

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

**Калашніков Олександр Борисович**

УДК 539.3

**СТІЙКІСТЬ ТА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ  
ПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПРИ  
ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

05.23.17 – будівельна механіка

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Київ – 2024

Дисертацією є кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Робота виконана на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Лізунов Петро Петрович,**  
Київський національний університет будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України, завідувач кафедри будівельної механіки.

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Козуб Юрій Гордійович**  
Державний заклад «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка» (м. Полтава) Міністерства освіти і науки України, професор кафедри математики та інформатики

кандидат технічних наук, доцент  
**Шлюнь Наталія Володимирівна,**  
Національний транспортний університет Міністерства освіти і науки України, виконуюча обов'язки завідувача кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «18» жовтня 2024 р. о 13<sup>00</sup> годині в ауд. 204 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 у Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, або за посиланням <https://www.knuba.edu.ua/specjalizovana-vchena-rada-d-26-056-04/>

Автореферат розісланий «16» вересня 2024 р.

**Виконуючий обов'язки вченого секретаря спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04**  
доктор технічних наук, професор



**І. І. Солодей**

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Удосконалення існуючих та створення нових методів і засобів аналізу поведінки пружних оболонкових конструкцій має важливе значення для їх ефективного використання в різних галузях техніки та промисловості. Оболонки через своє функціональне призначення можуть мати різні конструктивні неоднорідності: ребра, канали, виїмки, отвори, місцеві потовщення та стоншення, лінійно- та ступінчасто-змінну товщину, злами серединної поверхні, багатошарову структуру матеріалу тощо. Оболонки такого виду будемо називати неоднорідними. При експлуатації оболонкові конструкції часто піддаються впливу не лише механічних навантажень, а і теплових. При цьому наявність температурного поля може викликати значні деформації та впливати на форму прогину і величину критичного навантаження оболонки. Дія на оболонкову систему термомеханічного навантаження, яке викликає зміну її напружено-деформованого стану (НДС), звичайно позначається і на динамічних характеристиках конструкції, таких як власні коливання. Визначення характеру нелінійного деформування та власних коливань оболонок при дії складного (комбінованого) термомеханічного навантаження є важливим елементом аналізу поведінки оболонкових систем складної форми. Знання цих характеристик є важливою інформацією при проектуванні конструкцій з урахуванням експлуатаційних термомеханічних впливів.

Розвиток сучасної техніки супроводжується стабільним зростанням використання у відповідальних елементах оболонкових конструкцій композитних матеріалів (КМ). За своїми властивостями КМ значно відрізняються від традиційних матеріалів (ТМ). Однією з головних переваг композитів є можливість виготовлення матеріалу з наперед заданим комплексом властивостей заради підвищення надійності і економічності конструкції, що проектується. Поряд з високими механічними характеристиками, КМ мають і унікальні теплофізичні властивості, через що вони знаходять широке застосування в перспективних технологіях створення нових оболонкових конструкцій. Варіюючи структуру КМ, можна отримати низькі (навіть нульові і, більш того, від'ємні) значення компонентів тензора теплового розширення всього композиту, що важливо для збереження сталості розмірів і форми оболонки за високої температури. В першу чергу це стосується односпрямованих волокнистих багатошарових КМ. Таке спрямування роботи на розгляд КМ є актуальним, оскільки більшість конструкцій сучасної техніки (наприклад, літаючі апарати) виготовлені з композитів і знаходяться в складних умовах термомеханічного навантаження.

Ускладнення геометричних форм оболонкових конструкцій, їх структури, умов експлуатації, широке впровадження КМ та наявність термомеханічного навантаження визначають актуальність побудови нового скінченноелементного методу комплексного дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження. При цьому, важливим елементом методу є розробка нової розширеної версії універсального тривимірного скінченного елемента (СЕ), який призначений для опису багатошарового КМ (односпрямованого

волокнистого, як найпоширенішого композиту) в рамках скінченноелементної моделі оболонки, яка застосовується.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) та Науково-дослідного інституту будівельної механіки (НДІБМ) КНУБА. Дослідження проведені в межах науково-дослідних робіт, що виконувались за напрямком 05 – «Нові комп'ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України: «Теоретичні основи аналізу нелінійного деформування та стійкості пружних неоднорідних оболонок складної структури при дії навантажень різної природи» (№ ДР 0111U002219), «Нелінійне деформування, стійкість, закритична поведінка та коливання оболонкових конструкцій спеціальної техніки в екстремальних термосилових умовах експлуатації» (№ ДР 0121U001004). Автор брав участь у виконанні цих науково-дослідних робіт як співвиконавець.

**Мета і завдання дослідження.** Мета роботи полягає в розробці скінченноелементного методу комплексного аналізу геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань складних оболонкових конструкцій неоднорідної структури при дії статичних термомеханічних навантажень, а також у розробці методології моделювання термопружних характеристик композитного односпрямованого волокнистого матеріалу та побудові на цій основі нової модифікації універсального тривимірного багатощарового скінченного елемента.

**Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:**

- вивчення проблеми використання розрахункових моделей оболонок неоднорідної жорсткості, що побудовані на основі теорії термопружності, для аналізу проблем стійкості та власних коливань конструкцій, які при експлуатації знаходяться в полі дії термомеханічних навантажень;
- розробка методу комплексного розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонких пружних неоднорідних оболонок при дії термомеханічних навантажень;
- побудова двохетапного алгоритму розв'язування, на кроці навантаження, задач нелінійного деформування та власних коливань оболонок з урахуванням переднапруженого стану;
- розробка нової модифікації універсального тривимірного багатощарового скінченного елемента, матеріалами шарів якого є односпрямовані волокнисті композити;
- отримання на основі рівнянь тривимірної теорії термопружності співвідношень методу скінчених елементів (МСЕ) для проведення модального аналізу неоднорідних оболонок з урахуванням переднапруженого стану;
- розробка програмного забезпечення і вдосконалення алгоритму автоматизованого розв'язування задач втрати стійкості та власних коливань оболонок при дії термомеханічних навантажень;
- адаптація програмних комплексів (ПК) ЛІРА-САПР і SCAD до розв'язування задач стійкості та власних коливань пружних оболонок ступінчасто-змінної

товщини з метою використання, коли це можливо, цих комплексів як засобу проведення порівняльного аналізу;

- розв'язання низки тестових задач для доведення достовірності результатів, що отримуються, та підтвердження ефективності методу;
- дослідження впливу різних геометричних параметрів конструктивних елементів оболонок і параметрів термомеханічного навантаження на геометрично нелінійне деформування, втрату стійкості та власні коливання пружних оболонок.

**Об'єктом дослідження** є процеси геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонких пружних оболонок ускладненої форми і багатошарової структури, в тому числі композитної, що знаходяться під дією статичного термомеханічного навантаження.

**Предметом дослідження** є чисельні методи та алгоритми розв'язування задач геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та власних коливань оболонок з геометричними і фізико-механічними неоднорідностями при дії термомеханічних навантажень.

**Методи дослідження.** Дослідження нелінійного деформування неоднорідних оболонок виконуються методом скінченних елементів у формі моментної схеми. Ефективні характеристики односпрямованого волокнистого композитного матеріалу визначаються за структурними параметрами його компонентів на основі відомих мікромеханічних моделей прогнозування фізико-механічних сталих. Розв'язування задач нелінійного термопружного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань оболонок виконується за комбінованим алгоритмом, який спирається на кроковий метод продовження розв'язку за параметром, уточнюючу ітераційну процедуру Ньютона-Канторовича та самокорегування параметрів алгоритму на кроці навантаження. Для визначення власних частот і форм коливань застосовано метод ітерацій у підпросторі.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у наступному:

- розроблено новий метод комплексного дослідження стійкості та власних коливань пружних оболонок неоднорідної за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження;
- побудовано новий двохетапний алгоритм розв'язування на кроці навантаження задач геометрично нелінійного деформування та власних коливань оболонок з урахуванням попередньо напруженого та деформованого станів;
- розроблено нову модифікацію універсального тривимірного багатошарового СЕ, матеріалами шарів якого є односпрямовані волокнисті композити;
- набув подальшого розвитку алгоритм автоматизованого розв'язування задач нелінійного деформування та стійкості пружних оболонок при дії термомеханічних навантажень, який розвинений на виконання модального аналізу конструкції на кроці навантаження з урахуванням переднапруженого та деформованого станів;
- розв'язані нові задачі дослідження особливостей впливу на деформування, втрату стійкості та власні коливання оболонок різних геометричних параметрів оболонкових конструкцій та параметрів складного термомеханічного навантаження.

**Достовірність результатів** забезпечується строгістю постановки задач; використанням обґрунтованих і раніше апробованих методів, що побудовані на основі положень моментної схеми скінченних елементів (МССЕ); збіжністю

розв'язків у кожній задачі; хорошим узгодженням результатів для широкого класу неоднорідних оболонок з результатами інших авторів, а також з даними, одержаними за допомогою програмних комплексів LIRA-SAPR, SCAD, NASTRAN.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у створенні методу розв'язання актуальної науково-технічної задачі будівельної механіки з комплексного дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань оболонок, які знаходяться в умовах статичної дії експлуатаційних термомеханічних навантажень. Метод дає можливість прогнозувати безпечну поведінку пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою. Метод і програмне забезпечення впроваджені у НДІБМ КНУБА при виконанні робіт за держбюджетною тематикою та застосовані на кафедрі будівельної механіки КНУБА в учбовому процесі при виконанні дипломних проектів і магістерських робіт. Отримані результати можуть бути використані в науково-дослідних і проектних закладах, які займаються проектуванням оболонкових конструкцій, а розроблені метод та універсальний багатопаровий тривимірний SE можуть бути включені до існуючих програмних комплексів.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати та положення, які становлять сутність і зміст дисертації, отримані автором самостійно. Науковим керівником Солов'ю М.О. та Лізунову П.П. належать загальна постановка задач, загальний задум і вибір методів проведення досліджень, інші співавтори статей брали участь в обговоренні та аналізі отриманих результатів. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором особисто. Методичні положення, практична реалізація, розрахунки та огляд літератури містяться в роботах [1-11], в тому числі побудова алгоритму комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок при термомеханічних навантаженнях [4, 7], розробка методики моделювання властивостей односпрямованого волокнистого композитного матеріалу та розробка на цій основі нової модифікації універсального тривимірного багатопарового SE [6, 9]. У публікаціях [1-11] здобувачу належить: розв'язання низки лінійних і нелінійних задач, проведення досліджень збіжності та достовірності одержаних результатів шляхом виконання порівняльного аналізу з розв'язками інших авторів і з результатами розрахунків, які отримані здобувачем з використанням сучасних програмних комплексів. В цих публікаціях надані результати розв'язання нових задач і відображені дослідження впливу на НДС, втрату стійкості та власні коливання різноманітних структурних параметрів гнучких оболонок при складних режимах термомеханічного навантаження.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертаційної роботи та отримані результати доповідались та обговорювались на вітчизняних і міжнародних наукових конференціях: X Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2024); IV Міжнародна науково-практична конференція «Science in the environment of rapid changes» (Бельгія, Брюсель, 2024); IV Міжнародна науково-практична конференція «Diversity and inclusion in scientific area» (Польща, Варшава, 2024); Міжнародна науково-технічна on-line конференція «Проблеми будівельного та транспортного комплексів» (Кропивницький, ЦНТУ, 2023); IV Міжнародна науково-практична конференція «Енергоощадні машини і технології» у складі Міжнародного науково-

технічного форуму «Енергоощадні машини і технології відновлення інфраструктури України» (Київ, КНУБА, 2023); «Наукові конференції молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА» (Київ, 2010-2013). У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась на міжкафедральному семінарі КНУБА (м. Київ, 2024).

