) можна також сформулювати в наступному вигляді: якщо силовий фактор утворює додатній момент (стискує верхні волокна), то цей фактор входить в рівняння МПП з знаком “—”, і навпаки.

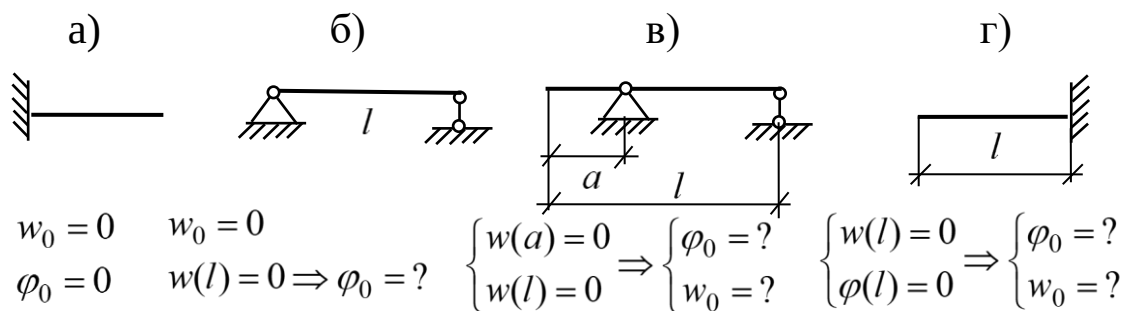


Рис. 1.5

Величини w_0, φ_0, Q_0, M_0 , які є значеннями відповідних функцій при $x = 0$, називаються **початковими параметрами**. Значення Q_0 та M_0 беруться з епюр $Q(x)$ та $M(x)$, значення w_0 та φ_0 визначаються з умов закріплення балки. Можливі випадки показані на рис. 1.5. Невідомі початкові параметри для закріплень б), в), г) визначаються з відповідних граничних умов за допомогою рівнянь (13), (14), записаних в точках закріплення.

При застосуванні рівнянь (13), (14) враховуються лише ті силові фактори, що лежать зліва від точки x (якщо x менше за координату прикладання силового фактору, то цей доданок не враховується).

1.2. Плоский та лінійний напружений стан

Лінійний напружений стан отримуємо у випадку, якщо на елемент діє лише одне головне напруження $\sigma_1 \neq 0$ (деформація розтягу) або $\sigma_3 \neq 0$ (деформація стиску). Позначимо це напруження за σ_0 . Воно діє на елементарній площадці dA . На площадці

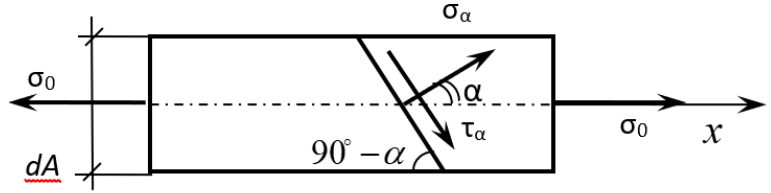


Рис. 1.6.

під кутом α до осі x площею $\frac{dA}{\cos \alpha}$ будуть діяти нормальні напруження σ_α та дотичні напруження τ_α (рис. 1.1). Запишемо рівняння рівноваги лівої частини елемента:

$$\sum F_x = 0: -\sigma_0 dA + \sigma_\alpha \cos \alpha \frac{dA}{\cos \alpha} + \tau_\alpha \sin \alpha \frac{dA}{\cos \alpha} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \sigma_\alpha \sin \alpha \frac{dA}{\cos \alpha} - \tau_\alpha \cos \alpha \frac{dA}{\cos \alpha} = 0,$$

$$\tau_\alpha = \sigma_\alpha \operatorname{tg} \alpha, \sigma_0 = \sigma_\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\sigma_\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Ми отримали формули для знаходження напружень на похилій площадці (α відраховується проти годинникової стрілки від осі x):

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (15)$$

Плоский напружений стан виникає тоді, коли головне напруження в одному з напрямків дорівнює нулю (тобто $\det(\mathbf{T}_\sigma) = 0$). Нехай ненульовими коренями будуть σ_1, σ_2 (рис. 1.7).

Напруження на площадці під кутом α отримуються з (10) за допомогою методу суперпозицій

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (16)$$

На площадці під кутом $\beta = 90^\circ - \alpha$ маємо

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\beta = -\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

При відомих напруженнях на площадках $\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\beta$ або $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$ для знаходження головних напружень характеристичне рівняння зводиться до квадратного рівняння

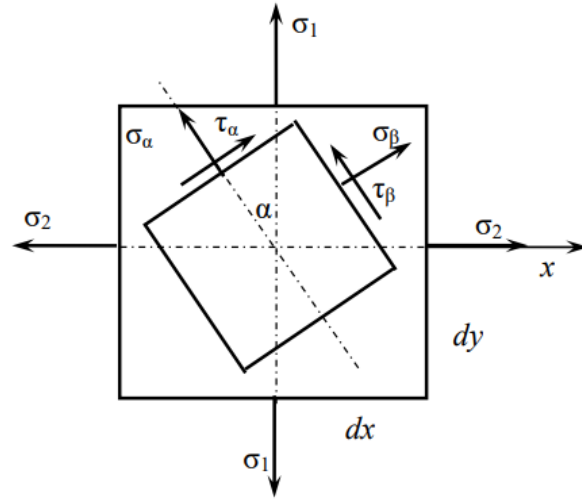


Рис. 1.7

$$\sigma^2 - (\sigma_\alpha + \sigma_\beta)\sigma + (\sigma_\alpha\sigma_\beta - \tau_\alpha^2) = 0.$$

Корені квадратного рівняння

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (17)$$

Нумерація головних напружень вводиться згідно введенного правила $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ з врахуванням нульового кореня.

Кут α_0 положення головних осей визначається з (21) шляхом алгебраїчних та тригонометричних перетворень:

$$\operatorname{tg}|\alpha_0| = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} \quad \text{або} \quad \operatorname{tg}2|\alpha_0| = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (18)$$

Кут α_0 відкладається від більшого з напружень $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ в напрямку дії τ_α

2. Приклад виконаного завдання.

Задача 1. Розрахунок статично визначеної балки.

Для заданої на рис.2.1 балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати круглий, прямокутний ($h = 2b$) і двотавровий поперечні перерізи. Провести повну перевірку міцності для підібраної двотаврової балки. Методом початкових параметрів визначити прогини і кути повороту перерізів і побудувати їх епюри по довжині балки, перевірити жорсткість балки. Дано: $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$, $\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язок. 1. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 4 - M + V_B \cdot 7 = 0,$$

$$V_B = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 25}{7} = 17,3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M + F \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 6 - V_A \cdot 7 = 0,$$

$$V_A = \frac{-25 + 15 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 6}{7} = 33,7 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_z = q \cdot 6 + F - V_A - V_B = 6 \cdot 6 + 15 - 17,3 - 33,7 = 0.$$

Малюємо під балкою її схему.

