

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Янсонс Марина Оскарівна

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**Модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при
термосиловому навантаженні.**

05.23.17 – будівельна механіка

Технічні науки

19 – Архітектура і будівництво

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів в інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Янсонс М.О.

Науковий керівник Кошевий Олександр Петрович, к. т. н., доц., завідувач кафедри опору матеріалів (Київський національний університет будівництва та архітектури)

Київ – 2024

АНОТАЦІЯ

Янсонс М.О. Модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні. - Кваліфікована наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 «Будівельна механіка», галузь знань 19 – Архітектура і будівництво. – Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, 2024р.

Основний зміст дисертаційної роботи

Робота присвячена дослідженням в галузі механіки твердих тіл та вирішенню задач будівельної механіки пов'язаних з напружено-деформованим станом конструкцій під впливом статичних та температурних навантажень, розробкою комплексного підходу до вирішення такого типу задач, з використанням модифікованого методу прямих і його поширення на об'єкти вісесиметричної форми.

Для розв'язання задач опору матеріалів, теорії пружності використовуються комбіновані аналітично-чисельні методи (МСЕ, варіаційні, різницеві, проєкційні методи та ін.). Дані методи в певних модифікаціях використовують для зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь алгоритми, побудовані на проєкційних співвідношеннях.

У вступі обговорено актуальність теми, окреслено зв'язок з науковими програмами, планами і темами, сформовано мету і задачі дослідження, показано наукову новизну, наукове та практичне значення отриманих результатів.

В першому розділі детально розглянуто розвиток дослідження НДС вісесиметричних тіл обертання. Основні підходи та типи задач, що вирішувались різними вченими. Проаналізовані переваги та недоліки аналітичних і наближених методів, чисельних методів та комбінованих методів, а також методу прямих та його розвиток.

Обґрунтовано використання комбінованих методів для розв'язання практичних задач, як один з найпоширеніших та ефективних наукових підходів будівельної механіки. Основою таких підходів є зниження вимірності вихідної задачі по одній з

двох просторових змінних, що значно спрощує отримання результатів розрахунків. Для зниження вимірності використовувались певні припущення та гіпотези. Зростаюче використання чисельних методів в сучасних програмних комплексах дало поштовх розвитку комбінованих методів для розв'язання редукованих задач, та стало невід'ємною їх частиною.

Проведений аналіз методу прямих, його історичний розвиток та модифікація до сучасного стану. Наведені переваги методу, та способи позбавлення недоліків для можливості розповсюдження методу на обраний клас задач будівельної механіки.

Проаналізовані сучасні підходи до розрахунку будівельних конструкцій нетонких пластин та оболонок вісесиметричної форми, актуальність використання таких форм у повсякденному будівництві в Україні та світі. Оглянуті методики і програмні розрахункові комплекси, які мають змогу розраховувати такі об'єкти будівництва з врахуванням статичних і температурних впливів на них. Відмічена постійно зростаюча необхідність більшої точності розрахунку будівельних конструкцій, та способи її досягнення.

У другому розділі розглянуто побудову розрахункових моделей для об'єктів, що мають вісесиметричну геометрію і їх розрахункові чисельні схеми побудовані в циліндричній системі координат. Сформовані вихідні рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат та початкові і граничні умови для них. В задачі до плоскої деформації в якій вирішувальні рівняння перетворені до плоскої задачі Коші, проведено зниження її вимірності по осьовій та окружній координатах. Для зниження вимірності просторової задачі використані співвідношення Коші, що описують співвідношення між взаємодією напружень та деформацій.

Сформовано системне уявлення про розробку комплексного підходу до вирішення задач зниження вимірності диференціальних рівнянь теорії пружності з використанням модифікованого методу прямих та застосування програмного забезпечення для чисельної реалізації підходу.

Запропоновано і розроблено модифікований варіант методу прямих, структура якого відповідає сучасним вимогам до комбінованих методів. На першому етапі

виконується зниження вимірності вихідних рівнянь на основі проєкційного методу. А на другому етапі знаходяться компоненти двічі коваріантного метричного тензора в евклідовому просторі з вибраним основним базисом.

У третьому розділі проаналізовані основні ідеї та підхід до зниження вимірності вихідних рівнянь теорії пружності в модифікованому методі прямих та задоволення природніх граничних умов по методу Бубнова-Гальоркіна-Петрова, де в якості базисних функцій використовуються локально зосереджені функції – «функції кришки». Зниження вимірності рівнянь модифікованим методом прямих по радіальній координаті приведено на прикладі циліндричного тунелю на пружній основі, по циліндричній координаті зниження вимірності розглянуто на прикладі циліндричної платини, по осьовій координаті розглянуто зниження вимірності з використанням методу Бубнова-Гальоркіна-Петрова на основі локально зосереджених функцій.

Важливим питанням при застосуванні модифікованого методу прямих є запис вихідних розрахункових рівнянь, граничних та початкових умов, від цього залежить ефективність побудови редукованих рівнянь та відповідних граничних та початкових умов, необхідно також передбачити щоб в подальшому редуковані задачі можна було б розв'язати сучасними чисельними методами. Досвід застосування модифікованого методу прямих свідчить про те, що найкраще для зниження вимірності підходить проєкційний метод, а вихідні рівняння мають вигляд системи диференційних рівнянь в частинних похідних першого порядку по просторових координатах. В цьому випадку граничні умови мають вигляд алгебраїчних рівнянь, а редуковані розв'язувальні рівняння зводяться до форми Коші.

У четвертому розділі висвітлений алгоритм роботи програмного забезпечення для чисельного дослідження НДС вісесиметричних задач з використанням модифікованого методу прямих в комплексі з програмним комплексом LIRA SAPR. Для тестування методики проведено чисельне моделювання задачі про теплопровідність циліндру та продемонстровані можливості роботи програмного комплексу. Проведено чисельне дослідження НДС магістральних трубопроводів в

місцях переходів через перешкоди та компенсатори від комплексного навантаження, та чисельне моделювання НДС тунелю метрополітену з урахуванням всіх типів навантажень в екстремальних умовах. Результати отримані в дисертаційній роботі за допомогою ефективного комплексного використання напіваналітичного модифікованого методу прямих та чисельних методів і розробки програмного забезпечення дало можливість впровадити результати роботи в практичне проектування.

Ключові слова: модифікований метод прямих, об'єкти вісесиметричної форми, циліндрична система координат, редуковані граничні умови, редуковані рівняння рівноваги в частинних похідних, система диференціальних рівнянь, система редукованих диференціальних рівнянь у формі Коші, метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова, напіваналітичні та чисельні методи, напружено-деформований стан, міцність, жорсткість, температурні впливи, чисельне моделювання, комплексні чисельні просторові моделі, комп'ютерне моделювання, програмне забезпечення.

Список публікацій здобувачки:

В яких опубліковані основні результати дисертації:

1. Морсков Ю.А., Янсонс М.О. Розрахунок жорстких пластин на пружній основі методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 41. – Київ, КНУБА, 2011. – С.277-285.
2. Левківський Д.В., Янсонс М.О. Метод прямих у циліндричній системі координат // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 93, - Київ, КНУБА, 2014. – С. 118-124.
3. Левківський Д.В., Янсонс М.О. Дослідження властивостей проєкційного методу в задачі згину балки // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 62. ч.1, - Київ, КНУБА, 2016. – С. 338-344.

4. Левківський Д.В., Янсонс М.О. Розрахунок товстої пластини модифікованим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 63, - Київ, КНУБА, 2017. – С. 247-250.
5. Левківський Д.В., Янсонс М.О. Особливості застосування методу ліній для зниження вимірності диференціальних рівнянь теорії пружності в циліндричній системі координат // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 66. – Київ, КНУБА, 2018. – С. 674-680.
6. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О., Сович Ю.В. Модифікований метод прямих, алгоритм його застосування, можливості та перспективи. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 70. – Київ, КНУБА, 2019. – С. 595-616.
7. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О., Сович Ю.В. // Чисельна реалізація модифікованого методу прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 74. – Київ, КНУБА, 2020. – С. 341-359.
8. Янсонс М.О. Розрахунок арочного кріплення методом прямих // Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доповідей V Міжнародної конференції - м. Одеса 22-25 травня 2018. – С. 259-261.
9. Янсонс М.О. Застосування узагальненого методу прямих для дослідження динамічного напружено-деформованого стану кільцевих нетонких пластин // Математичні проблеми технічної механіки – 2021: тези доповідей Міжнародної наукової конференції - м. Дніпро, Кам'янське 2021. – С. 22-24.
10. Кошевий О.П., Левківський Д.В., Чубарев А.Г., Янсонс М.О. // Модифікований метод прямих в статичних задачах вісесиметричних нетонких пластин // Опір матеріалів і споруд №109 2022р с. 342-358.
11. Марчук О.С., Кошевий О.П., Янсонс М.О., Чубарев А.Г. // Моделювання температурних впливів в масивних тілах за допомогою модифікованого метода

прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 82. – Київ, КНУБА, 2023. – С. 185-197.

12. Кошевий О.П., Кошева В.О., Янсонс М.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С. // Побудова комплексної моделі реконструкції шляхопроводу на основі обстеження з використанням ВІМ-технологій // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 83. - Київ, КНУБА, 2023. – С. 143-155.

13. Кошевий О.П., Кошева В.О., Янсонс М.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С. // Чисельне моделювання просторової моделі шляхопроводу для оцінки міцності та жорсткості на основі обстеження з використанням розрахункового комплексу Liga // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 84. – Київ, КНУБА, 2023. – С. 171-180.

14. Кошевий О.П., Кошева В.О., Янсонс М.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С. // Чисельне моделювання напружено деформованого стану магістральних трубопроводів в місцях переходів та компенсаторів при комплексному навантаженні // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 85. – Київ, КНУБА, 2024. – С. 257-267.

15. Кошевий О.П., Левківський Д.В., Сович Ю.В., Янсонс М.О., Пошивач Д.В. // Чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач нестационарної теплопровідності не тонкої кільцевої пластини// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вип.112 – Київ, КНУБА, 2024. - С. 185-194.

16. Кошевий О.П., Кошева В.О., Янсонс М.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С. // Чисельне моделювання температурних впливів на шляхопровід для створення просторової комп'ютерної моделі реконструкції // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 112. – Київ, КНУБА, 2024. – С.161-169.

17. Кошевий О.П., Янсонс М.О., Лазарева М.В., Чубарев А.Г., Смоленский А. // Чисельне моделювання просторової моделі стану пошкодженого дев'ятиповерхового будинку для оцінки міцності та жорсткості на основі результатів обстеження // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 86. – Київ, КНУБА, 2024. – С. 314-328.

ANNOTATION

Yansons M. Modified method of straight lines in problems of axisymmetric bodies under thermoforce loading. - Qualified scientific work with manuscript rights.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 05.23.17 "Construction Mechanics", branch of knowledge 19 – Architecture and construction. – Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, 2024.