**Публікації.** Результати дисертаційної роботи опубліковані в 20 наукових працях, серед яких: 4 статті у виданнях, що включені до міжнародних науково-метричних баз, 7 статей у наукових фахових виданнях України категорії Б, 9 публікацій у збірниках матеріалів та доповідей українських та міжнародних наукових конференцій.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка. Повний обсяг дисертації становить 201 сторінка, з них: основний текст на 169 сторінках, 65 рисунків і 24 таблиці на 10 окремих сторінках і по тексту, список використаних джерел із 196 найменувань на 20 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми, сформульовані мета і завдання досліджень, наведена загальна характеристика роботи.

У першому розділі наданий короткий огляд сучасного стану проблем дослідження за темою дисертації. Основна увага приділена методам аналізу поведінки пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини при дії статичного термомеханічного навантаження, в першу чергу застосуванню МСЕ. Розглянуто підходи до розрахунку волокнистих багатошарових пружних композитних оболонок. Сформульовано напрямки досліджень.

Значний внесок у розвиток теорій і методів розрахунку НДС, стійкості та власних коливань оболонок зробили вчені: М.О. Алумяє, М.О. Алфатов, С.О. Амбарцумян, І.Я. Аміро, В.А. Баженов, В.В. Болотін, Н.В. Валішвілі, А.С. Вольмір, І.І. Ворович, Г.Д. Гавриленко, В.В. Гайдайчук, К.З. Галімов, О.І. Голованов, Є.О. Гоцуляк, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.Я. Григоренко, О.М. Гузь, В.І. Гуляєв, В.О. Заруцький, О.С. Зенкевич, Б.Я. Кантор, Ю.Г. Козуб, В.Т. Койтер, П.П. Лізунов, П.З. Луговий, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилов, П.М. Огібалов, Дж. Оден, В.Г. Піскунов, О.В. Погорелов, Я.С. Подстригач, О.С. Сахаров, М.О. Соловей, С.П. Тимошенко, В.М. Трач, В.І. Феодосьєв, Л.П. Хорошун та багато інших вітчизняних і закордонних вчених. При цьому недостатньо дослідженими залишаються задачі геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань оболонок неоднорідної структури при дії комбінованого термомеханічного навантаження.

Чимала доля досліджень стійкості оболонок змінної товщини виконана в лінійній постановці, що в значній мірі пояснюється складністю даної проблеми. Відмічено, що більш точне розв'язання задач стійкості та закритичної поведінки гнучких оболонок при дії термомеханічних навантажень можливе лише з позицій геометрично нелінійної теорії. Основні результати з розрахунку гнучких оболонок отримані чисельними методами, найбільш широкого використання серед яких отримав МСЕ. Значна частка досліджень стійкості та власних коливань оболонок виконана для простих канонічних форм. Вплив на поведінку оболонок спільної дії

температурних і механічних навантажень розглянуто в невеликій кількості робіт. Обґрунтовано переваги використання тривимірного підходу теорії термопружності із застосуванням співвідношень МССЕ до аналізу НДС, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань гнучких оболонок при дії термомеханічних навантажень. Відзначається важливість визначення динамічних характеристик оболонок, таких як власні частоти і форми коливань, з урахуванням переднапруженого стану, особливо для визначення точок біфуркації та моменту втрати стійкості конструкції за статичним і динамічним критеріями.

Виконана оцінка застосування композитів, як широко вживаних матеріалів в оболонкових конструкціях. Проаналізовано стан досліджень НДС, стійкості та власних коливань оболонок, матеріали шарів яких є волокнистими композитами.

Дисертація є природним розвиненням робіт, що виконуються в КНУБА, на новий клас задач. Для вирішення поставлених проблем були розроблені: новий метод комплексного аналізу поведінки оболонок, нова методологія моделювання термопружних характеристик односпрямованого композитного волокнистого матеріалу та нова модифікація багат шарового СЕ, матеріалами шарів якого є КМ.

У другому розділі приведено постановку задачі та вихідні теоретичні положення, на яких побудовано метод комплексного розв'язування задач нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонких пружних багат шарових оболонок лінійно- та ступінчасто-змінної товщини, з отворами, зламами серединної поверхні тощо при дії статичного термомеханічного навантаження. Наведено співвідношення для універсального тривимірного багат шарового СЕ, описана методика формування систем розв'язувальних рівнянь. Викладено розроблені метод і алгоритм комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок при дії складного термомеханічного навантаження.

Тонкі пружні багат шарові оболонки з геометричними особливостями за товщиною (рис. 1) розглядаються як тривимірні тіла з позицій тривимірної теорії термопружності з використанням апарату тензорного числення. Обшивка оболонки (тіло оболонки без геометричних особливостей за товщиною) і ребра, що її підкріплюють, можуть складатися з довільної заданої кількості шарів  $m$ , що поєднані між собою в єдиний пакет і деформуються спільно, без проковзування та відриву по поверхнях контактів, де виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Кожен шар матеріалу може мати різні властивості.



Рис. 1. Моделювання оболонки

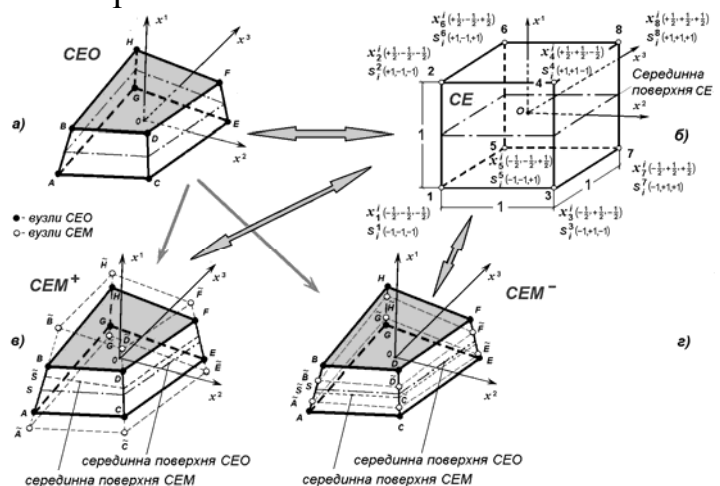


Рис. 2. Перетворення універсального СЕ



Нагрів оболонки розглядається як усталений процес, для якого температурне поле вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат. Через тонкість оболонки розподіл температури за товщиною шару прийнято лінійним. Термопружні властивості матеріалів оболонки є сталими та незалежними від температури.

Для опису НДС оболонки використовується дві системи координат: місцева криволінійна  $x^i$  та фіксована глобальна декартова  $x^{k'}$ . Розглядаються великі переміщення  $u^{k'}$  при малих деформаціях  $\varepsilon_{kl}$ , які визначаються тензором скінченних деформацій Коші-Гріна:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} \left( C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} + C_i^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j}. \quad (1)$$

Компоненти тензора повних деформацій  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^T$ , де  $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} T$ , є лінійними функціями напружень  $\sigma^{ij}$ . Матеріали шарів оболонки визначаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T) = \bar{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij}. \quad (2)$$

Дискретизація конструкції виконується на основі МСЕ. За товщиною тонка оболонка апроксимується одним СЕ (рис. 1, рис. 2,б). Використовується «стандартний» тривимірний 8-ми вузловий СЕ з полілінійними функціями форми, який є класичним просторовим елементом обшивки (СЕО). СЕ, що застосовується, є універсальним, оскільки призначений для моделювання різних ділянок оболонки: обшивки та ділянок з конструктивними особливостями за товщиною. Елемент СЕО (рис. 2,а) може трансформуватися у скінченний елемент модифікований (СЕМ) для моделювання ділянок оболонки з ребрами СЕМ<sup>+</sup> (рис. 2,в) та каналами СЕМ<sup>-</sup> (рис. 2,г). Це досягається за рахунок додаткових змінних геометричних параметрів СЕ, за якими реалізуються необхідні зміни його розмірів і зсув у напрямку товщини. Для цього використовується спосіб лінійного перетворення координат вузлів тривимірного СЕО у відповідні вузлові координати СЕМ в напрямку товщини.

Використовується некласична кінематична гіпотеза деформівної прямої (не обов'язково нормалі до серединної поверхні) – пряма до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Це дає змогу природним шляхом моделювати злами серединної поверхні оболонки, які притаманні, наприклад, складчастим та зчленованим оболонкам. Застосування статичної гіпотези про сталість напружень обтиснення за товщиною шару оболонки

$$\frac{\partial \sigma_n^{11}}{\partial x^1} = 0. \quad (3)$$

вимагає корегування закону Дюамеля-Неймана (2).

Побудова розв'язувальних співвідношень виконується з використанням МССЕ, у відповідності до якої, функції повних деформацій подаються в місцевій системі координат  $x^i$  як лінійні відрізки ряду Маклорена в центрі СЕ:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0f} \omega_{(ij)}^{(ff)} x^f + \varepsilon_{ij}^{0fh} \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(ffh)}^{(hii)} x^f x^h, \quad (4)$$

$$\text{де } \varepsilon_{ij}^0 = (\varepsilon_{ij})|_{(0)}, \varepsilon_{ij}^{0f} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^f} \right) \Big|_{(0)}, \varepsilon_{ij}^{0fh} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^f \partial x^h} \right) \Big|_{(0)}, \omega_{ff\dots}^{hi\dots} = \omega_f^h \omega_f^i \dots, \omega_f^h = \begin{cases} 0, & \text{при } f = h \\ 1, & \text{при } f \neq h \end{cases}.$$

Функції температурних деформацій подаються в межах шару як відрізки ряду Тейлора в околі центра  $n$ -го шару  $O_n$  ( $n = \overline{1, m}$ ):

$$\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0p}(x^p - x_{O_n}^p) \omega_{(ij)}^{(pp)} + \varepsilon_{ij}^{0ph}(x^p - x_{O_n}^p)(x^h - x_{O_n}^h) \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(pph)}^{(hii)}, \quad (5)$$

$$\text{де } \varepsilon_{ij}^0 = (\varepsilon_{ij}^T)|_{(O_n)}, \varepsilon_{ij}^{0p} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^p} \right) \Big|_{(O_n)}, \varepsilon_{ij}^{0ph} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^p \partial x^h} \right) \Big|_{(O_n)}.$$

Напруження (2) подаються у вигляді лінійних відрізків рядів Тейлора в околі центра  $n$ -го шару СЕ з урахуванням гіпотези (3):

$$\bar{\sigma}_n^{ij} = N_n^{ij} + M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + M_n^{ij} x^\alpha + 2 M_n^{ij}{}_{1\alpha} (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^{ij}{}_{\alpha\beta} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta, \quad (6)$$

$$\sigma_n^T{}^{ij} = N_n^T{}^{ij} + M_n^T{}^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + M_n^T{}^{ij} x^\alpha + 2 M_n^T{}^{ij}{}_{1\alpha} (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^T{}^{ij}{}_{\alpha\beta} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta. \quad (7)$$

Дослідження процесів геометрично нелінійного деформування оболонки базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах, коли процес деформування подається як послідовність рівноважних станів при достатньо малих кроках термомеханічного навантаження. На поточному кроці нова геометрія та передісторія НДС оболонки є відомими. Варіаційне рівняння Лагранжа при скінченноелементній апроксимації має вигляд:

$$\delta \Pi = \sum_{FE} (\delta W_{FE} - \delta A_{FE}) = 0, \quad (8)$$

де  $\Pi$  – потенціальна енергія деформування скінченноелементної моделі оболонки (СЕМО);  $\delta W_{FE}$  та  $\delta A_{FE}$  – віртуальні роботи внутрішніх і зовнішніх сил СЕ, відповідно;  $\sum_{FE}$  – сума за скінченними елементами.