2. Побудова епюр Q та M . Для цього розбиваємо балку на три ділянки, визначаємо $Q(x)$ та $M(x)$ в характерних точках і будуємо епюри зліва направо.

$$Q(0) = 0 \text{ кН};$$

$$Q^l(2) = -q \cdot 2 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кН};$$

$$Q^{np}(2) = Q^l(2) + V_A = -12 + 33,7 = 21,7 \text{ кН};$$

$$Q^l(6) = -q \cdot 6 + V_A = -6 \cdot 6 + 33,7 = -2,3 \text{ кН};$$

$$Q^{np}(6) = Q^l(6) - F = -2,3 - 15 = -17,3 \text{ кН};$$

$$Q(8) = -17,3 \text{ кН}.$$

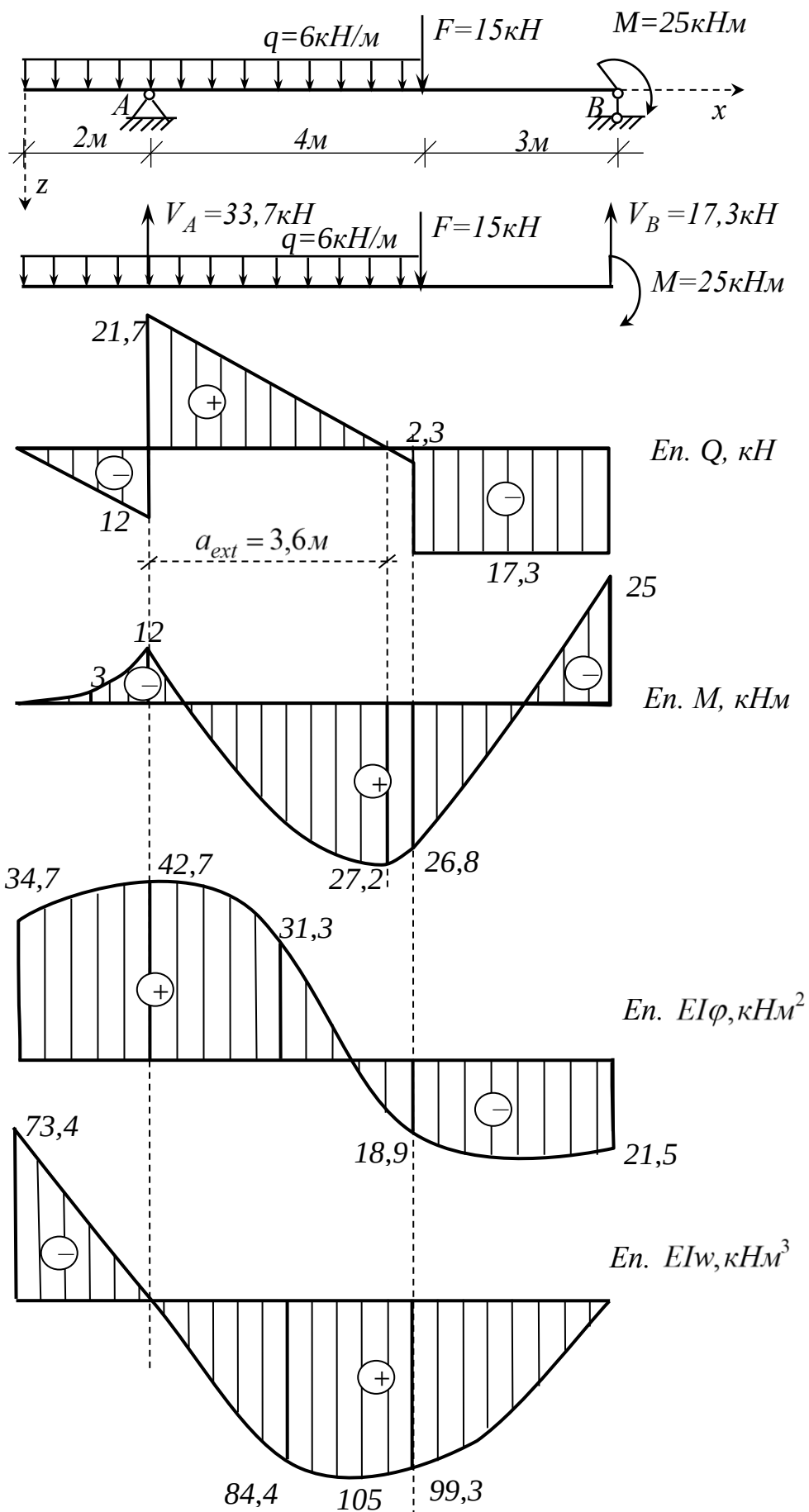


Рис. 2.1

$$M(0) = 0; \quad M(1) = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -6 \cdot 0,5 = -3 \text{ кНм} ;$$

$$M(2) = -q \cdot 2 \cdot 1 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм};$$

$$M(6) = -q \cdot 6 \cdot 3 + V_A \cdot 4 = -6 \cdot 18 + 33,7 \cdot 4 = 26,8 \text{ кНм};$$

$$M(8) = -q \cdot 6 \cdot 6 + V_A \cdot 7 - F \cdot 3 = -6 \cdot 36 + 33,7 \cdot 7 - 15 \cdot 3 = -25,1 \approx -25 \text{ кНм}.$$

В перерізі, де $Q = 0$, згинальний момент приймає екстремальне значення M_{ext} . Для визначення координати точки екстремуму розгля-

немо прямокутний трикутник з катетами $Q^{np}(2) = 21,7 \text{ кН}$ та a_{ext} .

Тангенс кута нахилу гіпотенузи дорівнює розподіленому наванта-

$$\text{женню } q. \text{ Маємо } \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q^{np}(2)}{a_{ext}} = q, \quad a_{ext} = \frac{Q^{np}(2)}{q} = \frac{21,7}{6} = 3,6 \text{ м},$$

$$x_{ext} = 2 + 3,6 = 5,6 \text{ м}.$$

$$\text{Отже, } M_{ext} = M(5,6) = -6 \cdot \frac{5,6^2}{2} + 33,7 \cdot 3,6 = -94,1 + 121,3 = 27,2 \text{ кНм}.$$

3. Підбір перерізів. Максимальні значення перерізуючої сили і згинального моменту знаходимо з епюр:

$$Q_{\max} = 21,7 \text{ кН при } x = 2 \text{ м}, \quad M_{\max} = 27,2 \text{ кНм при } x_{ext} = 5,6 \text{ м}.$$

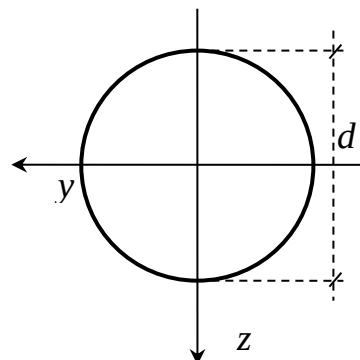
Підбираємо переріз з умови міцності по нормальних напруженнях: $\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$. Знаходимо необхідний момент опору:

$$W_{нб} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{27,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 170 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 170 \text{ см}^3.$$