Main Content of the Dissertation

The work is devoted to research in the field of solid mechanics and the solution of structural mechanics problems associated with the stress-strain state (SSS) of structures under static and thermal loads. It develops a comprehensive approach to solving such problems using a modified method of lines, expanding its application to axisymmetric bodies.

Combined analytical-numerical methods (finite element method, variational, difference, and projection methods, among others) are used to solve problems in materials science and elasticity theory. These methods, in certain modifications, employ projection-based algorithms for dimensionality reduction of the original differential equations.

The introduction provides a historical analysis of methods for solving multidimensional problems in structural mechanics, the current state of these methods, their advantages and disadvantages, and their applicability in modern computational software packages. The main ideas and capabilities of the modified method of lines for solving problems in elasticity and thermoelasticity theory are presented, establishing the feasibility and prospects of the proposed method.

The first chapter examines the development of SSS studies in axisymmetric bodies of revolution in detail, covering key approaches and problem types addressed by various researchers. It analyzes the advantages and disadvantages of analytical, approximate, numerical, and hybrid methods, as well as the development of the method of lines.

The justification for using combined methods for practical problem-solving as one of the most common and effective scientific approaches in structural mechanics is provided. These approaches are based on reducing the dimensionality of the original

problem along one of two spatial variables, significantly simplifying the computational results. Certain assumptions and hypotheses were applied for dimensionality reduction. The increasing use of numerical methods in modern computational systems has driven the development of combined methods for solving reduced problems, which have become an integral part of such solutions.

The dissertation discusses the method of lines, its historical development, and its modifications to the present state. The advantages of the method and ways to eliminate its drawbacks for applicability to a selected class of structural mechanics problems are outlined.

Modern approaches for calculating structural elements like thick plates and shells of axisymmetric form are examined, as is the relevance of using such forms in contemporary construction in Ukraine and globally. The study reviews methods and software packages capable of analyzing such construction objects under static and thermal effects. The increasing demand for greater calculation accuracy in structural engineering and methods to achieve this are highlighted.

The second chapter details the construction of computational models for objects with axisymmetric geometry, with numerical models developed in cylindrical coordinates. The initial equations of elasticity theory in cylindrical coordinates and the initial and boundary conditions for these equations are formulated. For the plane strain problem, which is reduced to a plane Cauchy problem, dimensionality reduction along the axial and circumferential coordinates is performed. Cauchy relations describing stress-strain interactions are used for dimensionality reduction of the spatial problem.

A systematic framework is established for developing a comprehensive approach to solving dimensionality reduction problems in the differential equations of elasticity theory using the modified method of lines and software implementation for the numerical realization of this approach.

A modified version of the method of lines is proposed and developed, structured to meet modern requirements for combined methods. The first stage involves dimensionality reduction of the original equations using a projection method, while the second stage

determines the components of the twice-covariant metric tensor in Euclidean space with a selected primary basis.

The third chapter analyzes the key ideas and approach for reducing the dimensionality of the original elasticity theory equations using the modified method of lines while satisfying natural boundary conditions by the Bubnov-Galerkin-Petrov method. Locally concentrated functions, or "cover functions," are employed as basis functions. Dimensionality reduction by the modified method of lines along the radial coordinate is demonstrated through a cylindrical tunnel on an elastic foundation. Reduction along the cylindrical coordinate is illustrated using a cylindrical plate, and reduction along the axial coordinate is achieved using the Bubnov-Galerkin-Petrov method with locally concentrated functions.

A crucial consideration in applying the modified method of lines is the formulation of the initial computational equations and boundary and initial conditions, as this influences the effectiveness of building reduced equations and corresponding boundary and initial conditions. It is also necessary to ensure that the reduced problems can subsequently be solved using modern numerical methods. Experience with the modified method of lines indicates that the projection method is optimal for dimensionality reduction, and the original equations should be presented as a system of first-order partial differential equations in spatial coordinates. In this format, boundary conditions take the form of algebraic equations, and the reduced governing equations are converted into Cauchy form.

The fourth chapter describes the algorithm for software operation for the numerical analysis of the SSS in axisymmetric problems using the modified method of lines in conjunction with the LIRA SAPR software package. The methodology was tested by numerically modeling the heat conductivity problem of a cylinder, showcasing the software's capabilities. Numerical research was conducted on the SSS of main pipelines at transition points over obstacles and compensators under complex loading and on the SSS of a subway tunnel under all types of loads in extreme conditions. The results obtained in the dissertation through effective combined use of the semi-analytical modified method of

lines and numerical methods, along with software development, have facilitated the implementation of these findings in practical design.

Keywords: modified method of lines, axisymmetric objects, cylindrical coordinate system, reduced boundary conditions, reduced equilibrium equations in partial derivatives, system of differential equations, system of reduced differential equations in Cauchy form, S.K. Godunov's discrete orthogonalization method, semi-analytical and numerical methods, stress-strain state, strength, rigidity, thermal effects, numerical modeling, comprehensive numerical spatial models, computer modeling, software.

List of applicant's publications:

In which the main scientific results of the dissertation are published:

1. Morskov Yu.A., Yansons M.O. Rozrakhunok zhorstkykh plastyn na pruzhnii osnovi metodom priamykh // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 41. – Kyiv, KNUBA, 2011. – S.277-285.
2. Levkivskyi D.V., Yansons M.O. Metod priamykh u tsylindrychnii systemi koordynat // Opir materialiv i teoriia sporud: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 93, - Kyiv, KNUBA, 2014. – S. 118-124.
3. Levkivskyi D.V., Yansons M.O. Doslidzhennia vlastyvostei proektsiinoho metodu v zadachi zghynu balky // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 62. ch.1, - Kyiv, KNUBA, 2016. – S. 338-344.
4. Levkivskyi D.V., Yansons M.O. Rozrakhunok товстої пластини модифікованим методом прямих // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 63, - Kyiv, KNUBA, 2017. – S. 247-250.
5. Levkivskyi D.V., Yansons M.O. Osoblyvosti zastosuvannia metodu linii dlia znyzhennia vymirnosti dyferentsialnykh rivnian teorii pruzhnosti v tsylindrychnii systemi koordynat // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 66. – Kyiv, KNUBA, 2018. – S. 674-680.

6. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O., Sovych Yu.V. Modyfikovanyi metod priamykh, alhorytm yoho zastosuvannya, mozhlyvosti ta perspektyvy. // Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 70. – Kyiv, KNUBA, 2019. – S. 595-616.
7. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O., Sovych Yu.V. // Chyselna realizatsiia modyfikovanoho metodu priamykh. // Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 74. – Kyiv, KNUBA, 2020. – S. 341-359.
8. Yansons M.O. Rozrakhunok arochnoho kriplennia metodom priamykh // Aktualni problemy inzhenernoi mekhaniky: tezy dopovidei V Mizhnarodnoi konferentsii - m. Odesa 22-25 travnia 2018. – S. 259-261.
9. Yansons M.O. Zastosuvannya uzahalnenoho metodu priamykh dlia doslidzhennia dynamichnogo napruzhenno-deformovanoho stanu kiltsevykh netonkykh plastyn // Matematychni problemy tekhnichnoi mekhaniky – 2021: tezy dopovidei Mizhnarodnoi naukovoï konferentsii - m. Dnipro, Kamianske 2021. – S. 22-24.
10. Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Chubarev A.H., Yansons M.O. // Modyfikovanyi metod priamykh v statychnykh zadachakh visesymetrychnykh netonkykh plastyn // Opir materialiv i sporud №109 2022r s. 342-358.
11. Marchuk O.S., Koshevyi O.P., Yansons M.O., Chubarev A.H. // Modeliuvannya temperaturnykh vplyviv v masyvnykh tilakh za dopomohoiu modyfikovanoho metoda priamykh// Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 82. – Kyiv, KNUBA, 2023. – S. 185-197.
12. Koshevyi O.P., Kosheva V.O., Yansons M.O., Chubarev A.H., Marchuk O.S. // Pobudova kompleksnoi modeli rekonstruktsii shliakhoprovodu na osnovi obstezhennia z vykorystanniam BIM-tekhnologii // Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 83. - Kyiv, KNUBA, 2023. – S. 143-155.
13. Koshevyi O.P., Kosheva V.O., Yansons M.O., Chubarev A.H., Marchuk O.S. // Chyselne modeliuvannya prostorovoi modeli shliakhoprovodu dlia otsinky mitsnosti ta zhorstkosti na

osnovi obstezhennia z vykorystanniam rozrakhunkovoho kompleksu Lira // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 84. – Kyiv, KNUBA, 2023. – S. 171-180.

14. Koshevyi O.P., Kosheva V.O., Yansons M.O., Chubarev A.H., Marchuk O.S. // Chyselne modeliuвання napruzhenoho deformovanoho stanu mahistralnykh truboprovodiv v mistsiakh perekhodiv ta kompensatoriv pry kompleksnomu navantazhenni // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 85. – Kyiv, KNUBA, 2024. – S. 257-267.

15. Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Sovych Yu.V., Yansons M.O., Poshyvach D.V. // Chyselno-analitychnyi pidkhid do rozviazannia zadach nestatsionarnoi teploprovodnosti ne tonkoi kiltsevoi plastyny // Opir materialiv i teoriia sporud: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp.112 – Kyiv, KNUBA, 2024. - S. 185-194.

16. Koshevyi O.P., Kosheva V.O., Yansons M.O., Chubarev A.H., Marchuk O.S. // Chyselne modeliuвання temperaturnykh vplyviv na shliakhoprovid dlia stvorennia prostorovoi kompiuternoi modeli rekonstruktsii // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 112. – Kyiv, KNUBA, 2024. – S.161-169.