Віртуальна робота внутрішніх сил СЕ на підставі закону Дюамеля–Неймана (2) подається так:

$$\delta W_{FE} = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV = \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \bar{W}_{FE} - \delta W_{FE}^T. \quad (9)$$

Інтегрування (9) виконується звичним для МСЕ чином. З першого інтегралу, що є віртуальною роботою внутрішніх сил СЕ від повних деформацій (1), які залежать від шуканих функцій переміщень, знаходиться матриця реакцій СЕ. З другого інтегралу, який залежить від температурних деформацій і визначається заданим полем температур, отримується матриця еквівалентних температурних навантажень, яка підсумовується до матриці механічних навантажень. Подаючи в (9) функції напружень у вигляді відповідних до (3) і (4) рядів, отримуються всі визначальні співвідношення для СЕ, причому у явному вигляді. За невідомі функції приймаються узагальнені переміщення, які є сукупністю переміщень на серединній поверхні СЕ та різниці переміщень на його обмежуючих поверхнях. Отримані для

тривимірному СЕ співвідношення є універсальними, оскільки вони одержані в місцевій системі координат для загального СЕ. При формуванні системи розв'язувальних рівнянь СЕМО застосовується методика, яка враховує ексцентричне розміщення СЕ на ділянках ступінчасто-змінної товщини оболонки.

Рівняння, що описує власні коливання конструкції за відсутності роботи зовнішніх і внутрішніх навантажень має вигляд:

$$[K]\{u\} - \omega^2 [M]\{u\} = 0, \quad (10)$$

де  $[M]$  – узгоджена матриця мас, яка одержується з урахуванням багаточарової структури СЕ;  $[K]$  – матриця жорсткості СЕМО для універсального СЕ, яка отримується з лінеаризованих співвідношень віртуальної роботи  $\delta \bar{W}_{FE}$ .

Методика модального аналізу оболонки з урахуванням переднапруженого стану базується на скінченноелементних співвідношеннях, в яких на кожному кроці навантаження  $s$  враховуються накопичені на попередніх  $(s-1)$  кроках напруження

$\sigma_{s-1}^{ij} = \sum_{l=1}^{s-1} \Delta_l \sigma^{ij}$ . Тому в алгоритмі, що реалізує модальний аналіз оболонки,

застосовується форма подання лінеаризації  $\delta \bar{W}_{FE}$  з відкорегованим тензором

пружних сталих  $\tilde{C}^{ijkp} = C^{ijkp} + \sigma_{s-1}^{ik} g^{pj}$ . Для аналізу стійкості та власних коливань оболонок при дії статичних термомеханічних навантажень використовується комплексний підхід. Він побудований як двохетапний алгоритм, що реалізується на кожному кроці  $s$  приросту навантаження (рис. 3). На першому етапі розв'язується

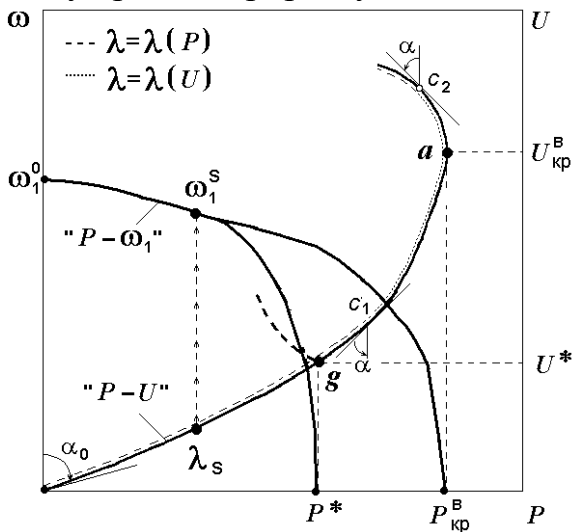


Рис. 3. Алгоритм аналізу стійкості і власних коливань оболонки

статична задача геометрично нелінійного деформування оболонки. Ця задача розв'язується інкрементальним методом і зазвичай, характеризується діаграмою «навантаження–прогин» характерної точки оболонки. Алгоритм розв'язування цієї задачі поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром, ітераційну процедуру Ньютона-Канторовича та методику корегування параметрів алгоритму. На цьому етапі при відповідному прирості навантаження, якому відповідає параметр  $\lambda_s = \lambda_s(P, U)$ , визначається НДС оболонки: її деформована форма (нові координати) та прирости полів переміщень і напружень. На другому етапі проводяться розрахунки на власні коливання. Модальний аналіз реалізується у кожний момент приросту навантаження. Результатом розрахунку є діаграма «навантаження–частота  $\omega_1$ », заданий спектр частот і відповідні форми коливань. Якщо на кривій « $P-U$ » є точка розгалуження розв'язку ( $g$ ), тоді це навантаження, при якому  $\omega_1 = 0$ , згідно з динамічним критерієм стійкості можна прийняти за верхнє критичне. При відсутності точки розгалуження, точка максимуму ( $a$ ) відповідає верхньому

критичному навантаженню  $P_{кр}^6$  за статичним і за динамічним критеріями. Для більш точного виявлення точки розгалуження застосовується методика, за якою у вихідний стан оболонки вноситься мале збурення форми, що може перетворити точку розгалуження на критичну. Для тестової задачі щодо власних коливань консольної циліндричної панелі отримано гарний збіг з наявними з літератури розв'язками та отриманими автором із залучанням ПК ЛІРА-САПР і NASTRAN.

У третьому розділі наводяться розроблена в рамках скінченноелементної моделі багатошарової оболонки методика моделювання властивостей односпрямованого волокнистого КМ та розроблена нова модифікація універсального тривимірного багатошарового СЕ, матеріалом шарів якого є КМ, армовані паралельними безперервними волокнами. На цій основі скінченноелементний метод аналізу поведінки пружних оболонок, виготовлених з традиційних матеріалів, поширений на задачі дослідження стійкості та власних коливань волокнистих багатошарових пружних композитних неоднорідних оболонок і пластин при дії термомеханічного навантаження. При моделюванні термопружних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки застосовується метод структурування неоднорідності матеріалу за товщиною і планом. Універсальний СЕ, який використовується для апроксимації різних ділянок неоднорідної оболонки ступінчасто-змінної товщини, у загальному випадку, складається з довільної кількості шарів з різними типами матеріалу. Шари СЕ між собою жорстко поєднані у монолітний пакет без проковзування та відриву. Кожен шар СЕ може мати різний тип матеріалу: традиційний або композитний та мати власний кут орієнтації базису ортотропії, що дає змогу моделювати термопружні характеристики криволінійно-ортотропних матеріалів. В кожному шарі СЕ може бути свій тип волокнистого КМ, що відкриває можливість використовувати в пакеті матеріалу СЕ гібридні волокнисто-багатошарові КМ. Через регулярну структуру волокнистий КМ розглядається як середовище з однорідною односпрямованою структурою, макроскопічні термопружні параметри якого мають назву «ефективні фізико-механічні характеристики». Отриманий матеріал подається як однорідний трансверсально-ізотропний з площинами ізотропії, нормальними до напрямку армування. Термопружні характеристики КМ визначаються за розробленими в механіці композитів мікромеханічними моделями прогнозування ефективних фізико-механічних характеристик матеріалу, що враховують мікромеханічні параметри його компонентів: волокна та матриці.

Нова модифікація багатошарового тривимірного СЕ отримана на базі універсального тривимірного СЕ з додатковими змінними параметрами. «Базовий» СЕ удосконалено з урахуванням волокнисто-багатошарової та гібридної структури КМ за товщиною оболонки. Для нової модифікації універсального тривимірного СЕ додаткові змінні параметри «базового» СЕ доповнені новими атрибутами, які пов'язані з вибором в шарі СЕ типу матеріалу волокнистого КМ, із задаванням фізико-механічних властивостей його компонентів (матриці та волокна) і кута орієнтації армування. Додаткові змінні параметри СЕ призначені для перевизначення за необхідності його основних параметрів. Термопружні властивості шарів СЕ визначаються в обчислювальному комплексі, на основі застосування

відомих мікромеханічних методик, які враховують параметри компонентів композиту – матриці та волокна. Розширення властивостей «базового» універсального тривимірного СЕ дало змогу розвинути методику дослідження поведінки оболонок, матеріалами шарів яких є ТМ, на новий клас оболонок, матеріалами шарів яких є односпрямовані волокнисті КМ.

Виконана оцінка ефективності мікромеханічних методик прогнозування на прикладі фізико-механічних даних вуглепластика (ВП) AS4/3501-6 та склопластика (СП) E-glass 21xK43. Зіставлення експериментально визначених ефективних термопружних сталей КМ з результатами, що отримані на підставі мікромеханічних методик, показало добре узгодження між собою та з експериментом для характеристик у повздовжньому напрямку волокон і більші розбіжності результатів у поперечному. Наявні розбіжності результатів пов'язані з тим, що структура реального матеріалу, зазвичай, далека від прийнятої ідеалізованої, яка використовується у моделях. Дослідження виявило необхідність в оцінці впливу використання тої чи іншої моделі визначення ефективних термопружних сталей КМ на точність розрахунків, проведених на їхній основі. Нова модифікація СЕ та розроблений підхід дозволили розширити розрахункову СЕМО на широкий клас оболонкових конструкцій з традиційних, композитних і гібридних матеріалів. Для вивчення можливостей та ефективності нового СЕ, а також підтвердження точності розв'язків, що отримуються на його основі, була розв'язана низка тестових задач щодо лінійного деформування пластин і оболонок, матеріалом яких є композит.