а) підбір круглого перерізу

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = W_{нб};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 W_{нб}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 170}{3,14}} = 12 \text{ см};$$



$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} = 113 \text{ см}^2.$$

б) підбір прямокутного перерізу

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = W_{нб};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_{нб}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 170}{2}} = 6,3 \text{ см};$$

$$A_{нр} = bh = 2b^2 = 2 \cdot 6,3^2 = 79,4 \text{ см}^2.$$

в) Підбір двотаврового перерізу. З таблиць сортаменту беремо двотавр № 20, для якого

$$W_y = 184 \text{ см}^3, \quad I_y = 1840 \text{ см}^4,$$

$$A = 26,8 \text{ см}^2, \quad h = 20 \text{ см}, \quad b = 10 \text{ см},$$

$$d = 0,52 \text{ см}, \quad t = 0,84 \text{ см},$$

$$S_y = S_{\max} = 104 \text{ см}^3.$$

Порівняємо площі підібраних перерізів:

$$A_{кр} : A_{нр} : A_{дв} = 113 : 79,4 : 26,8 = 4,2 : 3 : 1.$$

Отже, двотавр є найбільш раціональним з запропонованих перерізів.

4. Виконуємо перевірку міцності підібраної двотаврової балки:

а) максимальне нормальне напруження визначаємо в перерізі

$x = 5,6 \text{ м}$, оскільки в цій точці балки $M(5,6) = M_{\max} = 27,2 \text{ кНм}$:

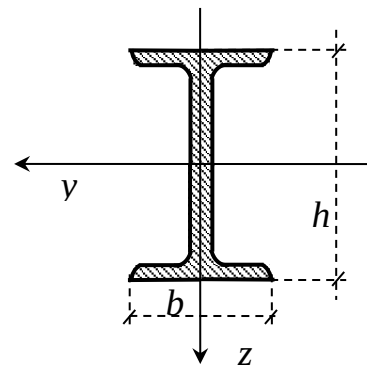
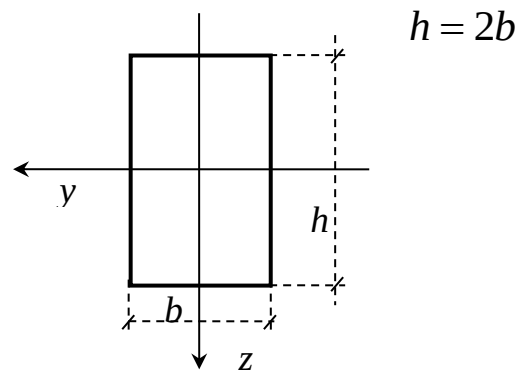
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{27,2 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 148 \cdot 10^6 \text{ Па} = 148 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується. Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{160 - 148}{160} \cdot 100\% = 7,5\%, \text{ що допустимо.}$$

б) максимальне дотичне напруження визначаємо в перерізі $x = 2 \text{ м}$,

оскільки в цій точці балки $Q(2) = Q_{\max} = 21,7 \text{ кНм}$:



$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{d \cdot I_y} = \frac{21,7 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \frac{21,7 \cdot 104}{0,52 \cdot 1840} \cdot 10^{3-6+2+8} =$$

$$= 23,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,6 \text{ МПа} \leq \tau_{adm} = 100 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується. Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{100 - 23,6}{100} \cdot 100\% = 76,4\%.$$

в) Перевірка міцності в точках, де $\sigma \neq 0$ і $\tau \neq 0$, виконується з використанням умови міцності для приведеного напруження $\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}$.

В перерізі $x = 6 \text{ м}$ момент $M = 26,8 \text{ кНм}$, перерізуюча сила

$Q = 17,3 \text{ кН}$. В точці 2 (для стійки)

$$\sigma = \frac{M \cdot (h/2 - t)}{I_y} = \frac{26,8 \cdot 10^3 \cdot (10 - 0,84) \cdot 10^{-2}}{1840 \cdot 10^{-8}} = 133,4 \text{ МПа},$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_n}{d \cdot I_y} = \frac{17,3 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 14,5 \text{ МПа},$$

оскільки статичний момент полиці двотавру відносно нейтральної осі

$$S_n = bt \frac{h-t}{2} = 10 \cdot 0,84 \frac{20 - 0,84}{2} = 80,5 \text{ см}^3.$$

Для пластичних матеріалів по четвертій теорії міцності

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{133,4^2 + 3 \cdot 14,5^2} \approx 136 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

5. Будуємо епюри σ та τ в небезпечних перерізах (рис.2.1.1).

Епюра нормальних напружень $\sigma = \frac{Mz}{I}$ (пряма лінія) будується по ви-

соті перерізу $x = 5,6 \text{ м}$, в якому виникають максимальні згинальні моменти. На проекціях точок $z = \pm h/2$ на вісь епюри відкладаємо значення $\sigma_{\max} = 148 \text{ МПа}$ («плюс» на розтягнутих волокнах).

Для побудови епюри дотичних напружень $\tau = \frac{QS(z)}{Ib(z)}$ в перерізі

$x = 2 \text{ м}$, в якому виникають максимальні поперечні сили, знаходимо

значення τ в характерних точках перерізу (рис. 2.1.1) за формулою Журавського

В точці 1 $S_1 = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$.

В точці 2 (для стійки)

$$\tau_2 = \frac{Q_{\max} S_n}{d \cdot I_y} = \frac{21,7 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 18,2 \text{ МПа}.$$

В точці 3 $\tau_3 = \tau_{\max} = 23,6 \text{ МПа}$.

Знаки на епюрах σ і τ визначаються по епюрах $M(x)$ та $Q(x)$ і формулах для напружень. Для стійки двотавра епюра τ має форму параболи.