17. Koshevyi O.P., Yansons M.O., Lazareva M.V., Chubarev A.H., Smolenskyi A. // Chyselne modeliuвання prostorovoi modeli stanu poshkodzhеноho deviatypoverkhovoho budynku dlia otsinky mitsnosti ta zhorstkosti na osnovi rezultativ obstezhennia // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. - Vyp. 86. – Kyiv, KNUBA, 2024. – S. 314-328.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ.....	16
ВСТУП	18
Розділ 1. ВІСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ	26
1.1 Розрахункова модель для вирішення вісесиметричної задачі.....	26
1.2 Розвиток теорії та методів розрахунку вісесиметричних задач теорії пружності.....	32
1.2.1 Аналітичні та наближені методи.....	32
1.2.2 Чисельні методи.....	46
1.2.3 Комбіновані методи.....	51
1.2.4 Метод прямих та його розвиток.....	55
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1.....	59
Розділ 2. ПОСТАНОВКА ВИХІДНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ	62
2.1 Об'єкти дослідження та впливи на них.....	62
2.2 Вихідні рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат.....	66
2.3 Початкові і граничні умови.....	69
2.4.1 Плоска деформація. Перетворення рівнянь до задачі Коші.....	81
2.4.2 Перетворення рівнянь для зниження вимірності по осьовій координаті.....	85
2.4.3 Просторова задача, перетворення рівнянь для зниження вимірності.....	94
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2.....	98
Розділ 3. ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ДЛЯ ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ ЗАДАЧ	101
3.1 Головна ідея модифікованого методу прямих до зниження вимірності задач.....	101
3.2 Зниження вимірності вихідних рівнянь та граничних умов.....	102
3.2.1 Зниження вимірності по радіальній координаті.....	104
3.2.2 Зниження вимірності по коловій координаті.....	113
3.2.3 Зниження вимірності по осьовій координаті.....	119
ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ 3.....	127

Розділ 4. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НДС ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ	128
4.1 Загальна структура програмного забезпечення для дослідження НДС вісесиметричних задач.....	128
4.2 Тестування методики та програмного забезпечення на прикладі задачі про теплопровідність циліндру.....	132
4.3 Дослідження НДС трубопроводів при різних умовах кріплення з урахуванням всіх типів навантажень.....	137
4.4 Дослідження НДС тунелю метрополітену з урахуванням всіх типів навантажень.....	144
4.5 Результати впровадження роботи та перспективи розвитку.....	155
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4.....	158
ВИСНОВКИ.....	160
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	161
ДОДАТКИ.....	179

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

Основні буквені позначення величин:

1. НДС – напружено-деформований стан;
2. МСР – метод скінченних різниць;
3. ВРМ – варіаційно-різницевий метод;
4. МСЕ – метод скінченних елементів;
5. НМСЕ – напіваналітичний метод скінченних елементів;
6. МГЕ – метод граничних елементів;
7. МГП – метод граничних перетворень;
8. ЕОМ – електронно-обчислювальні машини;
9. ОЛЕ – зв’язування та впровадження об’єктів в інші документи та об’єкти.
10. СОМ – об’єктна модель компонентів;
12. $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$ - лінійні деформації;
13. $\varepsilon_{\theta r}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}$ - кутові деформації;
14. $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ - напруження;
15. λ, μ - коефіцієнти Ляме;
16. ν - коефіцієнт Пуассона;
17. X_r, X_θ, X_z - об’ємні сили;
18. k – жорсткість пружного стержня, що моделює взаємодію тіла з оточуючим середовищем;
19. ρ - щільність матеріалу;
20. E – модуль пружності матеріалу;
21. $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{якщо } i = j \\ 0 & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$ символ Кронеккера;
22. f^i - контрваріантні компоненти;
23. f_i - коваріантні компоненти;
24. g_{ij} - двічі коваріантний метричний тензор другого рангу;

25. g^{ij} двічі контрваріантний метричний тензор другого рангу;
26. $i, j, \alpha, \beta, \gamma$ - індекси пов'язані зі змінною u , при виконанні операцій проєкціювання;
27. $k, l, \varepsilon, \eta, \theta$ - індекси пов'язані зі змінною z , при виконанні операцій проєкціювання;
28. $Q_{rz}, Q_{\theta z}$ - поперечні зусилля.

ВСТУП

Актуальність теми.

Питання зменшення матеріаломісткості конструктивних елементів будівель, споруд, машин та механізмів, що працюють в умовах значних силових, температурних впливів і водночас забезпечення умов їх надійної експлуатації залишаються особливо важливим в сучасних умовах. Конструкції або частини конструкцій, що мають вісесиметричну геометрію, застосовуються в авіаційній, ракетній, космічній галузях, а також в машинобудуванні та будівництві. Зауважимо, що розрахунки параметрів деформування вісесиметричних тіл, які здійснюються на основі поширених двовимірних моделей, не завжди відповідають вимогам стосовно їх точності. Це пов'язане з використанням допоміжних гіпотез, за якими повинні бути враховані деформації поперечного зсуву та обтиснення тіл. Слід мати на увазі, що врахування таких деформацій є важливою складовою дослідження вісесиметричних тіл. Виникає необхідність створення підходів, які дозволять визначати компоненти напружено-деформованого стану на основі співвідношень просторової теорії пружності, для їх використання у розрахунках конструкцій вісесиметричної геометрії під силовим та температурним зовнішнім впливом. При цьому в алгоритмах та підходах до розрахунку таких конструкцій використовуються математичні моделі, які б найповніше враховували особливості просторових задач напружено-деформованого стану (НДС) конструкцій з вісесиметричною геометрією. Використання тривимірного підходу для розрахунку таких конструкцій, пов'язане із тим, що для оцінки міцності конструкцій, при силовому або температурному впливі, найточніший результат можна отримати лише з використанням всіх компонентів напруженого стану. З урахуванням складності розв'язку поставленої проблеми важливим аспектом при розробці підходів дослідження напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл в просторовій постановці є потреба паралельного використання чисельних та аналітичних методів, для економії розрахункового часу та збільшення точності отримуваних результатів. В представленій роботі, розв'язок задач на основі співвідношень просторової теорії пружності базується на

аналітичному методі Бубнова-Гальоркіна, де розв'язувальні функції задано у вигляді рядів Фур'є, та чисельному - дискретної ортогоналізації.

Як відомо несуча здатність конструкції може бути вичерпана за причини перевищення внутрішніми напруженнями деяких їх граничних значень, згідно проведеного аналізу огляду літератури стосовно дослідження напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл можливо зробити висновок, що проблеми тривимірного розрахунку НДС нетонких пластин та оболонок циліндричної форми та товстих оболонок при температурних впливах вивчені недостатньо. Водночас, на встановленні параметрів напружено-деформованого стану при температурних впливах, базується прогноз надійного функціонування такого типу конструкцій. Тобто ці питання представляють собою нагальну та особливо важливу проблему, що має як наукове так і прикладне значення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконувалась відповідно до наукових програм, тематики та загальних планів досліджень кафедри опору матеріалів Київського національного університету будівництва та архітектури. Наукові розробки знайшли застосування при реалізації науково дослідної роботи «Розробка чисельно-аналітичних методів розрахунку елементів конструкцій на силові, кінематичні, динамічні та температурні впливи» 30.06.18 0187/0118U002360 12.2023. Авторка приймала безпосередню участь у виконанні проєкту як співвиконавець.

Мета роботи.

Мета роботи полягає у розв'язанні важливої науково-технічної проблеми - створення на основі просторових співвідношень теорії пружності розрахункового підходу для проведення досліджень нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, та проведення на цій основі чисельного дослідження напружено-деформованого стану від дії зовнішніх силових факторів (розподіленого бокового, осьового тисків, дотичного зсувного зусилля, рівномірно розподіленого по торцю кручення, температурних впливів, тощо).

Основними задачами дослідження є:

- модифікувати варіаційний принцип, який ґрунтується на використанні методу Гамільтона в аналітичній механіці, стосовно виведення тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності тіла описують деформування нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних;

- привести тривимірні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних до одновимірних з використанням процедури методу Бубнова-Гальоркіна, за якою всі функції напружень і переміщень необхідно розкласти у подвійні тригонометричні ряди за коловим напрямком і вздовж твірної циліндра так, щоб вони задовольняли крайовим умовам;

- розробити алгоритми використання модифікованого методу прямих та комп'ютерне програмне забезпечення, яке дозволяє поєднати в єдиному обчислювальному процесі ці процедури та роботу розрахункового комплексу LIRA SAPR з визначення параметрів напружено-деформованого стану нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, при термосиловому навантаженні.

- дослідити та отримати нові дані щодо зміни напружено-деформованого стану нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, при різних комбінаціях дії зовнішніх силових та температурних факторів, що не викликають ніяких сумнівів стосовно їх достовірності;

- на основі розробленого комп'ютерного програмного забезпечення провести чисельне моделювання реальних конструкцій, зокрема визначення параметрів напружено-деформованого стану трубопроводів в місцях компенсаторів та переходів через перешкоди і тунелю метрополітену при екстремальних умовах експлуатації.

Об'єкт дослідження – процес деформування нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, що є конструкціями або елементами конструкцій та зазнають комбінованих зовнішніх впливів і вимагають точних розрахунків в будівельній галузі або суміжних до неї галузях сучасної техніки.

Предмет дослідження – параметри лінійного напружено-деформованого стану нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, від комплексної дії зовнішніх силових та температурних факторів.

Методи дослідження. Базуються на основних положеннях просторової теорії пружності з використанням чисельних та аналітичних методів. Виведення тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності, описують деформування нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, здійснюється при використанні модифікованого варіаційного принципу, який ґрунтується на використуваному в аналітичній механіці методі Гамільтона. Приведення тривимірних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних до одновимірних, у випадку розподіленого бокового тиску здійснюється при використанні процедури методу Бубнова-Гальоркіна. Подібне зменшення розмірності системи, при дослідженні напружено-деформованого стану у випадку осьового тиску та кручення, проводиться при використанні методу прямих. Узгодження результатів НДС отриманих методом прямих та методу Бубнова-Гальоркіна при розв'язанні задач осьового тиску та кручення проводиться з використанням методу дискретних перетворень Фур'є. Чисельний розв'язок отриманих одновимірних крайових задач НДС проводиться методом Рунге-Кутта з дискретною ортогоналізацією за С.К. Годуновим.

Наукова новизна одержаних результатів:

- *вперше модифіковано* варіаційний принцип, який ґрунтується на використуваному в аналітичній механіці методі Гамільтона, стосовно виведення тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності тіла описують деформування товстостінних і нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних;

- *вперше виконано* приведення тривимірних систем диференціальних рівнянь до одновимірних здійснено при використанні процедури методу Бубнова-Гальоркіна, за яким всі функції напружень й переміщень розкладаються у подвійні тригонометричні

ряди за коловим напрямком і вздовж твірної циліндра так, щоб вони задовольняли крайовим умовам;

- *удосконалено та розроблено* нову методику чисельного розрахунку напружено-деформованого стану, що дозволяють проводити визначення параметрів напружено-деформованого стану нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, поряд з сучасними програмними комплексами, і в той же час, отримувати дані, які не викликають ніяких сумнівів стосовно їх достовірності.

- *вперше розроблено* програмне забезпечення з використанням алгоритмів, на основі напіваналітичного модифікованого методу прямих, що працює в поєднанні з сучасним розрахунковим програмним комплексом LIRA SAPR та розв'язано нові задачі, щодо встановлення параметрів НДС стану трубопроводів в місцях компенсаторів та переходів через перешкоди і тунелю метрополітену при екстремальних умовах експлуатації та різних комбінаціях дії зовнішніх силових та температурних факторів,.

Обґрунтованість та достовірність основних положень та здобутих результатів забезпечується математичною коректністю постановки задач; узгодженням здобутих результатів розв'язку задач з приведеними в науковій літературі; застосуванням надійних методів чисельного та аналітичного інтегрування при розв'язанні лінійних однорідних і неоднорідних систем диференціальних рівнянь; збіжністю отриманих результатів при використанні чисельних методів та контролем їх точності, а також розв'язанням тестових задач та порівняння їх результатів з результатами інших авторів.