Аналіз впливу на НДС конструкції використання різних мікромеханічних моделей прогнозування ефективних пружних характеристик розглядався на прикладі згину жорстко затиснутої на краю квадратної пластини зі стороною  $a = 100h$ , товщиною  $h = 1$  см. Пластина навантажена рівномірно розподіленим тиском  $q = 1$  кг/см<sup>2</sup>. Волокна КМ спрямовані вздовж осі  $x^{2'}$ . Розрахункова модель – чверть пластини з двома площинами симетрії. Для обох розглядуваних матеріалів, розв'язки за МССЕ швидко збігаються. Зафіксовано гарний збіг форм деформування пластини при використанні чотирьох відомих мікромеханічних методик прогнозування пружних сталей (рис. 4).

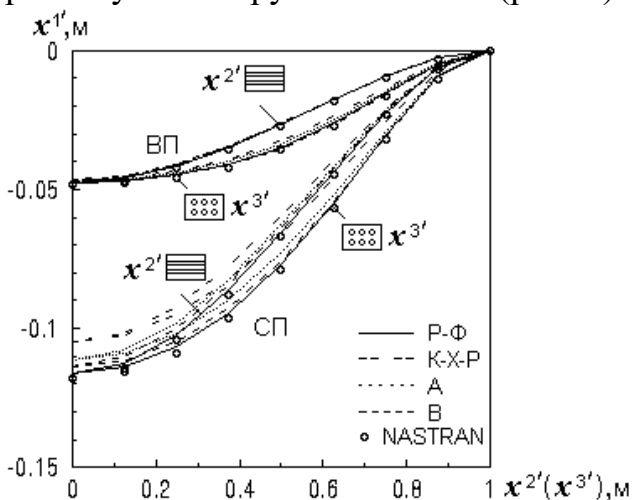


Рис. 4. Форми деформування згину пластини

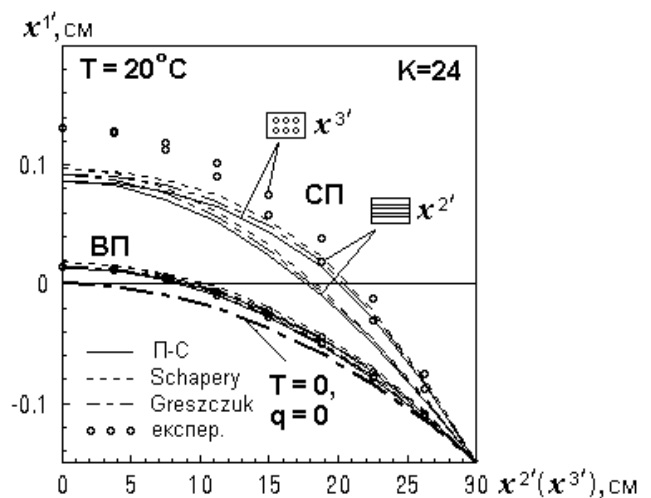


Рис. 5. Форми деформування оболонки при нагріві

Вплив використання мікрomeханічних методик визначення ефективних коефіцієнтів лінійного теплового розширення на збіжність і точність розв'язків досліджено на прикладі нагріву жорстко затиснутої на краю квадратної панелі з кривизною  $K = 2a^2/(Rh) = 24$ , де  $h = 1$  см – товщина оболонки,  $a = 60h$  – розмір у плані,  $R = 300h$  – радіус серединної поверхні. Волокна КМ спрямовані за віссю  $x^2$ . Розрахункова модель – чверть панелі з двома площинами симетрії. Для оболонки зі склопластику отримано значну розбіжність форм деформування, що одержані із залучанням різних мікрomeханічних моделей визначення ефективних теплових характеристик, з розв'язком, що здобутий при використанні ефективних характеристик визначених експериментально (рис. 5). При цьому для обох матеріалів маємо гарний збіг між собою форм деформування, що визначені за використання різних мікрomeханічних моделей.

Порівняльний аналіз розв'язків прогину квадратної шарнірно опертої тришарової пластини з товщинами  $h_1 = h_2 = h_3 = h/3$ ,  $h = 1$  см,  $a = 100h$  та перехресним укладання шарів  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ . Розглядається два типи навантаження: рівномірно розподілений тиск  $q_0 = 1$  кг/см<sup>2</sup> та тиск за синусоїдальним законом. Зіставлення безрозмірного прогину в центрі пластинки  $\bar{u}^1 = 100u^1 (Eh^3/qa^4)$ , що отриманий з використанням запропонованого нового СЕ (МССЕ), з опублікованими даними інших авторів показало гарний збіг результатів (табл.1, табл.2).

Таблиця 1

Прогин $\bar{u}^1$ центра тришарової пластини від дії рівномірного тиску								
Sheikh & Chakrabarti 1024 CE	Reddy	Ghosh and Dey	Ngo 64 CE	Ngo 512 CE	MCCE 4×4 CE	MCCE 8×8 CE	MCCE 12×12 CE	MCCE 16×16 CE
0,6708	0,6705 -0,04%	0,6823 +1,71%	0,6894 +2,77%	0,6751 +0,64%	0,6664 -0,65%	0,6691 -0,25%	0,6697 -0,16%	0,66997 -0,12%

Таблиця 2

Прогин $\bar{u}^1$ центра тришарової пластини від дії синусоїдального навантаження							
Pagano точний розв'язок	Reddy	Panda	Mawenya	Sheikha	Ngo 64 CE	NASTRAN 8×8 CE	MCCE 4×4 CE
0,4368	0,434 -0,64%	0,4346 -0,50%	0,4398 +0,68%	0,4350 -0,412%	0,4273 -2,17%	0,4237 -2,99%	0,4039 -7,53%

У четвертому розділі розглянуті мало досліджені і нові задачі стійкості та власних коливань оболонок при термомеханічних навантаженнях. На спеціально підібраних задачах обґрунтовано достовірність розв'язків і досліджено вплив параметрів термомеханічного навантаження та параметрів елементів оболонкових конструкцій на їх НДС, стійкість, закритичну поведінку та власні коливання. Для всіх задач була досліджена збіжність розв'язків шляхом згущення сітки.

Для підтвердження достовірності розв'язків, що отримуються, залучалися сертифіковані вітчизняні ПК ЛІРА-САІР та SCAD. Для їх використання до

розв'язання поставлених задач були вивчені можливості ПК та виконана адаптація способів моделювання неоднорідних оболонок та алгоритмів за цими ПК.

Вивчення достовірності розв'язків і впливу термомеханічного навантаження на стійкість і власні коливання оболонки розглядалося для квадратної в плані гладкої сферичної панелі з параметром кривизни  $K = 32$ . Панель шарнірно оперта за контуром. Спільне термомеханічне навантаження виконувалося за два етапи. Спочатку оболонка нагрівалася (охолоджувалася) на  $T = \pm 20^\circ\text{C}$ , а потім довантажувалася тиском (рис. 6). Тут і далі використовуються безрозмірні параметри  $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$ ,  $\bar{u}' = u' / h$ .

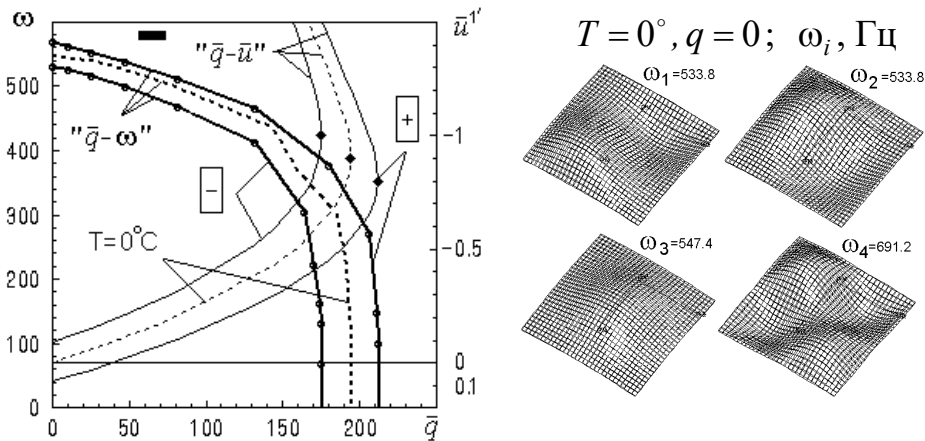


Рис. 6. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}'$ » і « $\bar{q} - \omega$ », форми і частоти власних коливань

Рівномірний приріст температури на  $20^\circ\text{C}$  приводить до практично однакового приросту верхнього критичного навантаження:  $\bar{q}_{кр}^6 = 175,0; 193,7; 212,2$ . Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}'$ », що отримані за МССЕ і ПК ЛІРА-САПР, практично повністю збігаються у

докритичній області з незначною різницею за величинами  $\bar{q}_{кр}^6$  (6,2; 4,7; 7,6%), перші відповідні чотири форми власних коливань панелі для вихідного ненавантаженого стану є ідентичними. Розбіжність за частотами знаходиться у межах 1%. При розрахунках за МССЕ отримано, що при всіх навантаженнях частоти  $\omega_1 = \omega_2$  є кратними. В існуючих версіях ПК ЛІРА-САПР та SCAD на сьогодні немає можливості проводити аналіз власних коливань оболонок з урахуванням переднапруженого стану. У докритичній області на діаграмах « $\bar{q} - \bar{u}'$ » відсутні точки розгалуження розв'язків. За обома критеріями величини  $\bar{q}_{кр}^6$  збігаються.

Порівняльний аналіз стійкості оболонок зі ступінчасто-змінною товщиною проілюстровано на прикладі панелі, що була розглянута вище ( $K = 32$ ). Гладка

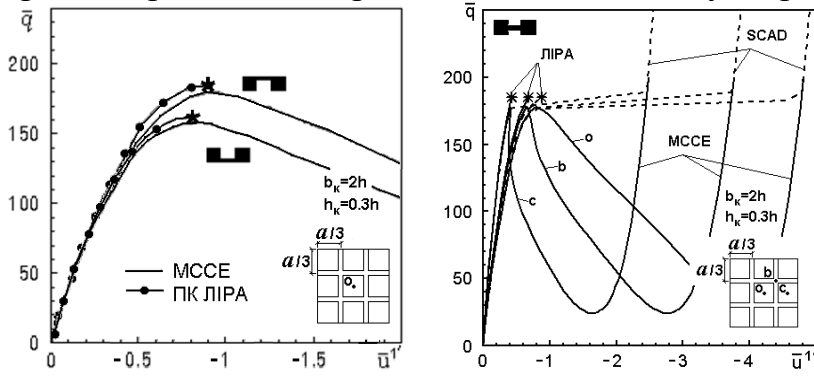


Рис. 7. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}'$ »

панель послаблена чотирма перехресними каналами однакових розмірів: завдовжки  $a$ , завширшки  $b_k$ , завглибшки  $h_k$ , які розміщені на поверхні оболонки: ексцентрично на внутрішній « $\blacksquare$ » або зовнішній « $\blacksquare$ » сторонах і симетрично « $\blacksquare$ ». Для «вузьких» каналів (рис. 7)

розбіжність розв'язків за навантаженням  $\bar{q}_{кр}^6$  і за прогином у центрі  $\bar{u}_{кр}^{1'6}$  не перевищує 4%. Найбільше зменшення  $\bar{q}_{кр}^6$ , порівняно з гладкою панеллю, викликало послаблення на зовнішній стороні оболонки (18,7%). У докритичній області маємо повний збіг кривих « $\bar{q} - \bar{u}$ ».