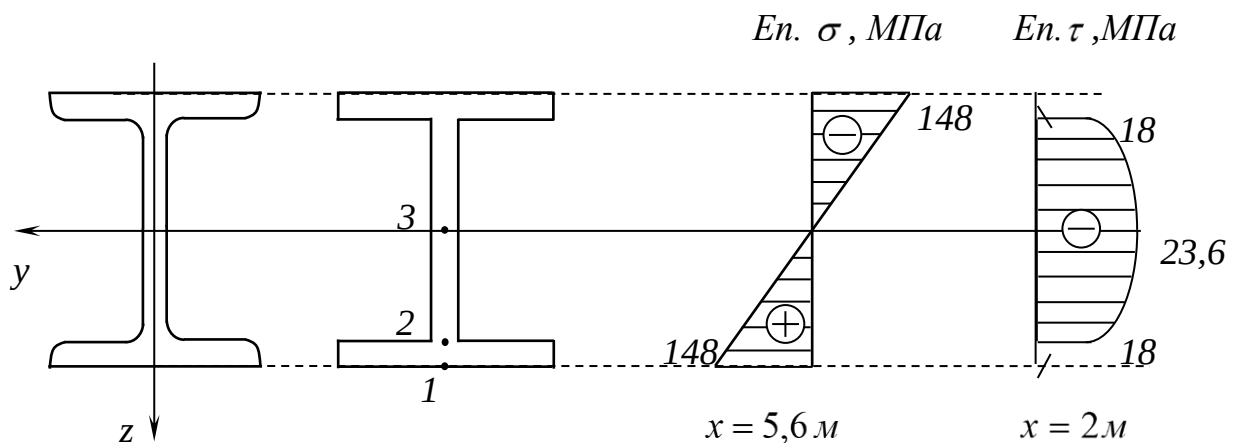


Рис. 2.1.1

6. Обчислюємо переміщення балки методом початкових параметрів.

Запишемо формули МПП для прогину і кута повороту перерізу балки:

$$EIw(x) = EIw_0 + EI\varphi_0 x - V_A \frac{(x-2)^3}{6} + F \frac{(x-6)^3}{6} + q \frac{x^4 - (x-6)^4}{24};$$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - V_A \frac{x^2}{2} + F \frac{(x-6)^2}{2} + q \frac{x^3 - (x-6)^3}{6}.$$

При обчисленні $w(x)$, $\varphi(x)$ в точці x_k в цих формулах враховуємо тільки силові фактори, що лежать лівіше від x_k . Момент M та

реакція V_B не входять в рівняння МПП, оскільки вони прикладені в крайній правій точці балки.

Для визначення початкових параметрів w_0, ϕ_0 записуємо рівняння прогинів в точках закріплення балки (при $x = 2\text{ м}$ прогин $w(2) = 0$, при $x = 9\text{ м}$ прогин $w(9) = 0$).

Отримуємо систему рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} EIw(2) = EIw_0 + 2EI\phi_0 + 6\frac{2^4}{24} = 0; \\ EIw(9) = EIw_0 + 9EI\phi_0 - 33,7\frac{(9-2)^3}{6} + 15\frac{(9-6)^3}{6} + 6\frac{9^4 - (9-6)^4}{24} = 0; \\ EIw_0 + 2EI\phi_0 + 4 = 0; \\ EIw_0 + 9EI\phi_0 - 239 = 0. \end{cases}$$

Віднімаючи перше рівняння від другого, знаходимо

$$7EI\phi_0 - 239 - 4 = 0;$$

$$EI\phi_0 = 243 / 7 = 34,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EIw_0 = -2EI\phi_0 - 4 = -2 \cdot 34,7 - 4 = -73,4 \text{ кНм}^3.$$

Таким чином, прогин і кут повороту вираховуємо за формулами

$$EIw(x) = -73,4 + 34,7 \cdot x - 33,7\frac{(x-2)^3}{6} + 15\frac{(x-6)^3}{6} + 6\frac{x^4 - (x-6)^4}{24};$$

$$EI\phi(x) = 34,7 - 33,7\frac{(x-2)^2}{2} + 15\frac{(x-6)^2}{2} + 6\frac{x^3 - (x-6)^3}{6}.$$

Вибираємо на осі балки декілька точок і обчислюємо $\phi(x), w(x)$ в кожній точці.

$$EI\phi(0) = 34,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\phi(2) = 34,7 + 2^3 = 42,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\phi(4) = 34,7 - 33,7 \cdot 2 + 4^3 = 31,3 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\phi(6) = 34,7 - 33,7\frac{4^2}{2} + 6^3 = -18,9 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(9) = 34,7 - 33,7 \frac{7^2}{2} + 15 \frac{3^2}{2} + 6 \frac{9^3 - 3^3}{6} = -21,5 \text{ кНм}^2.$$

$$EIw(0) = -73,4 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(2) = -73,4 + 34,7 \cdot 2 + 6 \frac{2^4}{24} = 0;$$

$$EIw(4) = -73,4 + 34,7 \cdot 4 - 33,7 \frac{2^3}{6} + 6 \frac{4^4}{24} = 84,4 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(6) = -73,4 + 34,7 \cdot 6 - 33,7 \frac{4^3}{6} + 6 \frac{6^4}{24} = 99,3 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(9) = -73,4 + 34,7 \cdot 9 - 33,7 \frac{7^3}{6} + 15 \frac{3^3}{6} + 6 \frac{9^4 - 3^4}{24} = -0,1 \approx 0.$$

По отриманих результатах будуюмо епюри $EIw(x)$, $EI\varphi(x)$. Бачимо, що максимальний прогин виникає в точці $x \approx 3,5 \text{ м}$, де $EI\varphi(x) \approx 0$:

$$EIw(5) = -73,4 + 34,7 \cdot 5 - 33,7 \frac{3^3}{6} + 6 \frac{5^4}{24} = 104,6 \text{ кНм}^3.$$

7. Перевірка жорсткості балки.

Обчислюємо максимальні значення кута повороту та прогину, поділивши знайдені значення на жорсткість балки (модуль Юнга

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$):

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 3680 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

$$\varphi_{\max} = \varphi(2) = \frac{42,7 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 0,0116 \text{ рад} = 0,0116 \frac{180^\circ}{3,14} = 0,67^\circ;$$

$$w_{\max} = w(5) = \frac{104,6 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 28,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,84 \text{ см}.$$

Для консольного кінця

$$w_{\max} = w(0) = \frac{-73,4 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = -19,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -2 \text{ см}.$$

Допустимі прогини в прольоті і для консольного кінця

$$f_{adm}^n = \frac{l_n}{250} = \frac{700}{250} = 2,8 \text{ см}, \quad f_{adm}^k = \frac{2l_k}{250} = \frac{2 \cdot 200}{250} = 1,6 \text{ см}.$$

Умови жорсткості

$$w_{\max} = 2,84 \text{ см} > f_{adm}^n = 2,8 \text{ см}, \quad w_{\max}^k = 2 \text{ см} > f_{adm}^k = 1,6 \text{ см}$$

Оскільки умови жорсткості не виконуються, збільшуємо переріз балки. Беремо двотавр № 22, для якого $I_y = 2550 \text{ см}^4$

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2550 \cdot 10^{-8} = 5100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

Для консольного кінця

$$w_{\max} = w(0) = \frac{-73,4 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} = -14,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,43 \text{ см}$$

$$w_{\max}^k = 1,43 \text{ см} \leq f_{adm}^k = 1,6 \text{ см}$$

Таким чином, потрібно вибрати двотавр № 22.