Практичне значення одержаних результатів. Практичне значення роботи полягає в розробці підходів та відповідних алгоритмів, що представлені в програмному забезпеченні і використовуються для чисельних розрахунків задач деформування нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних при різних комбінаціях дії зовнішніх силових та температурних факторів, з врахуванням різних граничних умов на основі тривимірних співвідношень теорії пружності. Результати роботи суттєво розширюють можливості використання

підходів будівельної механіки при впровадженні розробленого розрахункового підходу для розв'язку просторових задач вісесиметричних тіл.

В публікаціях, що підготовлені за участі співавторів, результати роботи здобувача вказані у списку опублікованих праць за темою дисертації.

Впровадження. Розроблений підхід і програмне забезпечення використовується в начальному процесі і виробничих підприємствах, що підтверджено відповідними довідками у додатку до дисертації, зокрема:

- впроваджені на кафедрі опору матеріалів Київського національного університету будівництва і архітектури: використані в проектно-конструкторських розробках кафедри при розрахунках відповідних конструкцій, а також у навчальному процесі кафедри;

- при проектуванні конструкцій багатоповерхових житлових будинків в м. Києві по проспекту Науки, а також для житлового комплексу в м. Вишгороді Київської області (ТОВ «Центрбудпроект»);

- при реконструкції та підсилення конструкцій торгівельного центру в м. Коломиї Івано-Франківської області, а також спорудження прибудови до існуючого промислового комплексу (ТОВ «ІТЦ ІВІК»);

Розроблений підхід та програмне забезпечення також можуть бути використані в проектно-конструкторських та наукових установах машинобудівної, енергетичної, будівельної та інших галузях господарства України при розрахунках відповідальних несучих елементів конструкцій.

Особистий внесок здобувача.

Формулювання наведених в дисертації наукових положень, отримання результатів, висновків і пропозицій здійснене авторкою самостійно та є її науковим доробком. У наукових працях, опублікованих у співавторстві з В.К. Чибіряковим, А.М. Станкевичем, О.П. Кошевим, Д.В. Левківським, авторці належить: [1-6] виведені редуковані рівняння модифікованого методу прямих, досліджено достовірність результатів, розроблено програмне забезпечення алгоритмічною мовою С++; [7-8] здійснена числова обробка результатів, перевірена точність та збіжність

методу для розв'язання прикладних задач; [9-10] виведені редуковані рівняння та граничні умови, проведена чисельна реалізація модифікованого методу прямих для вісесиметричних тіл від силових і температурних впливів, перевірена його точність та збіжність; [11-13] проведено чисельне моделювання прикладних задач, перевірена точність та збіжність методу; [14] розроблений підхід та виведені рівняння для розв'язання задач нестационарної теплопровідності вісесиметричних тіл; [15-16] проведено чисельне моделювання прикладних задач модифікованим методом прямих в поєднанні з використанням ПК LIRA SAPR.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи і результати досліджень доповідались і обговорювались на наступних конференціях:

- «73 науково-практична конференція КНУБА», 3-6 квітня 2012 р., м.Київ;
- «74 науково-практична конференція КНУБА», 9-13 квітня 2013 р., м.Київ;
- «Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА», 12-14 листопада 2013р., м.Київ;
- «75 науково-практична конференція КНУБА», 15-18 квітня 2014 р., м.Київ;
- «V Міжнародна конференція. Актуальні проблеми інженерної механіки», м. Одеса, 22-25 травня 2018 р.;
- «Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2021», м. Дніпро- м. Кам'янське 2021 р.

Публікації. Основні результати дисертаційних досліджень опубліковано в 17 наукових роботах, серед яких: три статті у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України, категорії «А», три з них у періодичному виданні, що індексується в науково-метричній базі Web of Science; тринадцять статей у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України, категорії «Б»; дві публікації у збірниках матеріалів та доповідей українських та міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, додатку і списку використаних джерел. Повний обсяг дисертаційної роботи становить 183 сторінки, в тому числі 140 сторінок основного

тексту, 70 рисунків, 3 таблиці, додатки на 4 аркушах і список використаних джерел із 210 найменувань на 19 сторінках.

Подяка. Висловлюю глибоку подяку науковому керівнику – завідувачому кафедри опору матеріалів, доценту **Кошовому Олександр Петровичу**. Також завдячую доценту кафедри опору матеріалів Морскову Юрію Андрійовичу, професору кафедри вищої математики **Чибирякову Валерію Кузьмічу** та всьому колективу кафедри опору матеріалів за неоціненну допомогу при написанні дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 1

ВІСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ

1.1 Розрахункова модель для вирішення вісесиметричної задачі.

Однією з основних форм елементів будівельних споруд та особливо машин та механізмів є тіло обертання. Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) таких елементів – важлива практична задача, яка виникає при комплексній дії зовнішніх впливів – як силових так і кінематичних та температурних.

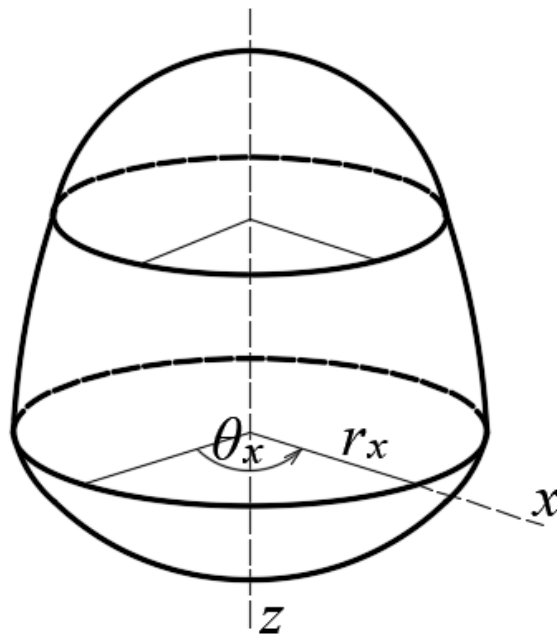


Рис. 1.1. Просте вісесиметричне тіло.

Статична задача для вісесиметричних тіл викликала особливий інтерес провідних спеціалістів з механіки деформованого твердого тіла. Дослідженням в цієї проблеми займалися відомі вчені – Г. Ляме, Б.П.Е. Клапейроном, А. Ляв, Д. Мічелл, Г. Хорвай, К.Т.С. Айенгар, С.П. Тимошенко, І.Н. Векуа, Л.В. Канторович, Л.П. Винокуров, Г.Г. Влайков, О.Я. Григоренко, Ю.М. Шевченко, В.А. Баженов, О.С. Сахаров, Л.Т Шкельов, В.К. Чибіряков, П.П. Лізунов , О.І. Гуляр, С.О. Пискунов,

Ю.В. Максимюк, І.І. Солодей, О.І. Безверхий, П.П. Гонтаровський – та дозволили сформулювати основні статичні задачі для вісесиметричних тіл і підходи до розв'язування цих задач.

Загальна задача дослідження статичного НДС тіл обертання традиційно поділяється на дві глобальні. Перша задача розглядає вісесиметричний характер НДС тіл обертання і називається вісесиметричною задачею. Друга задача виникає при деформуванні вісесиметричних тіл при не вісесиметричному навантаженні або при кососиметричному відносно центральної осі Oz характеру впливів – кручення стержнів змінного перерізу і використовується для дослідження НДС валів змінного перерізу.

Як відомо, елементи машин та механізмів часто знаходяться під дією не тільки статичних а й динамічних впливів. Оскільки головним апаратом дослідження статичного характеру НДС, як правило використовувались аналітичні методи, то їх поширення на динамічні задачі досить проблемне. Тому для врахування дії таких навантажень виникає необхідність для застосування чисельних або чисельно-аналітичних методів.

Слід зазначити, що динамічні впливи є суттєвими не тільки для елементів машин і механізмів, але і для будівельних конструкцій. Наприклад важливою є інформація про реакцію вісесиметричної споруди (наприклад кільцевого фундаменту під трубу при сейсмічних впливах; розповсюдження хвиль в навколишньому середовищі при забиванні палі в основу).

Зважаючи на це, побудова чисельно-аналітичної методики для розв'язування статичних та динамічних задач про дослідження НДС вісесиметричних тіл є актуальною.

Найбільший розвиток отримали дослідження вісесиметричного напруження тіл обертання або нескінченного простору і напівпростору. Вивчення вісесиметричного поля напружень є однією з найбільш розвинених областей теорії пружності, поступаючись досягнутим результатам лише плоскій задачі.

Вперше рівняння теорії пружності в циліндричних координатах були отримані Г. Ляме і Б.П.Е. Клапейроном у 1831 році [202]. Наразі ці рівняння входять в курс теорії пружності.

При розгляді тіла обертання у циліндричній системі координат отримуємо рівняння в яких переміщення виглядають таким чином, що можна розділити їх і розглянути як дві окремі задачі. Перша задача відповідає крученню стержнів змінного перерізу. Друга – випадок напруженого стану тіл обертання, що і називають вісесиметричною задачею.

Вирішення вісесиметричної задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги з подальшим задовольнянням умов на поверхні тіла. Існує велика кількість варіацій отримання рішення таких задач.

Одна з варіацій – визначати переміщення шляхом вирішення рівнянь у формі, що відповідає конкретній задачі [98][106] (наприклад, у формі множення функцій координат). Після чого підбирати коефіцієнти цих виразів таким чином, щоб задовільнити рівняння статички [85], а переміщення, що отримуються в результаті, будуть відомими в усіх точках тіла обертання при вісесиметричному навантаженні.

Також рішення можна звести до визначення деяких введених певним чином допоміжних функцій напружень, попередньо виразивши переміщення і всі компоненти тензора напружень через ці функції. Такі функції, які є рішенням вісесиметричної задачі, були введені Лявом і Мічелем, а також можуть бути отримані з загальних рішень рівнянь теорії пружності Галеркіна і Бусинеска-Гродського-Нейбера-Папковича. Основні форми функції напружень викладені в оригінальних роботах науковців і входять до курсу теорії пружності [169].

Розглянемо основні підходи і типи задач, вишукуванням яких займаються.

Розв'язок вісесиметричної задачі в криволінійних координатах. Для отримання рішень в багатьох випадках вісесиметричного навантаження тіл обертання раціональним є введення криволінійних ортогональних ізометричних координат – сферичних, еліптичних, параболічних тощо. Якщо контур в осьовому перерізі тіла обертання співпадає з однією з координатних ліній, то запис граничних умов

спрощується, це значно полегшує вибір функцій напружень для рішень, що визначені в тій самій системі координат.