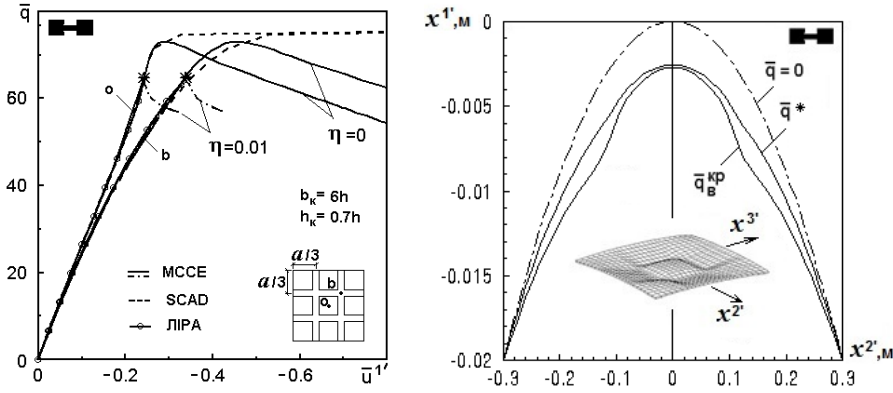


Рис. 8. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}$ » та форми деформування

Для панелі з «широкими» каналами і симетричним їх розташуванням щодо серединної поверхні (рис. 8), у докритичній області маємо гарний збіг діаграм « $\bar{q} - \bar{u}$ », що отримані за трьома ПК. Величина навантаження  $\bar{q}^*$  (МССЕ) в точці

розгалуження «\*» відрізняється від розв'язку ПК ЛІРА-САПР менше за 3%, при повному збігу діаграм « $\bar{q} - \bar{u}$ » у докритичній області. Внесення у вихідну форму оболонки малого несиметричного збурення ( $\eta=0,01$ ) перетворило точку розгалуження «\*» на критичну і дало змогу вийти на нову гілку розв'язку (штрих-пунктирна крива). Для МССЕ і ПК SCAD розбіжність за  $\bar{q}_{кр}^6$  складає лише 3,4%. Отримані форми деформування панелі добре узгоджуються між собою (рис. 8).

Дослідження достовірності розв'язків для панелі з центральним отвором завширшки  $b_o=12h$  ( $K=32$ ) при дії термомеханічного навантаження виконано для трьох варіантів рівномірного за об'ємом попереднього нагріву на  $T=0, \pm 20^\circ\text{C}$  (рис. 9). Для МССЕ і ПК ЛІРА-САПР розбіжність за величиною  $\bar{q}_{кр}^6$  не перевищує 3%. Форма втрати стійкості оболонки характеризується прокладуванням центральної області (рис. 9). Для всіх попередніх нагрівів, послаблення гладкої панелі отвором призводить до практично однакового зниження  $\bar{q}_{кр}^6$  ( $\approx 19\%$ ). Отримано повний збіг форм власних коливань, що одержані за різними методиками, для вихідного стану. Розбіжність за частотами не перевищує 0,2%.

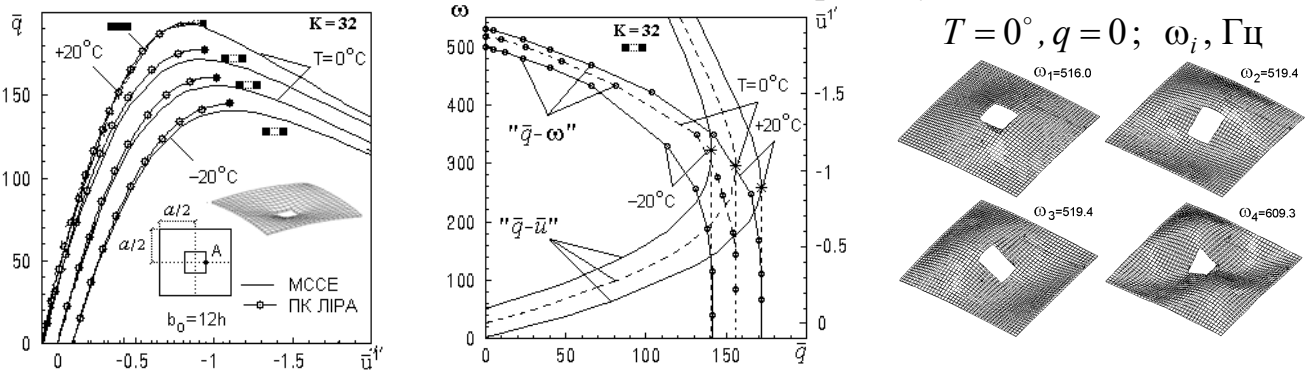


Рис. 9. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}$ » і « $\bar{q} - \omega$ », форми та частоти власних коливань



Вплив лінійної змінності товщини на стійкість гладких панелей при дії тиску досліджено на прикладі пологих сферичних панелей обертання лінійно-змінної товщини, що жорстко затиснуті по контуру. Аналізується поведінка панелі з лінійним за меридіаном розподілом товщини за двома законами: (I)  $\bar{h}(\bar{r}) = 1 + (b_o - 1)\bar{r}$  та (II)  $\bar{h}(\bar{r}) = 1 + (b_a - 1)(1 - \bar{r})$ , де  $b_o = h_{\bar{r}=1}/h^*$  та  $b_a = h_{\bar{r}=0}/h^*$  – параметри безрозмірної товщини  $\bar{h} = h/h^*$  за радіусом  $\bar{r} = r/a$ ,  $r$  – радіальна координата точки панелі за планом,  $h^*$  – «базова» товщина, стріла підйому  $H = 5h^*$ ,  $a = 100h^*$ . Для закону (I) «базова» товщина  $h^* = h_{\bar{r}=0}$  є сталою у центрі панелі (■), для закону (II) «базова» товщина  $h^* = h_{\bar{r}=1}$  є сталою на краю (●). Випадку  $b_o = b_a = 1$  відповідає оболонка сталої характерної товщини  $h^*$  (■).

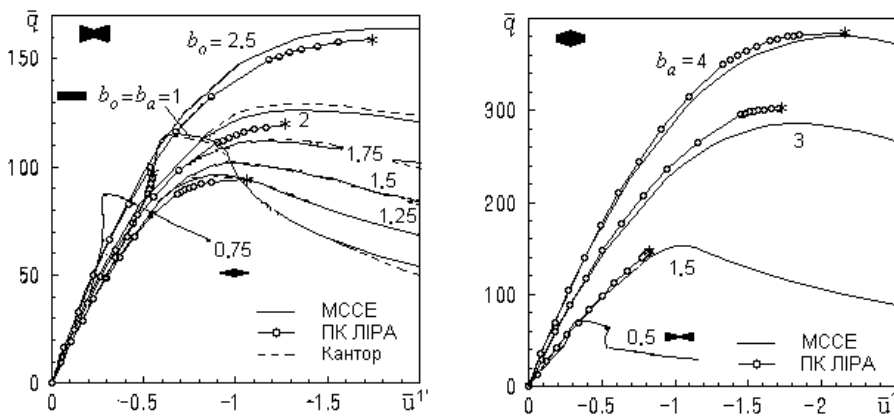


Рис. 10. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ »

Порівняння розв'язків МССЕ і ПК ЛІРА-САПР в діапазоні зміни параметрів товщини  $1 \leq b_o \leq 2,5$  та  $1 \leq b_a \leq 4$  показав їх гарний збіг у докритичній області з незначним розходженням в зоні  $\bar{q}_{кр}^6$  (рис. 10). Оболонці з параметром  $b_a = 4$

варіанта (II) відповідає оболонка того ж об'єму варіанта (I) при  $b_o = 2,5$ , а випадку стоншення панелі на границі  $b_o = 0,75$  (■), відповідає стоншення панелі в центрі  $b_a = 0,5$  (●). У виявлених точках розгалуження ( $b_o = b_a = 1$ ,  $b_a = 1,5$ ) розбіжність навантажень  $\bar{q} = \bar{q}^*$  складає 0,5 і 2,8%, відповідно.

Досліджено вплив геометричної форми оболонки на її стійкість при дії попереднього нагріву та тиску. Розглядаються сферична та конічна панелі обертання за однакою стрілою підйому  $k = H/h = 3$ , товщини та ваги. Оболонки жорстко затиснуті за контуром. Нагрів оболонок реалізовується до температури  $T = 20^\circ \text{C}$ , що відповідає безрозмірному параметру  $\bar{t} = 5$ ,  $\bar{t} = 2\alpha T(a/h)^2$ . Порівнюючи поведінку сферичної і конічної оболонок, можна зробити такі висновки. Об'єми панелей практично однакові, різняться лише на 0,04%. Проте зміна форми оболонки з гладкої сферичної на конічну з особливістю у полюсі позначається на НДС конструкції. Величини  $\bar{q}_{кр}^6$  для конічної панелі менші за відповідні для сферичної оболонки на 21,59% ( $T = 0^\circ \text{C}$ ) і 9,97% ( $T = 20^\circ \text{C}$ ) (рис. 11). Форма втрати стійкості сферичної панелі відбувається через проклацування у полюсі, конічна оболонка втрачає стійкість з утворенням осесиметричної вм'ятини посередині меридіану. У точці «с» діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » конічної панелі відбувається перебудова форм деформування зі збереженням осесиметричного вигляду.

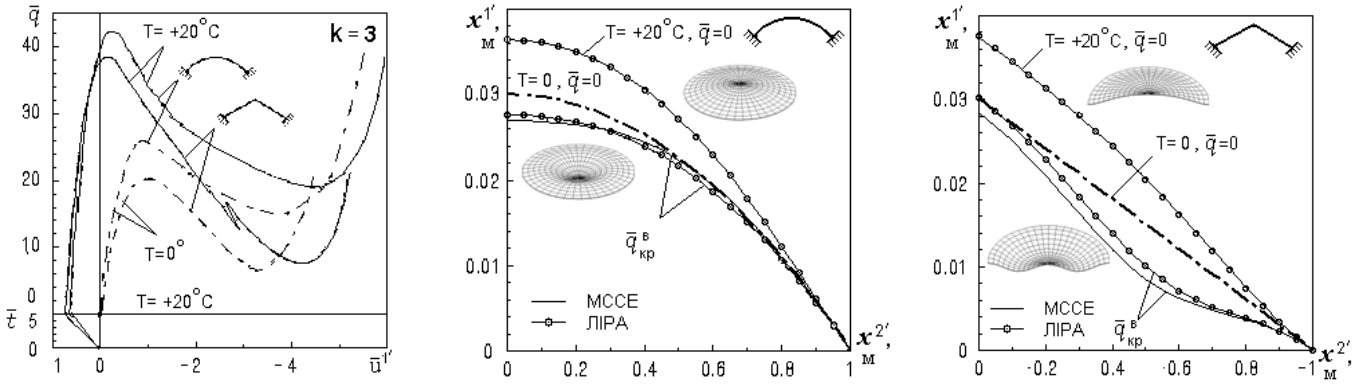


Рис. 11. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » та форми деформування оболонок

Попередній нагрів значно підвищує жорсткість обох оболонок, величина  $\bar{q}_{кр}^6$  відповідно збільшуються в 1,65 і 1,89 рази порівняно з ненагрітою ( $T = 0^\circ\text{C}$ ).