Задача 2. Для заданої на рис.2.2 балки побудувати епюри внутрішніх зусиль та підібрати двотавровий поперечний переріз. Побудувати епюри напружень в небезпечних перерізах для підбраної двотаврової балки. Методом початкових параметрів визначити прогини і кути повороту перерізів і побудувати їх епюри по довжині балки, перевірити жорсткість балки. Дано: $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$, $\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Будуємо епюри внутрішніх зусиль (рис. 2.2). Підбираємо поперечний переріз дво-

тавра по максимальних нормальних напруженнях в перерізі: $x = 5,62 \text{ м}$, $M_{\max} = 27,3 \text{ кНм}$:

$$W_y = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}},$$

$$W_y = \frac{27,3 \text{ кНм}}{160 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 170,5 \text{ см}^3.$$

Приймаємо двотавр №20:

$$W_{y \text{ №20}} = 184 \text{ см}^3,$$

$$I_{y \text{ №20}} = 1840 \text{ см}^4,$$

$$S_{y \text{ №20}} = 104 \text{ см}^3,$$

$$h = 20 \text{ см}, b = 10 \text{ см},$$

$$s = 0,52 \text{ см}, t = 0,84 \text{ см}.$$

Проводимо повну перевірку міцності перерізу:

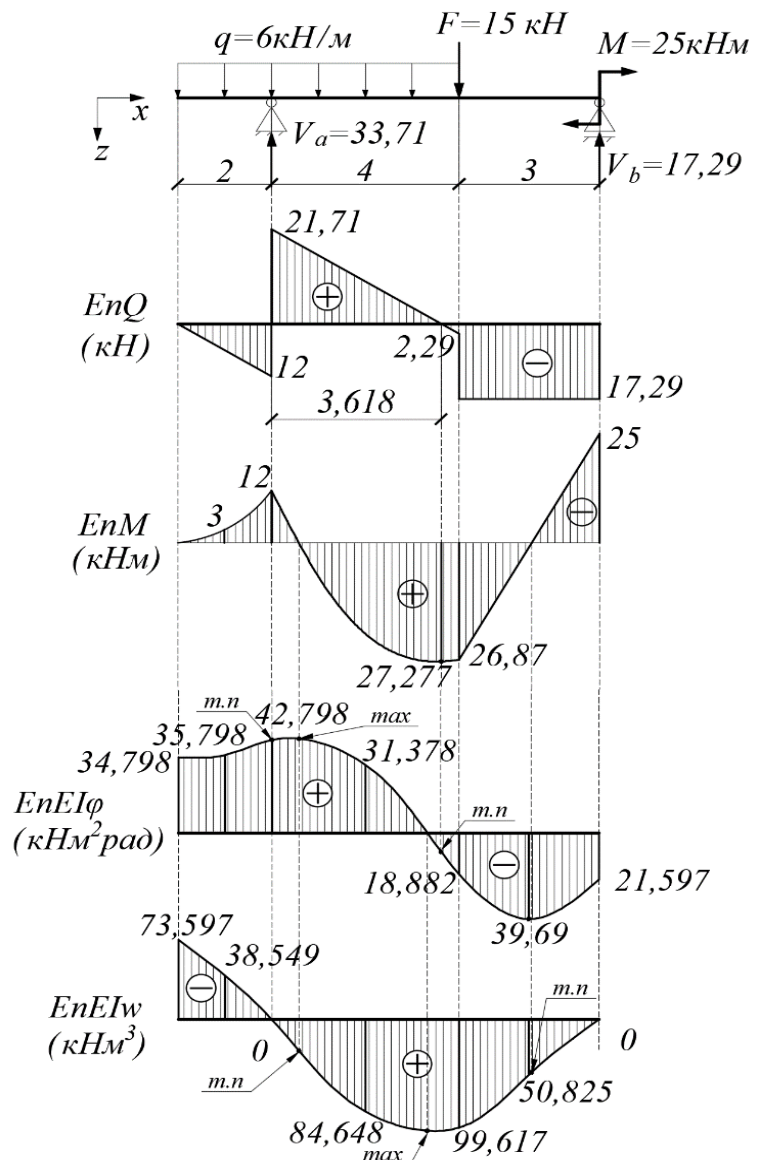


Рис. 2.2

- за максимальними нормальними напруженнями в перерізі $x = 5,62 \text{ м}$
:

$$\sigma_{\max}^{20} = \frac{27,3}{184} = 148 < 160 \text{ МПа};$$

- за максимальними дотичними напруженнями при $z = 0$ в перерізі $x = 2 \text{ м}$, $Q_{\max} = 21,7 \text{ кН}$, за формулою Журавського:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_y}{I_y \cdot b} = \frac{21,7 \text{ кН} \cdot 104 \text{ см}^3}{1840 \text{ см}^4 \cdot 0,52 \text{ см}} = 23,6 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}.$$

Маємо запас міцності.

- перевірка міцності за еквівалентними напруженнями на границі полки та стінки (т.1) в перерізі $x = 9 \text{ м}$: $Q = -17,29 \text{ кН}$, $M = -25 \text{ кНм}$,

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

$$\sigma_{x2} = \frac{M_y}{I_y} z_2 = \frac{-25}{1840} \cdot (-10) = 136 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} z_1 = \frac{-25}{1840} \cdot (-10 + 0,84) = 124,5 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

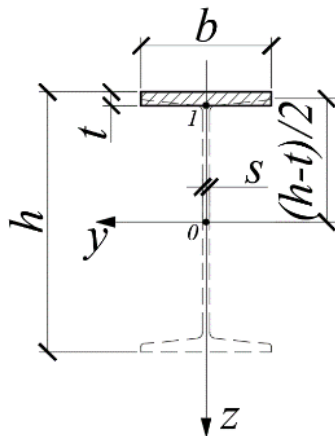


Рис. 2.2.1

$$\tau_{\max}^0 = \frac{Q_{\max} S_y}{I_y \cdot b} = \frac{-17,3 \text{ кН} \cdot 104 \text{ см}^3}{1840 \text{ см}^4 \cdot 0,52 \text{ см}} = -18,8 \text{ МПа}$$

Наближено визначаємо статичний момент полиці в т.1 (рис.2.2.1): $\tau_{\max}^2 = 0.$

$$S_y^1 = b \cdot t \cdot \frac{(h-t)}{2} = 10 \cdot 0,84 \cdot \frac{(20 - 0,84)}{2} = 80,5 \text{ см}^3.$$

$$\tau_{\max}^1 = \frac{Q_{\max} S_y^1}{I_y \cdot b} = \frac{-17,29 \text{ кН} \cdot 80,5 \text{ см}^3}{1840 \text{ см}^4 \cdot 0,52 \text{ см}} = -14,5 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max}^{*1} = \frac{Q_{\max} S_y^1}{I_y \cdot b} = \frac{-17,29 \text{ кН} \cdot 80,5 \text{ см}^3}{1840 \text{ см}^4 \cdot 10 \text{ см}} = -0,76 \text{ МПа}.$$

$\sigma_{екв1}^{III} = \sqrt{124,5^2 + 4 \cdot 14,54^2} = 128 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$ - умова міцності забезпечується.