Деформації циліндрів (рішення в поліномах, циліндричних функціях, деформації циліндрів середньої довжини та інші). Вивченню напружено-деформованого стану пружних круглих циліндрів присвячена велика кількість вишукувань. Першими розглянули таку задачу Г. Ляме і Б.П.Е. Клапейрон [202]. Розгляд рівноваги циліндрів в загальному випадку навантаження розглянуто в низці робіт Л. Похгаммера, К. Кри, В.А. Стрелкова, Б.Г. Галеркіна. Рішення вісесиметричних задач приведені в роботах К. Кри, Л. Файлона, Ф. Персера, Л. Фепплъ, А.П. Коробова, Т.С. Шапіро., Б.Л. Абрамяна, А.Ф. Улітко, В.Т. Гринченко, Г.М. Валова, В.З. Васильєва та інших. Велика кількість результатів в часткових випадках навантажень суцільних і порожнистих циліндрів наведено в [86]. Спеціалізовані схеми запропоновані Н.А. Шиффом [208], А.І. Лур'є [102, 103], Г.Н. Бухариновим [25, 26], В.К. Прокоповим [140-144], Г.Н. Положий [138], А.Я. Александровим і Ю.І. Соловійовим [18]. Рішення задач анізотропних циліндрів і термопружності представлені в роботах С.Г. Лехницького В. Новацького [119, 120].

Використання до вирішення задач про навантаженнях циліндрів певних функцій напружень дозволяє точно визначати граничні умови тільки на частині бокової поверхні тіла, на циліндричній або на торцевій. Через це напруження і переміщення, отримані в результаті розрахунків, є наближеними.

Розбіжність тим більша чим ближче до одиниці співвідношення діаметру циліндра і його утворюючої. Якщо співвідношення мале (довгі циліндри) використання функції призведе до точних значень напружень і переміщень в середній частині циліндра, оскільки згідно з принципом Сен-Вінана характер розподілення зовнішніх сил на торцевих поверхнях не впливає на напружений стан цієї частини. Якщо діаметр значно перевищує утворюючу циліндра, в зонах достатньо віддалених від циліндричної поверхні, напруження і переміщення, отримані при використанні функцій, будуть мало відрізнятися від точних.

Типовий розрахунок передбачає або укорочення нескінченної системи рівнянь, або послідовне поетапне наближення до значень напружень і переміщень, що задані на поверхні циліндру [1-4, 67-68].

Рішення задач вісесиметричної деформації циліндрів з точним виконанням граничних умов на всій поверхні – по торцевій і циліндричній площинах наведені в [1-4, 29-32, 137, 200, 201].

Процес вирішення задачі при асиметричному навантаженні циліндрів з точним виконанням граничних умов, як на циліндричних, так і на торцевих поверхнях повторює процес вирішення при симетричному навантаженні, різниця лише в заміні одних тригонометричних і гіперболічних функцій іншими і в знаках деяких рівнянь рівноваги. Основні рівняння, що відповідають такому типу умов можна знайти [68][29-31].

Згин круглих плит. Розглядаючи деформації циліндрів, довжина утворення яких менша за радіус – товстих круглих і кільцевих плит, в задачах обмежуються частково точним виконанням граничних умов – тільки на плоских поверхнях плити. Статичні умови на циліндричній поверхні виконуються в інтегральному сенсі, кінематичні – заданням переміщень точок по деяких кільцях цієї поверхні. Така постановка задачі практично прийнята, оскільки при відношенні діаметру плити до її висоти більше трьох, значення найбільших напружень отримуються досить точно. Крім того, уточнення граничних умов на опорах плити потребує вивчення характеру конструктивного виконання опор і їх пружних властивостей. Проблема точного виконання контурних умов на опорах актуальна в однаковій мірі для товстих і для тонких плит, оскільки розподілення напружень біля границь плити має локальний характер, так само як і розподілення напружень на кінцях довгих стержнів.

При нелінійних розрахунках оболонок і пластин В.А. Баженов, О.С. Сахаров, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк використали моментну схему скінченних елементів (МССЕ) створивши оболонковий СЕ загального типу, що дозволив проводити аналіз НДС вісесиметричних оболонок і пластин в задачах фізичної і геометричної нелінійності. Розроблена методика дозволила з високою

точністю визначити НДС тонкостінних конструкцій у фізичній і геометрично нелінійній постановках при використанні одного СЕ по товщині [12]. Також у статті [10] В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Шевченко Отримали розрахункові співвідношення неоднорідних незамкнених тіл обертання з довільними граничними умовами, які забезпечують високу ефективність підходу при використанні косокутних скінченних елементів для побудови дискретних моделей об'єктів складної конфігурації меридіального перетину.

П.П. Лізунов, Е.З. Криксунов, О.М. Фесан займались питанням НДС у замкнених конічних оболонках при складному обертанні. У статті [99] були наведені співвідношення, що визначають НДС системи двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.

О.І. Безверхий, Л.О. Григор'єва у статтях [14, 15]. Дослідили реакції п'єзокерамічних осьових датчиків з чутливим елементом в формі круглих та кільцевих пластин на імпульсне механічне навантаження. Визначили електрорушійну силу п'єзокерамічних поляризованих по товщині пластин при механічному навантаженні, прикладеному паралельно до напрямку поляризації. Розглянули планарні нестационарні осесиметричні коливання пластини, що виникають при цьому. Проаналізували зміну динамічних характеристик електромеханічного стану п'єзокерамічної пластини, встановили залежність характеру нестационарних коливань від навантаження та відношення радіусів пластини при імпульсному навантаженні. Проаналізували зміну ЕРС датчика в процесі реакції на нестационарне збурення.

Вишукуванню напружено-деформованого стану товстих плит присвячено багато робіт науковців. Початок був покладений Сен-Венаном [199]. Теорія товстих пластин отримала розвиток в роботах Мічелла [204] і Лява [106]. Рішення для задач такого типу розглянуті в роботах [102-103], у [4] наданий детальний розбір робіт 241 автора що займались задачами такого типу.

1.2 Розвиток теорії та методів розрахунку вісесиметричних задач теорії пружності.

Напружено-деформований стан твердих тіл є актуальною задачею математичної фізики. Як відомо НДС твердих тіл можна описати диференціальними рівняннями в циліндричних координатах і вирішити саму задачу. Загалом, на початку розв'язок задач по визначенню НДС твердого тіла історично виконувався математичними аналітичними і наближено аналітичними методами, але для інженерних вишукувань була необхідна більша точність, тому виникли чисельні методи їх вирішення. Але чисельні методи також мають певні недоліки, через це у сучасній науці набувають актуальності комбіновані чисельно-аналітичні методи. Проведемо огляд літератури, методів розв'язування таких задач.

1.2.1 Аналітичні і наближені аналітичні методи

Метод Фур'є або метод розділення змінних – це техніка розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними, що застосовується в основному для лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами які мають однорідні початкові або крайові умови.

Основна ідея методу полягає в тому, щоб розкласти розв'язок диференціального рівняння у вигляді суми тригонометричних функцій, зазвичай синусів та косинусів (тобто використовуючи розклад Фур'є), та потім знайти коефіцієнти цього розкладу, використовуючи початкові або крайові умови.

Наприклад, якщо ми маємо диференціальне рівняння у вигляді:

$$d^2u / dx^2 + \lambda u = 0; \quad (1.1)$$

де λ - деяка константа, і маємо крайові умови, наприклад, $u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$, то можна розкласти розв'язок у вигляді:

$$u(x) = \sum [A_n \sin(n\pi x / L)] + B_n \cos(n\pi x / L); \quad (1.2)$$

де A_n і B_n - коефіцієнти розкладу Фур'є, L - довжина відрізка, на якому вирішується задача.

Після розкладу ми можемо знайти коефіцієнти A_n і B_n , використовуючи крайові умови, і підставити їх назад у розклад, щоб отримати розв'язок.

Метод Фур'є є потужним інструментом для розв'язування диференціальних рівнянь, оскільки дозволяє знайти точний розв'язок для широкого класу задач, включаючи неоднорідні рівняння та рівняння зі змінними коефіцієнтами. Однак, для деяких задач розклад Фур'є може бути складним або навіть неможливим.

Переваги методу Фур'є:

- ефективність: дозволяє швидко та ефективно розкласти складні функції на простіші складові. Це робить його корисним для розв'язання різноманітних математичних задач, таких як диференціальні рівняння, обчислення інтегралів та інших;
- універсальність: можна застосовувати до будь-яких періодичних функцій. Це означає, що його можна застосовувати в багатьох різних областях, таких як фізика, інженерія, електротехніка та інші;
- висока точність: розкладання може дати дуже точні результати, що дозволяє використовувати його для розв'язання складних математичних задач.

Недоліки методу Фур'є:

- обмеження періодичності: можна використовувати тільки для періодичних функцій. Якщо функція не є періодичною, то метод Фур'є не може бути застосований;
- чутливість до «шумів»: може бути чутливим до «шуму» в даних. Навіть невеликі зміни в даних можуть призвести до значних змін у результатах розкладання;
- вимоги до обчислювальних ресурсів: вимагає великої кількості обчислювальних ресурсів для розрахунків;

Метод Пікара або послідовних наближень – це числовий метод розв'язання диференціальних рівнянь, який використовується для знаходження аналітичних розв'язків в деяких випадках.

Ідея методу Пікара полягає в тому, щоб знайти послідовні наближені розв'язки диференціального рівняння шляхом ітерацій. Кожен наступний член послідовності отримується шляхом взяття інтегралу від попереднього члена і додавання початкової умови.

Нехай маємо диференціальне рівняння виду:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0; \quad (1.3)$$

де f - функція, яка задає диференціальне рівняння, y_0 - початкова умова, а x_0 - початкова точка. Припустимо, що ми можемо розв'язати це рівняння для початкової умови $y(x_0) = y_0$.

Перший член послідовності методу Пікара дається наступним чином:

$$y_1(x) = y_0 + \int [x_0, x] f(t, y_0) dt; \quad (1.4)$$

другий член послідовності дається як:

$$y_2(x) = y_0 + \int [x_0, x] f(t, y_1(t)) dt; \quad (1.5)$$

і так далі, доки ми не отримаємо достатньо точний розв'язок.

Зауважимо, що метод Пікара вимагає, щоб функція $f(x, y)$ була лінійною по y в кожному інтервалі ітерації. Якщо функція не є лінійною, метод може дати неточний результат або навіть збігатися до неправильного розв'язку.

Метод Пікара може бути особливо корисним, коли інші методи чисельного розв'язування диференціальних рівнянь не працюють або коли ми хочемо отримати наближене рішення диференціального рівняння у вигляді функції, що представлена аналітично. Але аналітичність правої частини диференціального рівняння не

обов'язкова, тому цей метод можна застосовувати і в тих випадках коли розкладання рішення диференційного рівняння в степеневий ряд неможливе. На практиці метод Пікара застосовують дуже рідко тому, що інтеграли, які необхідно вираховувати при побудові чергових наближень, як правило аналітично не визначаються. Для їх визначення необхідно застосовувати чисельні методи, що значно ускладнює рішення. Простіше застосовувати інші методи, що з самого початку є чисельними.