Вплив параметра кривизни панелі на її стійкість і власні коливання досліджено для пологих ( $K = 32$ ) та непологих ( $K = 64$ ) оболонок, гладких « $\blacksquare$ » і з двома центральними перехресними ребрами на внутрішній стороні обшивки « $\blacktriangleright$ ».

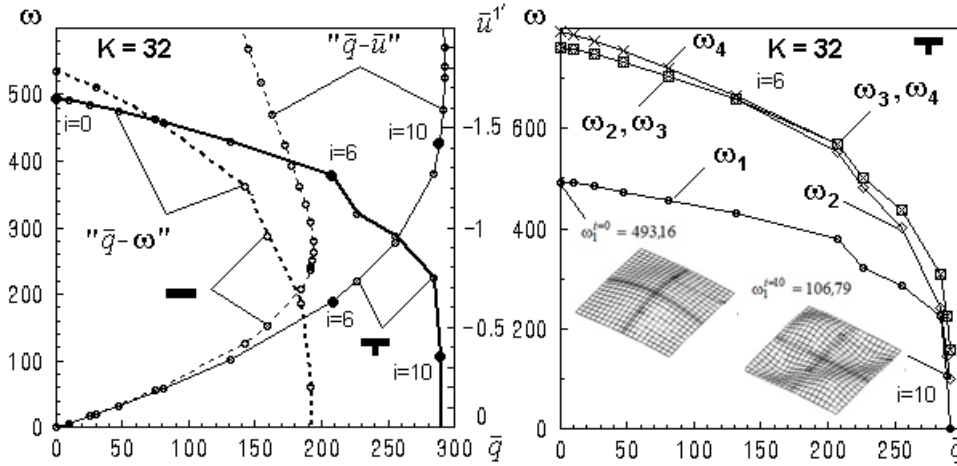
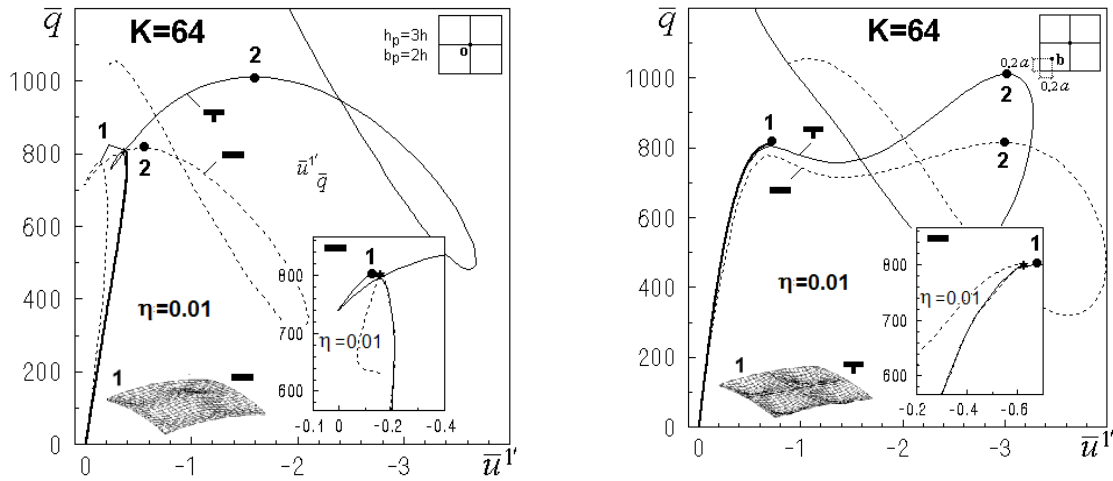


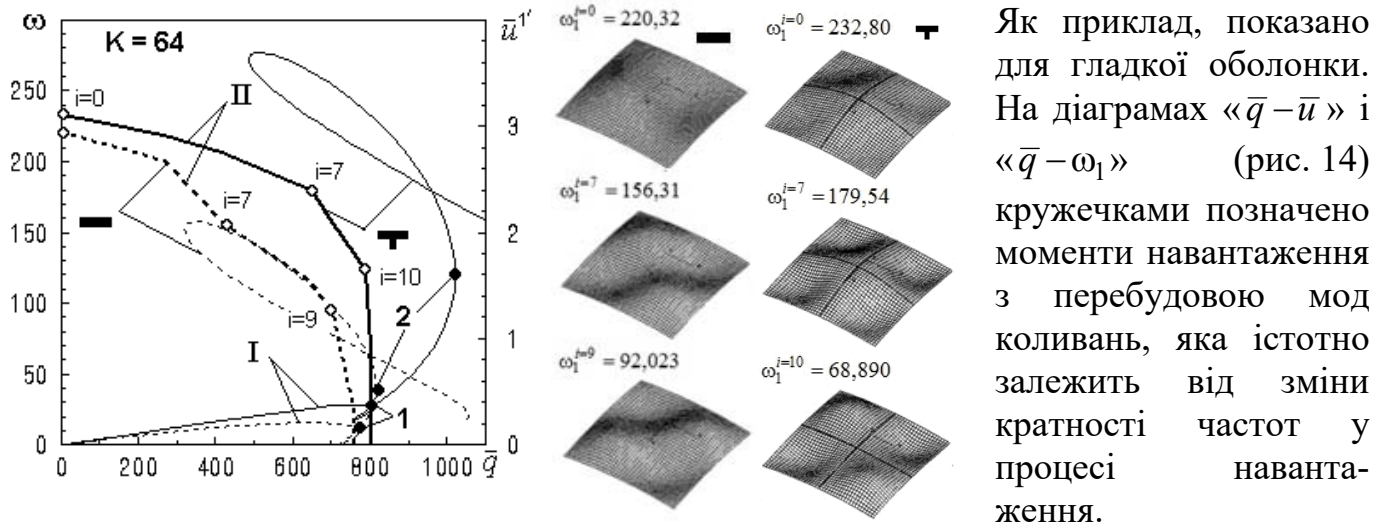
Рис. 12. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » та « $\bar{q} - \omega$ »

Збільшення маси гладкої пологої панелі через ребра на 19,3% привело до підвищення величини  $\bar{q}_{кр}^6$  у 1,5 рази. Власна частота  $\omega_1$  у вихідному стані ( $\bar{q}^{i=0}$ ) знизилась на 7,5% (рис. 12). При  $\bar{q} \approx 80 > \bar{q}^{i=4}$ , частота  $\omega_1$  для ребристої панелі є більшою за відповідну для гладкої. При  $i < 6$  кратними є частоти  $\omega_2 = \omega_3$ . На відміну від ребристої панелі, для гладкої оболонки при всіх  $\bar{q}$  кратними є частоти  $\omega_1 = \omega_2$ . Для обох панелей точки розгалуження розв'язків відсутні.

Для непологих панелей порівняння діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » виконано для характерних точок « $o$ » та « $b$ » (рис. 13). Для цих панелей втрата стійкості відбувається у два етапи: спочатку, відбувається місцева втрата стійкості обшивки між ребрами (точки 1), потім настає загальна втрата стійкості оболонки з проклацуванням центру (точки 2). Підкріплення панелі ребрами практично не впливає на величину  $\bar{q}_{кр}^6$  (3,3%), оскільки ребра розміщуються в області, де при деформуванні з'являються природні гребені жорсткості, які підвищують її жорсткість. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » для обох панелей мають складний вигляд, для них в докритичній області існує точка розгалуження.

Рис. 13. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ »

Внесене початкове збурення форми серединної поверхні оболонки ( $\eta = 0,01$ ) дало змогу вийти на нову гілку розв'язку (штрих-пунктирна крива).

Рис. 14. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » та « $\bar{q} - \omega$ »

Аналіз впливу режимів термомеханічного навантаження на стійкість оболонок ступінчасто-змінної товщини, виконаний на прикладі панелей з каналами при різному їх розташуванні на поверхнях оболонки ( $K = 32$ ). Для кожного способу розташування каналів задається чотири варіанти дії на панель складного термомеханічного навантаження (рис. 15): 1.  $q$  – навантаження лише тиском; 2.  $T_{40^\circ}^k + q$  – нагрів лише каналів на  $40^\circ\text{C}$ ; 3.  $T_{40^\circ}^o + q$  – нагрів лише обшивки; 4.  $T_{40^\circ}^k + T_{40^\circ}^o + q$  – одночасний нагрів обшивки і каналів. Для всіх варіантів нагріву спосіб розташування каналів мало впливає на величину  $\bar{q}_{кр}^6$ . Найбільший вплив на  $\bar{q}_{кр}^6$  справляє розташування каналів на зовнішній поверхні обшивки (■). Величина  $\bar{q}_{кр}^6$  зменшується на 10–12% відносно інших способів розташування каналів. Найбільший вплив на величину  $\bar{q}_{кр}^6$  справляє нагрів всієї оболонки при всіх видах послаблення. Загальна форма деформування панелей для всіх варіантів навантаження є однаковою.

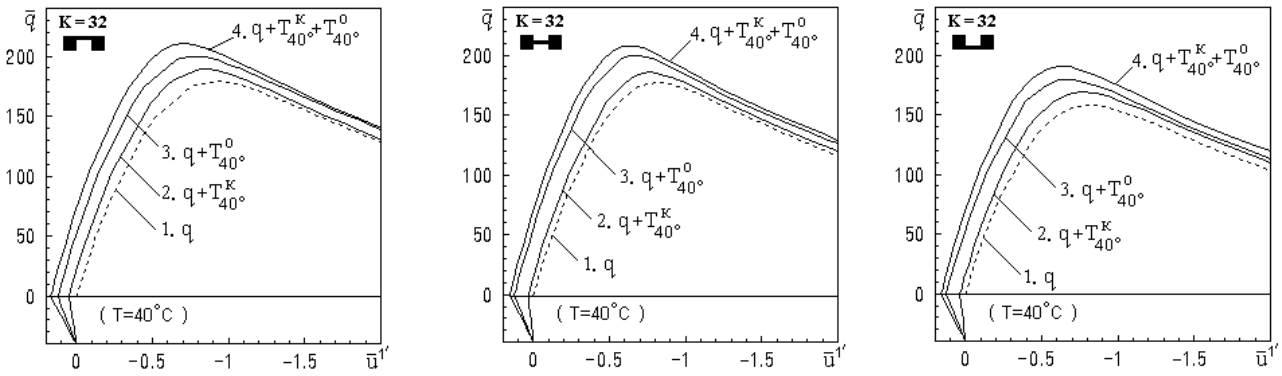




Рис. 15. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ »

Вплив типу закріплення контуру оболонки на процеси її деформування та втрати стійкості досліджувався для двох факторів: типу закріплення контуру (жорстке затиснення  і шарнірне опирання ) та величини попереднього нагріву оболонки на  $T = 0, 20, 40^\circ\text{C}$ . Обидва фактори – закріплення та нагрів значно впливають на поведінку оболонки. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ », що отримані для панелі з затисненим краєм, мають простий вигляд, у докритичній області точки розгалуження відсутні (рис. 16). Зі зростанням  $T$  величина  $\bar{q}_{кр}^6$  збільшується на 34,5 і 51,6 % відносно ненагрітої панелі ( $T = 0^\circ\text{C}$ ).