Будуємо епюри напружень нормальних та дотичних напружень в небезпечних перерізах (рис. 2.2.2).

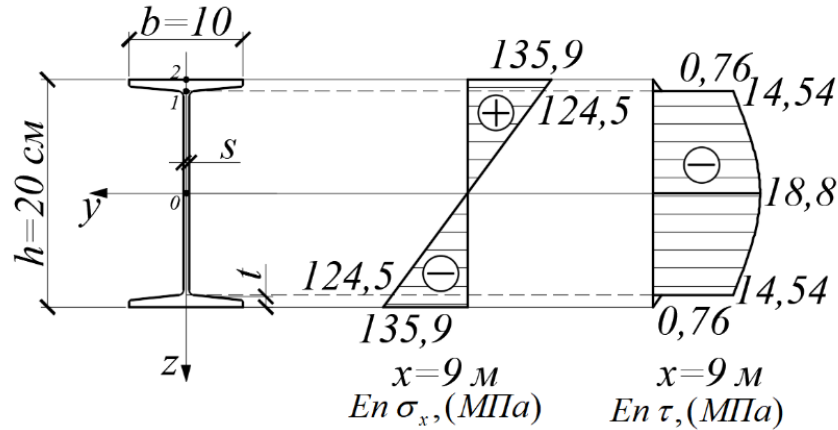


Рис. 2.2.2

Визначаємо початкові параметри:

$$Q_0 = 0 \text{ кН}, M_0 = 0 \text{ кНм}, EIw = ? \text{ кНм}^3, EI\varphi_0 = ? \text{ кНм}^2 \text{ рад}$$

$$EIw(2) = EIw_0 + EI\varphi_0 2 + \frac{6}{24} 2^4 = 0,$$

$$EIw(9) = EIw_0 + EI\varphi_0 9 + \frac{15}{6} (9-6)^3 - \frac{33,71}{6} (9-2)^3 + \frac{6}{24} [9^4 - (9-6)^4] = 0$$

$$\begin{cases} EIw_0 + EI\varphi_0 2 = -4 \\ EIw_0 + EI\varphi_0 9 = 239,588 \end{cases}, \quad EI\varphi_0 = 34,798, \quad EIw_0 = -73,597.$$

Складаємо загальне рівняння прогину та кута повороту:

$$EIw(x) = -73,597 + 34,798x + \frac{15}{6} (x-6)^3 - \frac{33,71}{6} (x-2)^3 + \frac{6}{24} [x^4 - (x-6)^4]$$

;

$$EI\varphi(x) = 34,798 + \frac{15}{2} (x-6)^2 - \frac{33,71}{2} (x-2)^2 + \frac{6}{6} [x^3 - (x-6)^3].$$

Будуємо епюри прогину та кута повороту, підставляючи різні значення координати x . Перевіряємо диференціальну залежність між побудованими епюрами, визначаємо екстремуми, точки перегину.

Перевірка умови жорсткості в прольоті: $w_{\max} \leq \frac{l}{200}$. Жорсткість балки $EI_y = 2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{(-8)} = 3680 \text{ кНм}^2$, близький до максимального прогин виникає в перерізі $x = 6 \text{ м}$: $EI_y w(6) = 99,6 \text{ кНм}^3$,
 $w(6) = \frac{99,6 \text{ кНм}^3}{3680 \text{ кНм}^2} = 0,027 \text{ м}$, $0,027 \text{ м} \leq \frac{7}{200} = 0,035 \text{ м}$ - умова жорсткості виконується. Перевіряємо жорсткість консольної ділянки балки:
 $w_{\max} \leq \frac{2l}{200}$. $EI_y w(0) = 73,6 \text{ кНм}^3$, $w(0) = \frac{73,6 \text{ кНм}^3}{3680 \text{ кНм}^2} = 0,02 \text{ м}$,
 $0,02 \text{ м} \leq \frac{2 \cdot 2}{200} = 0,02 \text{ м}$ - умова жорсткості для консольного кінця виконується.

Задача 3. Пряма задача плоского напряженного стану

Відомі напруження на гранях елементарного елемента $\sigma_x = 70 \text{ МПа}$, $\sigma_y = -38 \text{ МПа}$ та кут $\alpha = -35^\circ$ між віссю x та нормаллю до майданчика, на якому треба знайти напруження. Зобразити знайдений напружений стан на рисунку та перевірити міцність в точці за четвертою теорією міцності при $\sigma_{adm} = 100 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Оскільки на майданчиках з нормаллями x , y відсутні дотичні напруження, то $\sigma_1 = \sigma_x = 70 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = \sigma_z = 0$, $\sigma_3 = \sigma_y = -38 \text{ МПа}$. Маємо пряму задачу плоского напруженого стану. Визначаємо напруження на майданчику з нормаллю n_α :

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha = 70 \cdot \cos^2(-35^\circ) - 38 \cdot \sin^2(-35^\circ) = 34,5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha = 70 \cdot \sin^2(-35^\circ) - 38 \cdot \cos^2(-35^\circ) = -2,5 \text{ МПа},$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = \frac{70 - (-38)}{2} \cdot \sin(-70^\circ) = 15 \text{ МПа}.$$

Зображуємо отриманий напружений стан на рисунку. Кут α відкладаємо проти годинникової стрілки. Зображуємо майданчики з нормаллями n_α та n_β та напруження, що на них діють. Зображуємо нормальні та дотичні напруження на всіх гранях елементарного елемента. Дотичне напруження майданчику з нормаллю n_α спрямовуємо до σ_1 , на інших гранях зображуємо відповідно до закону парності дотичних напружень.

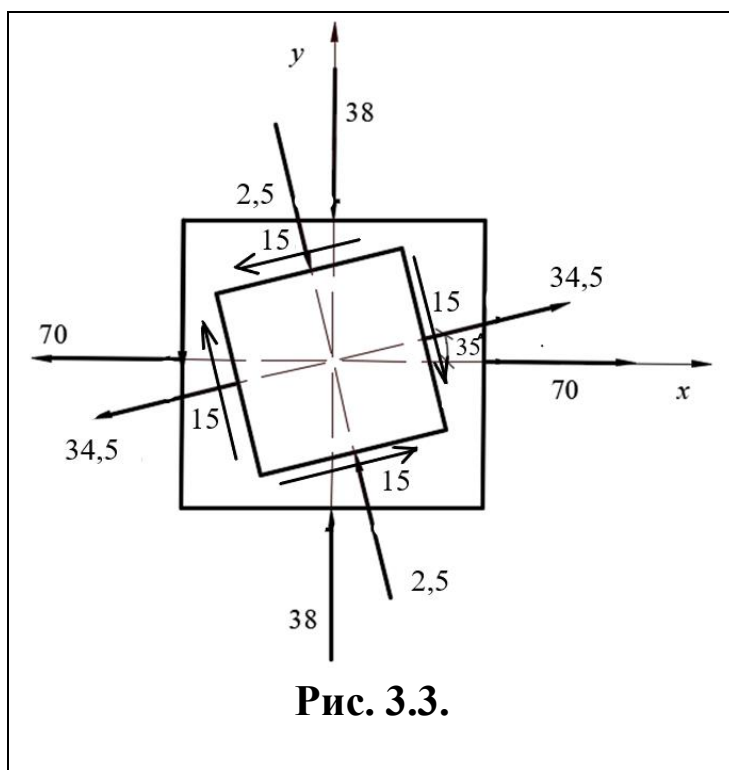


Рис. 3.3.