Переваги методу Пікара:

- простота: є досить простим у використанні і не потребує складної математики. Це дозволяє використовувати його для розв'язання багатьох різних задач, включаючи ті, що не мають аналітичного розв'язку;
- висока точність: може дати дуже точні результати для диференціальних рівнянь з невеликою початковою похибкою. Це зробило його популярним в багатьох областях, таких як фізика, інженерія та математика;
- гнучкість: можна застосовувати до різних типів диференціальних рівнянь, включаючи лінійні та не лінійні.

Недоліки методу Пікара:

- обмеження на точність: може бути не точним для диференціальних рівнянь з великою початковою похибкою. У таких випадках можуть бути необхідні інші чисельні методи для отримання більш точного розв'язку;
- залежність ряду: результати залежать від ряду, який використовується для розкладання функції. У деяких випадках ряд може бути складним для обчислення, що може призвести до зниження точності;
- не універсальність: не може бути застосованим до деяких диференціальних рівнянь.

Метод степеневих рядів - це метод знаходження аналітичного розв'язку диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду. Цей метод заснований на ідеї того, що будь-який гладкий розв'язок диференціального рівняння можна представити у вигляді нескінченного степеневого ряду.

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду:

$$y'(x) = f(x, y(x)); \quad (1.6)$$

Знаходимо його розв'язок у вигляді степеневому ряду, де коефіцієнти ряду будуть функціями невідомої змінної $y(x)$:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.7)$$

Підставимо цей ряд у вихідне диференціальне рівняння та складемо ряд для похідної $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots; \\ f(x, y(x)) &= f\left(x, a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots\right) = \\ &= f(x, a_0) + f_y(x, a_0)a_1(x - x_0) + \dots; \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для того, щоб узгодити коефіцієнти у ряді для похідної з коефіцієнтами у ряді для функції $f(x, y(x))$, порівнюємо кожен член за коефіцієнтом при x відповідної степені:

$$a_1 = f(x_0, a_0) \cdot 2a_2 = f_y(x_0, a_0) \cdot a_1 \cdot 3a_3 = \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, a_0) a_1^2 + f_{xy}(x_0, a_0) a_1; \quad (1.9)$$

Таким чином, можна отримати коефіцієнти a_1, a_2, a_3 і т.д., застосовуючи рекурсивні формули на кожному кроці. Знайдений степеневий ряд може бути зібраний у вигляді аналітичної функції.

Початок використання даного методу для зниження вимірності рівнянь теорії пружності для товстих пластин викладено у роботах Лур'є А.І. [102-103], Кільчевського М.О. [82], Власова В.З. [51]. Разом Кільчицька Г.А. та И.Т. Селезов І.Т. [149] побудували редуковані двовимірні рівняння динаміки і динамічної зв'язаної

термопружності товстих пластин постійної товщини. При зниженні вимірності дані рівняння мали проблему використання методу однорідних рішень в теорії товстих пластин. Вже в роботах Воровича І.І. та його учнів [56-58] однорідні рішення використовуються для перетворення вихідних рівнянь, при побудові рішення використаний асимптотичний метод.

Переваги методу степеневих рядів:

- гнучкість: може бути застосований до різних типів диференціальних рівнянь, включаючи лінійні та не лінійні. Це робить його універсальним методом для розв'язання багатьох задач;
- точність: може дати дуже точні результати для диференціальних рівнянь з невеликою початковою похибкою. Це зробило його популярним в багатьох областях, таких як фізика, інженерія та математика;
- аналітичність: може дати аналітичний розв'язок диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду. Це дозволяє отримувати точні формули для функцій, що виникають у диференціальних рівняннях.

Недоліки методу степеневих рядів:

- обмежена застосовність: може бути не застосовний для деяких диференціальних рівнянь, особливо тих, які мають суттєві особливості на відрізку, на якому вишукується розв'язок;
- складність обчислень: розвиток степеневого ряду може бути досить складним для деяких функцій. Крім того, ітераційний процес потребує багато обчислень, що може затримати отримання результату.

Метод Адамса – це числовий метод для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку або систем з такими рівняннями. Цей метод можна використовувати як для однокрокових, так і для багатокрокових задач.

Він базується на ідеї інтегрування за допомогою формули прогнозу та корекції. Формула прогнозу використовується для розрахунку значень функції на наступному кроці, а формула корекції дозволяє виправити отримані значення з урахуванням похибки.

Для застосування методу Адамса спочатку необхідно знайти початкові значення функції на першому кроці за допомогою якогось іншого числового методу, наприклад, методу Рунге-Кутта. На кожному наступному кроці необхідно знати значення функції на двох попередніх кроках. Ці значення використовуються для розрахунку коефіцієнтів, які використовуються в формулі прогнозу та корекції.

У багатокрокових методах Адамса використовуються додаткові попередні кроки для розрахунку коефіцієнтів. Це дозволяє отримати більш точний результат, але при цьому метод стає складнішим.

Ще однією важливою рисою методу Адамса є його стійкість. Якщо параметри методу обрані правильно, то він буде стійким, тобто результати не будуть розходитись.

Метод Адамса є ефективним методом для розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку або систем з такими рівняннями, і він знаходить застосування в різних областях науки і техніки [13, 18].

Переваги методу Адамса:

- ефективність: є ефективним методом для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь з відомими початковими умовами. Він зазвичай працює швидше, ніж інші методи, такі як метод Рунге-Кутта;
- гладкість: є гладким методом, тому що він використовує попередні значення розв'язку для апроксимації наступного значення. Це дозволяє забезпечити стійкість методу і зменшує його чутливість до початкових значень;
- адаптивність: може бути адаптивним, тобто він може змінювати свій порядок точності в залежності від потреби. Це зменшує кількість обчислень, які потрібні для отримання достатньо точного розв'язку.

Недоліки методу Адамса:

- нестійкість: може бути нестійким для деяких типів диференціальних рівнянь. Це може призвести до відхилень у розв'язку, які зростають з часом;

- чутливість до початкових значень: може бути досить чутливим до початкових значень, особливо для високих порядків точності. Це може призвести до неточностей у розв'язку, які збільшуються з часом;
- обмежена застосовність: для деяких типів диференціальних рівнянь, може бути менш ефективним, наприклад для диференціальних рівнянь зі значенням параметрів, що швидко змінюються з часом або мають різні порядки величин.

Метод Ейлера – це один з найпростіших і найбільш поширених чисельних методів для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Основна ідея методу полягає в тому, щоб апроксимувати функцію, яку необхідно розв'язати, шляхом заміни її похідної на скінчену різницю, взяту у певній точці. Це дає можливість отримати ітераційну формулу, яка дозволяє розв'язати диференціальне рівняння за допомогою послідовності розрахунків.

Явний метод Ейлера полягає в тому, що на кожному кроці інтегрування ми використовуємо значення функції на поточному кроці та її похідну, обчислену в цій же точці. Формула для явного методу Ейлера виглядає наступним чином:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n); \quad (1.10)$$

де y_n - апроксимація розв'язку на попередньому кроці, y_{n+1} - апроксимація розв'язку на поточному кроці, $f(t_n, y_n)$ - значення похідної у точці (t_n, y_n) , h - крок інтегрування.

Неявний метод Ейлера полягає в тому, що на кожному кроці інтегрування ми використовуємо значення функції на поточному кроці та її похідну, обчислену в наступній точці. Формула для неявного методу Ейлера виглядає наступним чином:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (1.11)$$

Переваги методу Ейлера:

- простота реалізації: є одним з найбільш простих чисельних методів для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Це робить його дуже привабливим для початківців у чисельному аналізі та програмуванні;
- низькі вимоги до обчислювальної потужності: використовує прості арифметичні операції, що дозволяє йому працювати на малопотужних комп'ютерах;
- швидкість розв'язання: може бути дуже швидким, особливо для простих диференціальних рівнянь.

Недоліки методу Ейлера:

- нестійкість: якщо крок інтегрування занадто великий, може стати нестійким і призвести до нефізичних розв'язків;
- неточність: може бути неточним для складних диференціальних рівнянь, особливо якщо крок інтегрування занадто великий;
- обмежена точність: має обмежену точність порівняно з більш складними чисельними методами, такими як метод Рунге-Кутта або метод Адамса;
- неможливість розв'язувати деякі диференціальні рівняння: не може бути застосований до деяких класів диференціальних рівнянь, таких як рівняння зі змінною структурою [71].

Метод Рунге-Кутта – є модифікацією методу Ейлера, що використовує схеми другого порядку точності. Але найбільше широкого використання знайшов метод 4-го порядку. Геометрично методом Рунге-Кутта на кожному кроці інтегрування спочатку визначається напрям поля, а потім середина відрізка з таким же напрямком. Він забезпечує високу точність розрахунків задачі Коші, але потребує великих обчислювальних затрат оскільки для його застосування на кожному кроці інтегрування потрібно визначити напрям поля в чотирьох точках. Цей метод є універсальним і здатним до розв'язання різних класів звичайних диференціальних рівнянь з різними початковими умовами та параметрами.

Перевагою методу Рунге-Кутта є його висока точність порівняно з методом Ейлера та іншими простішими методами чисельного інтегрування. Це досягається за

допомогою використання кількох кроків інтегрування та серії корекцій, що дозволяє досягти високої точності при малій кількості кроків.

Але в методі Рунге-Кутта є складність його реалізації, порівняно з методом Ейлера. Для реалізації методу Рунге-Кутта потрібно виконати більше обчислень та математичних операцій.

На відміну від методу Ейлера, метод Рунге-Кутта є стійким до зміни розміру кроку інтегрування, що дозволяє використовувати його для розв'язання більш широкого спектру диференціальних рівнянь з різними характеристиками. Він є дуже ефективним чисельним методом для розв'язання ЗДР. Його висока точність та стійкість роблять його дуже привабливим для багатьох задач у науці, техніці та інженерії.

Переваги методу Рунге-Кутта:

- висока точність: зазвичай має вищу точність порівняно з простішими методами чисельного інтегрування, такими як метод Ейлера;
- гнучкість: дозволяє змінювати розмір кроку інтегрування, що дозволяє знайти розв'язок звичайних диференціальних рівнянь з високою точністю при різних значеннях часу та параметрів;
- універсальність: може бути використаний для розв'язання різних класів звичайних диференціальних рівнянь з різними початковими умовами та параметрами;
- ефективність: може бути ефективно реалізований для багатьох задач, включаючи складні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь.

Недоліки методу Рунге-Кутта:

- високі вимоги до обчислювальних ресурсів: вимагає значно більшої кількості обчислень та математичних операцій, порівняно з простішими методами чисельного інтегрування;
- складність реалізації: може бути складнішим для реалізації порівняно з простішими методами чисельного інтегрування, такими як метод Ейлера;

- можлива нестійкість: може бути нестійким для деяких класів звичайних диференціальних рівнянь зі специфічними характеристиками, тому потрібно звернути увагу на відповідність методу тим задачам, які потрібно розв'язати.