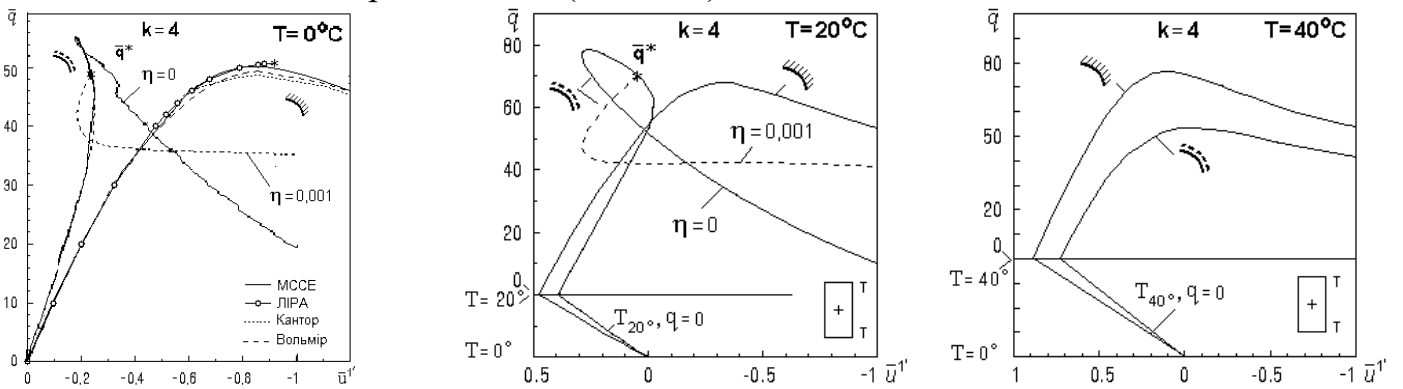


Рис. 16. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » в центрі панелі

Втрата стійкості відбувається через проклацування центральної частини (рис. 17).

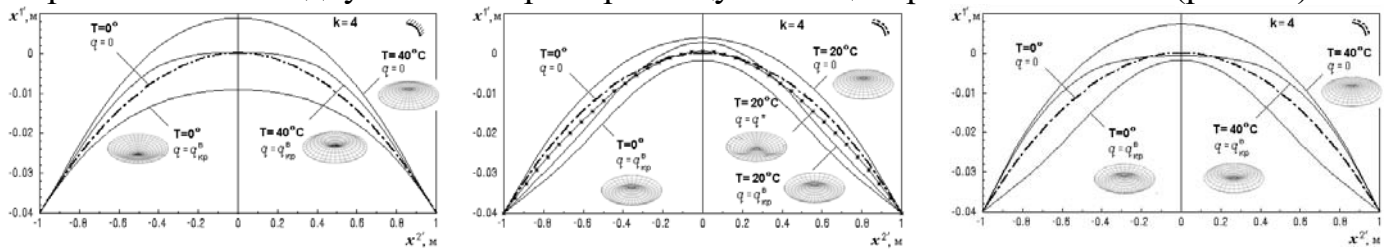


Рис. 17. Форми деформування панелі

Для панелі з шарнірним опиранням діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » мають складніший вигляд. При  $T = 0^\circ\text{C}$  та  $T = 20^\circ\text{C}$  діаграми характеризуються петлями в зоні верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$  та наявністю точки розгалуження при  $\bar{q}^* < \bar{q}_{кр}^6$ . Гілка відгалуження показана пунктирною кривою при  $\eta = 0.001$ . Форми деформування та втрати стійкості оболонки з шарнірним опиранням значно ускладнюються (рис. 17).

Модальний аналіз складеної композитної оболонки виконаний для наближеної моделі обтічника головного блоку ракети-носія «Циклон-4». Розрахункова модель обтічника являє собою дві усічені конічні оболонки з наконечником у вигляді

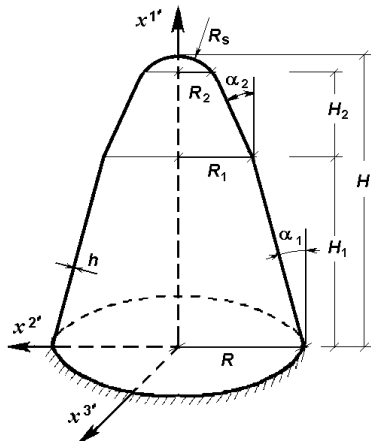


Рис. 18. Розрахункова модель обтічника

сферичної панелі (рис. 18). Параметри обтічника прийняті наближеними до реального прототипу:  $H=4,6$  м,  $R=2,0$  м,  $R_1=1,2$  м,  $H_1=3,2$  м,  $H_2=1,0$  м,  $\alpha_1=25^\circ$ ,  $\alpha_2=15^\circ$ ,  $R_s=0,72$  м,  $h=0,01$  м. За матеріал прийнято вуглепластик AS4/3501-6, фізико-механічних дані якого визначені в третьому розділі. Аналіз форм власних коливань показав наявність найбільших амплітуд в районі нижнього конуса (рис. 19), що є характерним для такого класу оболонок. На прикладі розв'язання задачі на власні коливання продемонстрована можливість проведення модального аналізу складеної оболонки обертання, виконаної з волокнистого композиту.

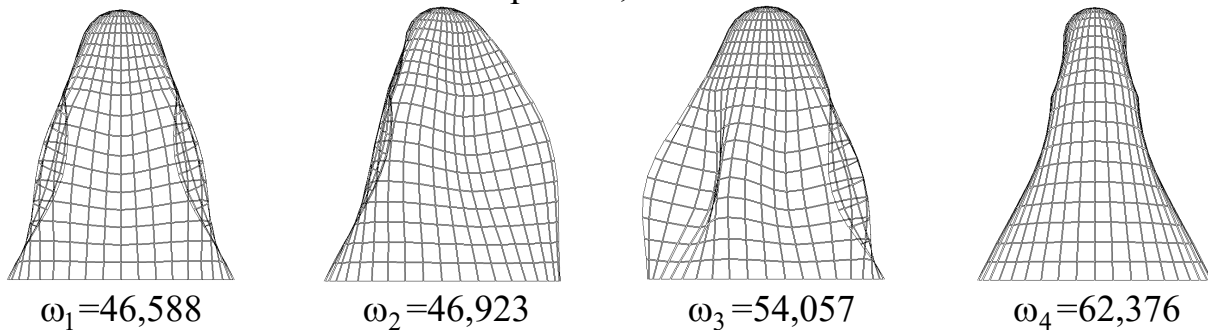


Рис. 19. Форми та частоти (Гц) власних коливань обтічника

## ВИСНОВКИ

В результаті виконання дисертаційної роботи досягнуто поставлену мету та вирішено основні завдання.

1) На базі існуючої скінченноелементної моделі оболонки розроблено методологію одночасного аналізу стійкості та власних коливань неоднорідних оболонкових конструкцій, що знаходяться в термомеханічних умовах експлуатації. На цих засадах побудовано і реалізовано метод комплексного дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження. Розроблений підхід надає можливість як спільно досліджувати нелінійне деформування, стійкість та власні коливання оболонок при дії термомеханічних навантажень, так і визначати момент втрати стійкості конструкції одночасно за статичним та динамічним критеріями.

2) Розв'язування задач нелінійного деформування та власних коливань оболонок побудовано як двохетапний алгоритм, який реалізується на кожному кроці приросту термомеханічного навантаження. Розроблений метод дослідження власних коливань оболонки надає можливість виконувати модальний аналіз конструкції для

деформованого стану, яке спричинено дією статичного термомеханічного навантаження, з урахуванням великих переміщень і переднапруженого стану. Такий підхід дає змогу визначати вплив переднапруженого стану оболонки на частоти та форми власних коливань конструкції, що деформується.

3) У рамках скінченноелементної моделі багат шарової оболонки розроблена методика моделювання властивостей односпрямованого волокнистого КМ. Визначення ефективних характеристик КМ реалізується за структурними мікромеханічними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування термопружних сталих для даної моделі композиту. Це дало змогу поширити метод аналізу поведінки пружних оболонок, виготовлених з традиційних матеріалів, на задачі дослідження стійкості та власних коливань багат шарових волокнистих композитних оболонок ступінчасто-змінної товщини при дії термомеханічного навантаження.

4) Створена нова модифікація універсального тривимірного багат шарового СЕ, матеріалами шарів якого є односпрямовані волокнисті композити. СЕ побудований у відповідності до моментної схеми скінченних елементів. Додаткові змінні параметри СЕ доповнені новими складовими, наявність яких дозволяє використовувати в шарах композитні матеріали поряд із традиційними. Розроблений підхід розширив функціональність вихідного тривимірного скінченного елемента та дозволив розповсюдити розрахункову скінченноелементну модель на широкий клас неоднорідних оболонкових конструкцій з традиційних, композитних та гібридних матеріалів.

5) Проведений чисельний аналіз НДС багат шарових оболонок, матеріали шарів яких є волокнистими композитами. Оцінено дієвість розглянутих у роботі мікромеханічних методів прогнозування характеристик композитів та підтверджено ефективність використання універсального багат шарового СЕ нової модифікації.

6) Виконано адаптацію можливостей ПК ЛІРА-САПР та SCAD до розв'язування задач стійкості пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини при дії термомеханічних навантажень. Це надало змогу виконати порівняльний аналіз розв'язків, що отримуються. Доведено вірогідність і ефективність розробленого методу комплексного дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань оболонок неоднорідної структури при дії термомеханічних навантажень. Показано переваги розробленого методу, який дає змогу досліджувати значно ширший клас задач в рамках одної розрахункової схеми, включаючи особливості структури оболонок, складніші види навантаження, а також проводити комплексне дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях загального виду.