Перевіряємо міцність за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}((70)^2 + (38)^2 + (-38 - 70)^2)} = 94,9 \leq \sigma_{adm} = 100 \text{ МПа}$$

Міцність забезпечена.

Задача 4. Обернена задача плоского напруженого стану

Відомі напруження на гранях елементарного елемента $\sigma_x = 70 \text{ МПа}$, $\sigma_y = -38 \text{ МПа}$, $\tau_{xy} = 28 \text{ МПа}$. Знайти головні напруження $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ та кут α_0 головних майданчиків. Зобразити знайдений напружений стан на рисунку та перевірити міцність в точці за четвертою теорією міцності при $\sigma_{adm} = 100 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Маємо обернену задачу плоского напруженого стану

$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (5)$$

Кут α_0 відкладається проти годинникової стрілки від осі x .

Перевіряємо міцність за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \leq \sigma_{adm} \quad (6)$$

З (4) маємо

$$\sigma_{max/min} = \frac{70 - 38}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{70 + 38}{2}\right)^2 + 28^2} = 16 \pm 60,8;$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 76,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_{min} = \sigma_3 = -44,8 \text{ МПа}.$$

Нумеруємо головні напруження в порядку спадання з врахуванням нульового кореня.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 28}{70 + 38} = -0,5185; \quad \alpha_0 = \arctg(0,5185)/2 = 13,7^\circ.$$

Зображуємо отриманий напружений стан на рис. 3.4. Кут α_0 відкладаємо проти годинникової стрілки. Перевіряємо, чи співпадає даний напрямок з дією дотичних напружень на майданчику.

Пам'ятаємо, що більші напруження при повороті збільшуються, менші зменшуються.

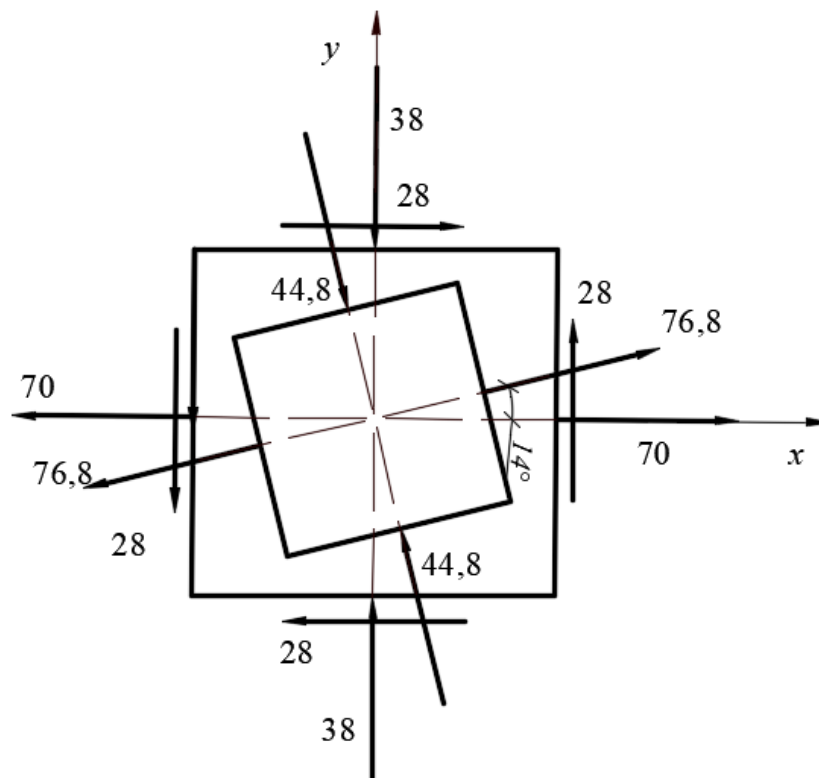


Рис. 3.4.

Перевіряємо міцність за формулою (8):

$$\sigma_{\epsilon\kappa\delta}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}((76,8+44,8)^2 + 76,8^2 + 44,8^2)} = 106,5 \text{ MPa} > \sigma_{adm} = 100 \text{ MPa}.$$

Оцінюємо перенапруження:

$$\frac{\sigma_{ek8} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% = \frac{106,5 - 100}{100} \cdot 100\% = 6,5\% > 5\%.$$

Міцність не забезпечена.

3. Завдання до самостійної роботи

Розрахунково-графічна робота №3

Повний розрахунок прокатної балки.

Плоский напряжений стан

Задача 1.

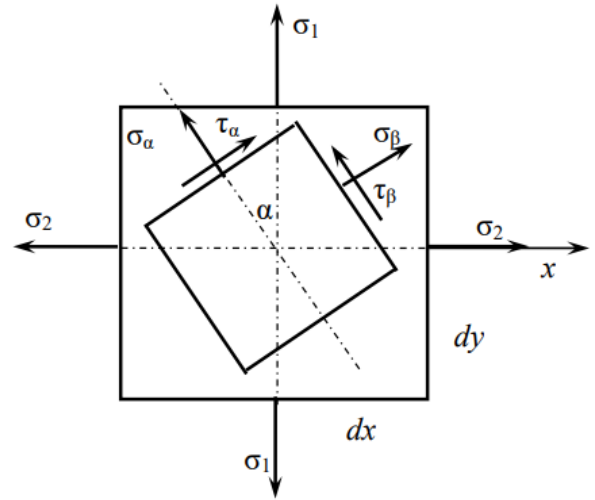
Для заданої в дод.1 розрахункової схеми балки підібрати поперечний переріз двотавра, виконати повну перевірку міцності балки, визначити переміщення осі балки та побудувати епюри переміщень, перевірити жорсткість балки. Розрахункова схема балки, лінійні розміри та величини навантажень вибираються за особистим шифром із таблиці вхідних даних. Загальні дані: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$, $\tau_{adm} = 90 \text{ МПа}$, $w_{adm}^n = l^n / 200$, $w_{adm}^k = 2l^k / 200$.