Модифікований метод Ейлера (з перерахунком) – другого порядку точності, для його реалізації необхідно два рази визначати праву частину функції, його розглядають, як один з варіантів методів Рунге-Кутта.

Основна відмінність між методом Ейлера та модифікованим методом Ейлера полягає в тому, як обчислюються значення функції на наступному кроці часу. У методі Ейлера значення функції обчислюється з використанням значення похідної функції у поточний момент часу, тоді як у модифікованому методі Ейлера значення похідної функції обчислюється на півкроці часу. За допомогою модифікованого методу Ейлера можна отримати більш точні результати, ніж за допомогою звичайного методу Ейлера, оскільки він дозволяє отримувати більш точні оцінки значення функції на наступному кроці часу. Однак, модифікований метод Ейлера є більш складним за звичайний метод Ейлера, оскільки він вимагає обчислення значення похідної функції на півкроці часу.

Крім того, в залежності від конкретних вимог задачі, один метод може бути більш ефективним за інший. Наприклад, звичайний метод Ейлера може бути більш ефективним для задач з низькими вимогами до точності, тоді як модифікований метод Ейлера може бути кращим для задач з високими вимогами до точності.

Переваги модифікованого методу Ейлера:

- простота: легко реалізується та використовується для чисельного розв'язування звичайних диференціальних задач. Крім того, цей метод є достатньо ефективним для чисельного розв'язування звичайних диференціальних задач з невисокими вимогами до обчислювальних ресурсів;
- можливість обчислення значень функції та її похідної на поточному кроці часу. Це дозволяє використовувати цей метод для розв'язання звичайних диференціальних задач, які мають відомі значення похідної функції.

Недоліки модифікованого методу Ейлера:

- обмежена точність: порівняно з іншими методами, такими як метод Рунге-Кутта, це означає, що модифікований метод Ейлера може бути менш ефективним для задач з високою точністю;
- не стійкість: для деяких типів звичайних диференціальних задач може виникати нестійкість, якщо рівняння містить дуже великі значення похідної функції або якщо крок часу вибирається недостатньо малим. У таких випадках розв'язок може зійтися до невірних значень.

Метод колокації (інтерполяційний метод) – наближене рішення граничної задачі будується у вигляді лінійної комбінації базисних функцій, при цьому коефіцієнти такої лінійної комбінації вибираються з умови співпадіння (на деякій внутрішній сітці) наближеного рішення з точним рішенням диференційної задачі. Реалізація такого підходу приводить до необхідності вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів в конструкції (в лінійній комбінації базисних функцій), що визначає вид наближеного рішення задачі Коші.

Загальна ідея методу полягає в тому, що для диференціального рівняння з відомими початковими умовами вибирається деяка множина точок (відомих як "колокаційні точки") на відрізку, де має бути знайдений розв'язок рівняння. Далі, розв'язок диференціального рівняння інтерполюється в цих точках за допомогою базисних функцій.

Переваги методу колокації (інтерполяційного методу):

- універсальність: може бути застосований для розв'язання широкого спектру диференціальних рівнянь різних типів, включаючи лінійні та нелінійні, зі змінними та незмінними коефіцієнтами, одновимірні та багатовимірні, з частинними похідними вищих порядків та інші;
- простота реалізації: є досить простим і легко реалізовується на комп'ютері;
- гнучкість: дозволяє використовувати різні види базисних функцій, що дає змогу адаптувати метод до конкретних потреб.

Недоліки методу колокації (інтерполяційного методу):

- залежність від розташування колокаційних точок: точність розв'язку залежить від розташування колокаційних точок. Якщо точки розташовані занадто густо або занадто рідко, то це може призвести до появи високочастотних чи низькочастотних ефектів, які можуть бути неточними;
- обчислювальні затрати: може вимагати значної кількості обчислювальних ресурсів при застосуванні до складних диференціальних рівнянь або при використанні великої кількості колокаційних точок;
- врахування крайових умов: не завжди забезпечує точне врахування крайових умов, що може призводити до неточності розв'язку у крайових точках.

Метод найменших квадратів використовується для знаходження оптимальних параметрів лінійної регресії, таких, що сума квадратів помилок (регресивних залишків) мінімальна. Метод полягає в мінімізації евклідової відстані між двома векторами – вектором відновлених значень залежної перемінної [168].

Зазвичай метод найменших квадратів використовують для розв'язання задач, пов'язаних з регресією. Регресія - це статистичний метод для вивчення залежності між двома або більше змінними. Якщо одна з цих змінних вважається залежною, то інші змінні називаються незалежними.

Для використання методу найменших квадратів, зазвичай потрібно мати набір даних, який складається з пар змінних, де одна змінна є незалежною, а інша - залежною. Метод найменших квадратів обчислює параметри лінійної моделі, яка найкращим чином апроксимує залежну змінну від незалежної змінної.

У методі найменших квадратів вишукується лінійна модель у вигляді:

$$Y = a + bX$$

де Y - залежна змінна, X - незалежна змінна, a та b - параметри, які потрібно знайти. Ці параметри обчислюються таким чином, щоб було знайдено мінімальну середньоквадратичну помилку апроксимації моделі до даних.

Переваги методу найменших квадратів:

- універсальність: можна використовувати для розв'язання більшості задач, пов'язаних з регресією та аналізом даних;

- простота використання: досить простий у використанні, тому що він базується на звичайних математичних операціях, таких як множення та додавання;
- надійність: дає надійні результати, коли дані мають випадкові похибки та шум;
- використовується для побудови моделей: можна використовувати для побудови моделей, що дають можливість передбачити значення залежної змінної для заданого значення незалежної змінної.

Недоліки методу найменших квадратів:

- чутливість до «викидів»: чутливий до «викидів», тобто до значень, що суттєво відхиляються від загальної тенденції даних. Це може призвести до неправильного визначення параметрів моделі та значень залежної змінної;
- залежність від вибору моделі: добре працює лише для лінійних моделей. Для складніших моделей можуть знадобитись більш складні методи;
- недостатня кількість даних: не може дати надійних результатів, якщо в наборі даних недостатня кількість точок.

Метод Гальоркіна як і в методі колокації наближене рішення також знаходиться у вигляді лінійної комбінації базисних функцій, коефіцієнти якої вибираються з умови мінімізації нев'язки, що обумовлюється заміною точного рішення диференційної задачі наближеним рішенням. В теорії методу Гальоркіна доводиться, що для забезпечення мінімальної нев'язки в середньому, потрібно щоб вона була ортогональна до базисних функцій, які використовуються для побудови наближеного рішення [38, 70].

Метод Гальоркіна вимагає обрання певного набору базисних функцій, які повинні задовольняти певним властивостям, щоб забезпечити збіжність методу. Зазвичай в якості базисних функцій використовуються поліноми Лежандра, Чебишева або Бесселя.

Для використання методу диференціальне рівняння спочатку записується у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма, з ядром, яке містить функцію, що потрібно знайти. За допомогою методу Гальоркіна це інтегральне рівняння можна

наблизити, за допомогою лінійної комбінації базисних функцій, до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати для коефіцієнтів лінійної комбінації.

Переваги методу Гальоркіна:

- універсальність: метод можна застосувати для розв'язання різних типів диференціальних рівнянь, включаючи нелінійні та часткові рівняння. Метод також забезпечує високу точність розв'язку за рахунок використання базисних функцій, які можна вибрати залежно від властивостей розв'язку;
- можливість використовувати низькорангові матриці, що зменшує витрати на обчислення та пам'ять комп'ютера.

Недоліки методу Гальоркіна:

- чутливість: може бути чутливим до неправильного вибору базисних функцій, що може призвести до неточності розв'язку. Крім того, метод може бути витратним на обчислення, особливо для складних диференціальних рівнянь;
- збіжність: не завжди забезпечує збіжність розв'язку, особливо для нелінійних рівнянь, інколи потрібна зміна методу на інший.

1.2.2 Чисельні методи

Сучасний рівень розвитку науки і технологій визначив специфіку розрахунку конструкцій, на даному етапі у будівельній механіці переважають чисельні методи розрахунку конструкцій. Чисельні методи є наближеними. Замість того щоб аналітично визначати складні функції, що задовольняють диференціальним рівнянням і граничним умовам, вводять набір відомих простих (часто - частково-безперервних) базисних функцій. За допомогою даних функцій знаходять похідні, що входять в диференціальні рівняння або до виразу механічної енергії досліджуваного об'єкта. В результаті безперервна функція одного або декількох аргументів представляється її значеннями в деяких точках (вузлах), а операції аналізу безперервних функцій замінюються алгебраїчними діями зі значеннями функцій в обраній сітці вузлів. Таким чином, чисельні методи переводять рішення фізико-математичних задач до

найпростіших обчислювальних процедур, які виконуються, як правило, за допомогою ЕОМ.

Метод скінченних різниць. Метод скінченних різниць (МСР) є наближеним методом розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь. Його ще називають методом «сіток». Суть методу наступна: на дану область (вісь стрижня, серединну поверхню оболонки або об'ємне тіло) наноситься сітка вузлів (відповідно одновимірну, двовимірну або тривимірну). Похідні, які входять у диференціальні рівняння, що описують деформування елементів будівельних конструкцій, і крайові умови наближено замінюються відповідними різницевиими співвідношеннями за формулами чисельного диференціювання. Але при використанні даного підходу виникають законтурні функції, які зменшують точність розрахунку та обмежують область застосування методу. У результаті задача зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій невідомими величинами є значення шуканих функцій у вузлах створеної сітки. Розв'язуючи дану систему визначаються наближені чисельні значення шуканих функцій переміщень та напружень.

Суттєва перевага методу скінченних різниць по відношенню до інших чисельних методів - це мала залежність використовуваного алгоритму від виду диференціальних рівнянь і крайових умов задачі. Недолік же полягає в тому, що доводиться вирішувати системи алгебраїчних рівнянь високих порядків. Цей недолік пом'якшується тим, що матриці систем рівнянь - неповністю заповнені (стрічкові). Метод скінченних різниць також важко використовувати при вирішенні завдань про сполученні конструкцій різної розмірності (наприклад, оболонок і об'ємних тіл), багатозв'язних (з вирізами), при змішаних граничних умовах і т.д.