7) Досліджено вплив параметрів комбінованої дії термомеханічного навантаження, геометричної форми конструкції, умов закріплення на нелінійне деформування, стійкість, закритичну поведінку і власні коливання різних класів тонких пружних оболонок: пологих і непологих, лінійно-змінної товщини, підкріплених ребрами, послаблених отворами і каналами. Виявлені особливості та існуючі закономірності їхнього деформування, втрати стійкості і власних коливань. Можливості методу продемонстровано на прикладі розв'язання задачі щодо власних коливань складеної композитної оболонки – обтічника літального апарату.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*а) статті у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз, та у наукових фахових видань України (категорії А):*

1. Кривенко О.П., Лізунов П.П., **Калашніков О.Б.** Універсальний тривимірний скінченний елемент для розрахунку пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2024. №112. С. 93-107. (**Web of Science, Q4**)
2. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., **Калашніков О.Б.** Моделювання процесів нелінійного деформування, втрати стійкості та коливань пружних оболонок неоднорідної структури. *Прикладна механіка*. 2024. Т.60 № 4. С. 91-107. (**Scopus, Q4**)
3. Krivenko O.P.; Lizunov P.P.; Vorona Yu.V.; **Kalashnikov O.B.** Comparative analysis of the stability and natural vibrations of shallow panels under the action of thermomechanical loads. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. № 111. P. 49-64. (**Web of Science, Q4**)
4. Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V., **Kalashnikov O.B.** A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells with an Inhomogeneous Structure. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and Technical collected articles*. 2023. №110. P. 131-149. (**Web of Science, Q4**)

*б) статті в наукових фахових виданнях України (категорії Б):*

5. Krivenko O., Lizunov P., **Kalashnikov O.** The influence of geometrical shape on the buckling of thin-walled axisymmetric shells. *Management of Development of Complex Systems*, 2024 №57, P. 102-106.
6. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., **Калашніков О.Б.** Моделювання термопружних властивостей композитного матеріалу в задачах стійкості багатошарових оболонок. *Управління розвитком складних систем*. 2023. № 54. С. 77-89.
7. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., **Калашніков О.Б.** Використання моментної схеми скінчених елементів при дослідженні тонких пружних оболонок. *Управління розвитком складних систем*. 2023. №53. С. 52-62.
8. Соловей М.О., Кривенко О.П., **Калашніков О.Б.** Вплив попереднього нагріву на втрату стійкості пологих оболонок при дії тиску. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. № 90. С. 143-157.
9. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О., **Калашніков О.Б.** Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. № 89. С. 172-180.
10. Соловей М.О., Кривенко О.П., **Калашніков О.Б.**, Тамілко О.А. Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2009. № 84. С. 89-96.
11. Соловей М.О., Кривенко О.П., **Калашніков О.Б.** Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2009. № 83. С. 63-73.

**в) публікації по доповідях на міжнародних та вітчизняних конференціях:**

12. **Калашніков О.Б.**, Кривенко О.П., Лізунов П.П. Дослідження стійкості та власних коливань пружних оболонкових конструкцій при дії статичних термомеханічних навантажень. *Актуальні проблеми інженерної механіки: матеріали Х Міжнародної науково-практичної конференції* Одеса: ОДАБА, 2024. С. 144-147.
13. **Kalashnikov O.**, Krivenko O., Lizunov P. Comprehensive investigation of the buckling and natural vibrations of thin elastic shells under the action of thermomechanical loads. *Science in the Environment of Rapid Change: IV International scientific and practical conference*, Brussels, 6-8 April 2024. P. 407–410.
14. **Kalashnikov O.**, Krivenko O., Lizunov P. (2024). Modification of a universal three-dimensional finite element for modeling multilayer composite shells. *Diversity and inclusion in scientific area: IV International scientific and practical conference*, Warsaw, 26-28 March 2024. P. 461–463.
15. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., **Калашніков О.Б.** Скінченно-елементний аналіз коливань і стійкості пружних оболонок при дії термосилових навантажень. *Проблеми будівельного та транспортного комплексів: матеріали міжн. науково-технічної on-line конф.* Кропивницький: ЦНТУ, 2023. С. 82-85.
16. **Калашніков О.Б.**, Кривенко О.П. Врахування термопружних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Енергоощадні машини і технології: матеріали міжн. науково-практичної конф.* Київ, КНУБА. 2023. С. 153-156.
17. **Калашніков О.Б.**, Верюжська Т.Ю. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок, послаблених каналами, виїмками та отворами. *74-та Науково-практична конференція КНУБА: матеріали конференції*, Київ, 2013. С. 122.
18. **Калашніков О.Б.** Порівняльний аналіз напружено-деформованого стану і стійкості пружних оболонок з каналами та ребрами. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА: матеріали конференції*, Київ, 2012. С. 44.
19. **Калашніков О.Б.**, Солоденко А.Д. Стійкість пружних пологих оболонок ступінчасто-змінної товщини. *73-тя Науково-практична конференція КНУБА: матеріали конференції*, Київ, 2012. С. 102.
20. **Калашніков О.Б.**, Гусар П.П. Аналіз задач нелінійного деформування та стійкості тонких пружних оболонок, що розв'язані за МССЕ та ПК ЛІРА. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА: матеріали конференції*, Київ, 2010. С. 32.

## АНОТАЦІЯ

**Калашніков О.Б. Стійкість та власні коливання пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена розробці методу комплексного дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних багат шарових оболонок, які мають складну форму та геометричні особливості за товщиною і знаходяться під дією статичного термомеханічного навантаження, та



розробці методології моделювання термопружних характеристик односпрямованого композитного волокнистого матеріалу в скінченноелементній моделі оболонки. Методи дослідження стійкості та власних коливань оболонок неоднорідної структури ґрунтуються на ефективному підході, за яким тонкі оболонки розглядаються як тривимірні тіла, а їхня поведінка описується співвідношеннями геометрично нелінійної тривимірної теорії термопружності. Уточнена розрахункова модель оболонок побудована на базі використання універсального тривимірного скінченного елемента та залученні моментної схеми скінченних елементів. Прийнятий уніфікований підхід надає можливість досліджувати деформування та власні коливання пружних оболонок різних класів (сталюї, гладко- та ступінчасто-змінної товщини, з отворами, з багатошаровою структурою матеріалу тощо) у рамках єдиної методології. Даний підхід дозволяє аналізувати поведінку пружних оболонок, що знаходяться під дією складного (комбінованого) термомеханічного навантаження.

У рамках скінченноелементної моделі багатошарової оболонки розроблено методіку моделювання властивостей односпрямованого волокнистого композитного матеріалу та розроблено нову модифікацію універсального тривимірного багатошарового СЕ, матеріалом шарів якого є КМ, армований паралельними безперервними волокнами. Новий СЕ побудовано на основі просторового ізопараметричного 8-ми вузлового багатошарового СЕ з полілінійними функціями форми, матеріалами шарів якого є традиційні матеріали. Визначення ефективних характеристик КМ здійснюється за структурними мікромеханічними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування термопружних сталих для даної моделі композиту. Це дало змогу поширити метод аналізу поведінки пружних оболонок, виготовлених з традиційних матеріалів, на задачі дослідження стійкості та власних коливань багатошарових волокнистих композитних оболонок.

Дослідження процесів геометрично нелінійного деформування оболонки базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах, коли процес деформування подається як послідовність рівноважних станів при достатньо малих кроках термомеханічного навантаження. Використано модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Метод комплексного аналізу стійкості та власних коливань оболонок побудовано як двохетапний алгоритм, що реалізується на кожному кроці приросту навантаження і дає змогу виконувати модальний аналіз конструкції з урахуванням переднапруженого стану. За таким підходом момент втрати стійкості конструкції може бути визначений одночасно за статичним і динамічним критеріями.

Обґрунтовано ефективність і достовірність розробленого методу шляхом проведення чисельних досліджень збіжності та точності розв'язків, а також порівняльного аналізу результатів з даними інших авторів і з результатами розрахунку із залученням програмних комплексів ЛІРА-САІР, SCAD, NASTRAN. Досліджено вплив геометричних параметрів конструктивних елементів оболонок і параметрів термомеханічного навантаження на нелінійне деформування, стійкість та власні коливання пружних оболонок. Можливості методу продемонстровано на

прикладі розв'язання задачі щодо власних коливань складеної композитної оболонки – обтічника літального апарату.

**Ключові слова:** тонка пружна оболонка, ступінчасто-змінна товщина, геометрично нелінійне деформування, стійкість, власні коливання, термомеханічне навантаження, універсальний тривимірний скінченний елемент, моментна схема скінченних елементів, волокнистий односпрямований композитний матеріал.

## ABSTRACT

**Kalashnikov O.B. Buckling and natural vibrations of elastic inhomogeneous shells under thermomechanical loads.** – Manuscript.

The thesis is monograph submitted for the degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 05.23.17 – Structural Mechanics. – Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to the development of the method for complex studying geometrically nonlinear deformation, buckling and natural vibrations of shells with a complex shape of the middle surface, geometric features throughout the thickness, and a multilayer material structure under the action of static thermomechanical loading. The research methods are based on an the effective approach in which thin shells are considered as three-dimensional bodies. Their behavior is described by the relations of three-dimensional geometrically nonlinear theory of thermoelasticity and the moment finite element scheme. Within a single methodology the adopted unified approach allows us for the investigation of the deformation and natural vibrations of elastic shells of various classes such as constant, linear and stepwise-varying thickness, with holes, and multilayer material structures, etc. This approach enables the analysis of the behavior of elastic shells under complex (combined) thermomechanical load. Within the framework of the finite element model of the multilayer shell, a method of modeling the properties of unidirectional fibrous composite material has been developed. A new modification of the universal isoparametric eight-node multilayer 3D finite element with multilinear shape functions has been developed, intended for studying thin elastic shells made of both traditional and composite materials.

Determination of the effective characteristics of the composite material is implemented by the structural micromechanical parameters of its components based on known methods for predicting thermoelastic constants for a given model of the composite. To determine the effect of the prestressed state of the shell on the frequencies and forms of natural vibrations, a two-stage algorithm was developed, which is implemented at each step of increasing the thermomechanical load. The substantiation of the effectiveness and reliability of the proposed method was confirmed by conducting numerical studies of convergence of solutions and accuracy of solutions on tests. The effect of various geometrical parameters of structural elements of shells and parameters of thermomechanical load on nonlinear deformation, stability and natural vibrations of elastic shells has been investigated.

**Key words:** thin elastic shell, stepped-variable thickness, geometrically nonlinear deformation, buckling, natural vibration, thermomechanical loading, universal 3D finite element, moment finite element scheme, fibrous unidirectional composite material.

Підписано до друку 09.09.2024  
Формат 60x90 1/16. Папір офсетний № 2  
Друк цифровий.  
Ум. друк. арк. 0,9 арк.  
Тираж 100 прим. Замовлення № 2180

---

Надруковано в типографії ФОП Степенко Р.Д.  
02660, м. Київ, б-р Миколи Міхновського, 24/2  
тел.: +38 (095) 6724642, [www.urb.com.ua](http://www.urb.com.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7205 від 03.12.2020