Таблиця вхідних даних до задачі 1

Цифра шифру	Перша цифра			Друга цифра		Третя цифра	
	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$P, \text{ кН}$	$M, \text{ кНм}$	$q, \text{ кН/м}$	Схема
1	3	3,2	2	12	8	10	1
2	3,6	2	3	16	7	3	2
3	2,4	3	2	15	6	4	3
4	2	3,2	3	18	5	5	4
5	3,2	2	4	14	9	6	5
6	2,4	2	3	25	10	7	6
7	1,6	3	2	8	11	8	7
8	3,6	2	2	13	8	9	8
9	2,4	1,6	4	11	7	10	9
0	3	3,2	3	10	6	8	0

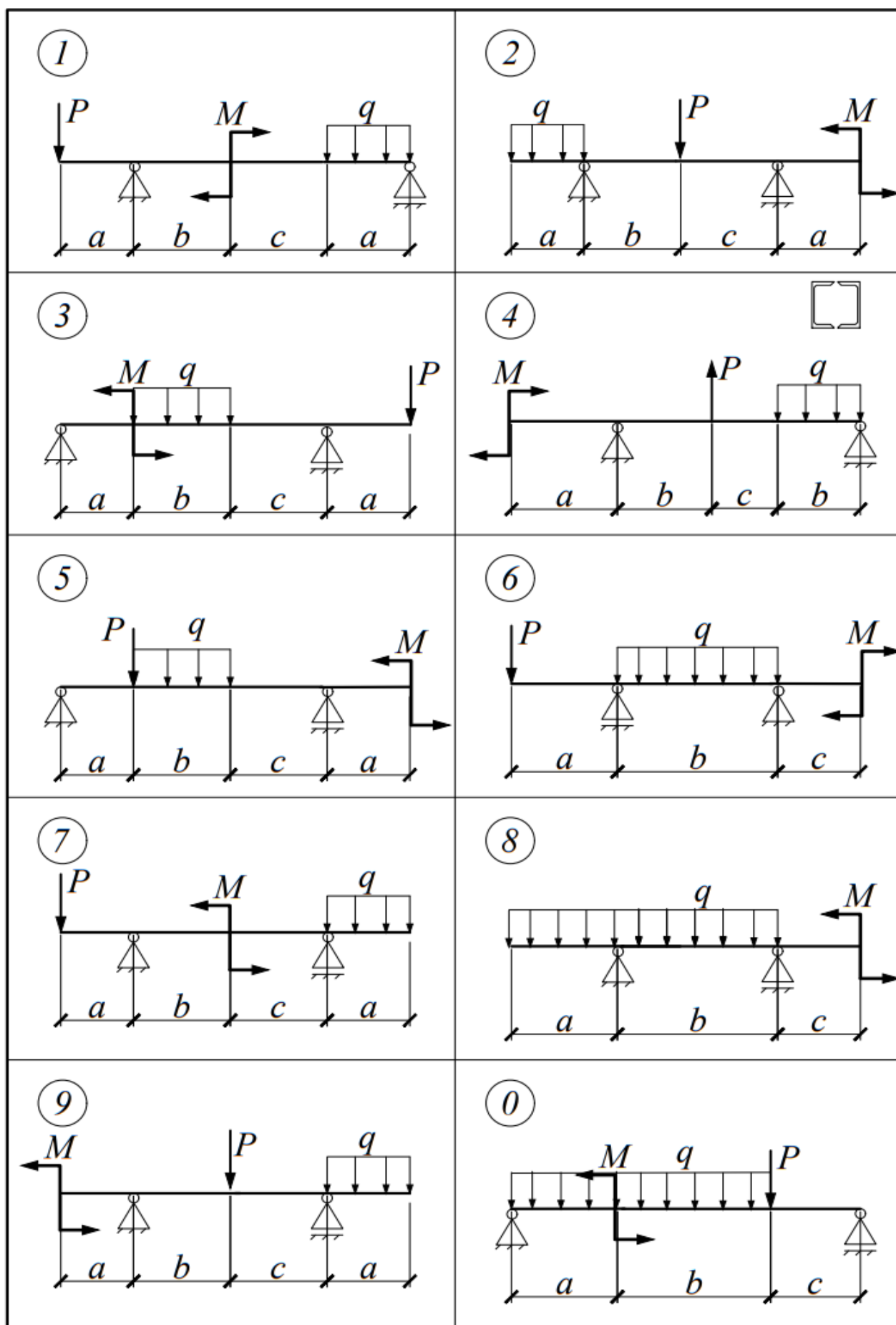
Задача 2. Плоский напружений стан в точці

В прямій задачі плоского напруженого стану відомі головні напруження σ_1, σ_2 (або $\sigma_{max}, \sigma_{min}$), потрібно знайти напруження, що діють на майданчику під кутом α до головних. В оберненій задачі по відомих напруженнях $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha$ шукаються головні напруження $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ та кут α положення головних майданчиків. Зобразити знайдений напружений стан на рисунку та перевірити міцність в точці за четвертою теорією міцності.



Таблиця вхідних даних до задачі №2

№	Перша цифра шифру		Друга цифра		Третя цифра
	σ_x , МПа	σ_y , МПа	Тип задачі	α або τ_{xy}	σ_{adm} , МПа
0	75	32	пряма	27°	100
1	56	-20	пряма	13°	80
2	88	-34	пряма	10°	90
3	-12	-95	пряма	-34°	120
4	-35	-64	пряма	-15°	70
5	81	34	обернена	18 МПа	160
6	105	56	обернена	45 МПа	140
7	90	-10	обернена	-34 МПа	130
8	45	-45	обернена	-46 МПа	95
9	17	-59	обернена	28 МПа	85



Рекомендована література

Підручники:

1. *Писаренко, Г. С.* та ін. Опір матеріалів: Підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. Г.С. Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ: Вища шк., 2004. – 655с.
2. *Шкельов Л.Т.* Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
3. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн.* / За ред. В.Г. Піскунова. – Київ : Вища школа, 1995.

Навчальні посібники:

4. *О.П. Кошевий, Григор'єва Л.О., Д.В. Левківський.* Опір матеріалів в Темах і задачах: навчальний посібник. Київ: КНУБА; – Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута», 2019. – 340с. ISBN 978-617-7626-86-1
5. *Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, О.П. Кошевий.* Опір матеріалів з основами теорії пружності: Курс лекцій. Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 270 с. ISBN 978-617-520-044-5
6. *Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб.* / П.О. Іваненко, Л.О. Григор'єва, О.П. Кошевий та ін. За ред. П.О. Іваненка – Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 400 с. ISBN 978-617-520-163-3

Додаткові джерела:

7. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. / М. І. Бобир, А. Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; за ред. М. І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. □399 с.
8. Hibbeler, R.C. Mechanics of materials / R.C. Hibbeler. Tenth edition. –NJ: Pearson, 2015. – 900 p.– ISBN 9780134319650
9. Серія відеоуроків та лабораторних робіт з опору матеріалів на Youtube
10. https://www.youtube.com/channel/UC4ptzya-AQGAFDj18iOB_rA ,
https://youtu.be/tibdfe_Q2s8
11. Освітній сайт КНУБА. Курс для дистанційного навчання «Опір матеріалів. ПЦБ» <https://org2.knuba.edu.ua/course/view.php?id=2036>