Перші розрахунки методом «сіток» показали, що апроксимація не забезпечує збіжність розв'язків при зменшенні кроку сітки, як було у перше показано в роботі Р. Куранта, К. Фрідрікса і Г. Леві [94], де вони розглянули крайові задачі і теорію власних значень для еліптичних різницевих рівнянь і задачу Коші для гіперболічних і параболічних різницевих рівнянь. Роботами з оцінкою розв'язку різницевих рівнянь займались Л.А. Люстернік, що використав метод «сіток» для розв'язання задачі

Дирихле [104], Р. Курант, К. Фрідріхс і Г. Леві [94], І.Г. Петровский [136], О.О. Ладиженська [95]. Після встановлення Л.А. Люстерніком рівномірної збіжності наближень, отриманих методом «сіток» до точного розв'язку та покращення збіжності сіток [105] були отримані перші теореми у роботах [147], [110], [145, 146], найбільш загальна конструкція запропонована Філіпповим А.Ф. [174], де показано, що при деяких умовах стійкість еквівалентна збіжності. Метод «сіток» детально був розглянутий в роботах Г. Маркуса [107], П.М. Варвака [28], Ф. Блейха і Е. Мелана [19], В.І. Крилова і Л.В. Канторовича [80], Д.Ю. Панова [129].

Переваги методу скінченних різниць:

- простота використання: досить простий у використанні та може бути використаний для розв'язання задач з різних галузей, де потрібно обчислити похідну або інтеграл функції;
- апроксимація будь-якої точності: дозволяє отримати значення похідної або інтегралу з будь-якою точністю, залежно від кількості використаних точок та ступеня апроксимації;
- обмеженість використання диференціальних рівнянь: може використовуватись для обчислення похідних та інтегралів функцій, що не можуть бути вирішені аналітично.

Недоліки методу скінченних різниць:

- залежність від кроку: залежить від вибору кроку, який використовується для обчислення похідної або інтегралу. Занадто малий крок може призвести до великої кількості обчислень, тоді як занадто великий крок може призвести до втрати точності;
- помилки апроксимації: є методом апроксимації, тому він може давати неточні результати, особливо при високих ступенях апроксимації;
- обчислювальна складність: метод скінченних різниць може бути обчислювально витратним, особливо при використанні високих ступенів апроксимації.

Варіаційно-різницевий метод. Варіаційно-різницевий метод (ВРМ) базується на варіаційних принципах механіки і вільний від ряду недоліків, властивих МСР. В даному випадку деформування будівельної конструкції описується деяким функціоналом, найчастіше це вираз потенційної енергії системи - функціонал

Лагранжа, який в положенні рівноваги системи є стаціонарним. Умова стаціонарності функціоналу відповідає диференціальним рівнянням, якими описується поведінка досліджуваної системи, однак порядок похідних, що входять в функціонал, нижче порядку похідних в диференціальних рівняннях, що дає можливість спростити алгоритмізацію процесу рішення задачі. Крім того, ВРМ дозволяє спростити запис граничних умов. Так, при використанні функціоналу Лагранжа потрібно задовольняти тільки кінематичним крайовим умовам, так як статичні умови вже містяться в варіаційних рівняннях. Ці умови називають природними.

При реалізації ВРМ варіаційна задача замінюється скінченно-різницевою аналогом на заздалегідь обраній сітці вузлів, тобто похідні від безперервних функцій, що входять у вираз, наприклад, потенційної енергії даної системи, визначаються чисельно в призначених вузлах за допомогою кінцево-різницевої співвідношень. Крім того, зважаючи на необхідність обчислення певного інтеграла, що входить у вираз функціоналу енергії, в областях даної системи між вузлами вводять кусочно-безперервні, так звані функції заповнення. Від характеру цих функцій залежить ступінь кінцево-різницевої апроксимації. В результаті процедура ВРМ зводиться до добре обумовленої в симетричній системі алгебраїчних рівнянь (при використанні функціоналу Лагранжа) стрічкової структури.

Переваги варіаційно-різницевого методу:

- у порівнянні з аналітичними методами, які вимагають складних розрахунків та аналітичних навичок, варіаційно-різницевий метод може бути більш простим і доступним для розуміння і застосування;
- може бути застосований для розв'язання широкого спектру диференціальних рівнянь та інших математичних задач з високою точністю;
- може бути легко розширений на багатовимірні задачі.

Недоліки варіаційно-різницевого методу:

- для досягнення високої точності необхідно використовувати дуже малий крок різницевої сітки. Це може призвести до великих обчислювальних навантажень і складних обчислювальних алгоритмів;

- деякі різновиди задач можуть бути досить складні для формулювання у вигляді різницевих рівнянь, що може зробити застосування варіаційно-різницевого методу неможливим;
- є обмеженим областю застосування, оскільки він може застосовуватися лише до стаціонарних і часово-змінних одновимірних та багатовимірних задач, які можуть бути виражені у вигляді різницевих рівнянь.

Метод скінченних елементів. Метод скінченних елементів є найпоширенішим серед існуючих методів розрахунку конструкцій. (МСЕ) виник з ідеї ВРМ і розроблявся в декількох постановках диференційній, інтегральній постановці, але найбільш популярною і використовуємою є варіаційна постановка. Метод гарно підходить до задач зі складною геометричною структурою.

Метод скінченних елементів складається з наступних кроків:

- дискретизація області, яка розглядається, на скінченну кількість півобластей, які називаються елементами. Зазвичай, елементи мають просту геометричну форму, таку як трикутник, квадрат, куб або циліндр;
- вираз диференціальних рівнянь у вигляді системи алгебраїчних рівнянь, які описують поведінку системи в кожному елементі;
- розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, що відповідають кожному елементу. Результати об'єднуються, щоб отримати повний розв'язок задачі.

Переваги методу скінченних елементів:

- є дуже потужним і загальним числовим методом, який може бути використаний для розв'язання широкого спектру задач в різних галузях, таких як механіка, електродинаміка, теплопередача, аеродинаміка тощо;
- може бути застосований до складних геометричних форм та неоднорідних матеріалів, що робить його особливо корисним для моделювання реальних систем;
- може бути легко розширений на багатовимірні задачі.

Недоліки методу скінченних елементів:

- розбиття області на скінченну кількість елементів може призвести до неточностей в результаті розрахунку, особливо коли форма області складна або неоднорідна;

- чутливість до вибору елементів: Результати методу скінченних елементів можуть змінюватися залежно від того, які елементи використовуються для моделювання області. Це може створювати проблеми при побудові точних моделей;
- обчислювальна складність: метод вимагає великих обчислювальних ресурсів, особливо для більш складних моделей. Це може бути обмеженням для менш потужних комп'ютерів або витратним фактором для компаній, які займаються чисельним моделюванням;
- проблеми з крайовими умовами: може стикатися з проблемами, які пов'язані з крайовими умовами. Це може вимагати додаткових заходів для забезпечення правильної обробки крайових умов та забезпечення точності розрахунків;
- стійкість та збіжність: рішення може бути нестійким або незбіжним у певних випадках, особливо, якщо модель містить деякі специфічні фізичні ефекти, або якщо зміни у величинах дуже великі.

Метод прямих. Одним з напрямків розвитку скінченно-різницевого методів є метод прямих, який в іноземній літературі називається методом ліній (method of lines). Але широке розповсюдження даний метод отримав у роботах вітчизняних науковців. Даний метод полягає у отриманні апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою скінченно-різницевого методу. Зниження вимірності в такому випадку виконується по всіх просторових координатах крім однієї (координата x). По координаті x функція залишається неперервною та визначається за допомогою певних аналітичних методів. При такому підході забезпечується висока точність по одній координаті, також це підвищує стійкість розрахунку. Але не дає можливість вирішити проблеми, пов'язані із законтурними функціями. Розглянемо метод прямих більш детально у п.1.2.4.

1.2.3 Комбіновані методи

Комбіновані методи є альтернативою універсальним числовим методам, зазвичай їх зручно використовувати для об'єктів певного класу. В такому випадку такі методи можуть бути найбільш ефективними і точними, ніж універсальні чисельні

методи на об'єктах цього класу. Загалом в цих методах використовуються відомі фундаментальні рішення вихідних рівнянь теорії пружності і за їх допомогою будуються інтегральні рівняння, що визначені на границі області. Таким чином для вихідних тривимірних рівнянь будуються двовимірні інтегральні рівняння, що визначені в точках поверхні. Для двовимірних – одновимірні, визначені у точках граничної прямої. Після цього інтегральні рівняння зводяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Метод граничних перетворень (метод потенціалу, метод граничних елементів(МГЕ)). Цей метод зводить вирішення задач до системи рівнянь, що містить значення шуканих функцій тільки на межі розглянутої області, а не в середині. Така система зазвичай меншого порядку (ніж в методі МСЕ). В МГЕ дискредитуються лише граничні поверхні об'єкту, що розраховується, а не весь об'єкт, тому загальна розмірність розв'язуваної задачі на одиницю менша.

Метод використовується для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних. Його основна ідея полягає в перетворенні диференціального рівняння в інтегральне рівняння, що містить тільки значення розв'язку на границі області. Використання методу виглядає так:

- застосування лінійних перетворень до заданого диференціального рівняння;
- перетворення вихідного рівняння у вигляд інтегрального рівняння, що містить значення розв'язку на границі області;
- апроксимація інтегрального рівняння з використанням чисельних методів;
- розв'язання апроксимованого рівняння для знаходження значення розв'язку;
- відновлення розв'язку диференціального рівняння з використанням інверсії перетворення.

Переваги методу граничних перетворень:

- може бути використаний для розв'язання широкого спектру диференціальних рівнянь, включаючи рівняння в частинних похідних;
- за допомогою цього методу можна отримати точний або дуже точний розв'язок для деяких складних рівнянь;

- є ефективним для розв'язання задач зі змінними границями або задач з вільними границями.

Недоліки методу граничних перетворень:

- обчислювальна складність: може бути досить обчислювально складним, особливо в тих випадках, коли область, що досліджується, має складну форму або нерегулярні границі. Це може призвести до великої кількості обчислень та високої вимоги до обчислювальних ресурсів;
- відсутність універсальності: може бути використаний тільки для розв'язання обмеженого класу диференціальних рівнянь. Також, МГП не є ефективним для деяких задач зі змінними границями або з вільними границями;
- залежність від точності границь: Оскільки метод базується на розв'язку задачі на границі, точність цього розв'язку може сильно вплинути на точність розв'язку задачі в цілому. Це може бути особливо складним у випадку, коли границі досліджуваної області досить складні або нерегулярні;
- обмеження на типи розв'язків: метод дозволяє знайти розв'язки обмеженого класу диференціальних рівнянь. Це означає, що він не є ефективним для деяких типів розв'язків, які не входять до цього класу;
- при застосуванні методу зазвичай потрібно використовувати приблизні методи для апроксимації інтегрального рівняння. Це може призвести до певної похибки в розв'язку задачі та до необхідності у використанні додаткових методів для корекції цих етапів розв'язку.

Метод особливо ефективний для областей, що містять частину кордонів, спрямовуються до нескінченності. Для побудови рівнянь потрібно мати аналітичний розв'язок задачі для нескінченної області, що відповідає одиничному впливу заданому в середині області. Це рішення називають функцією Гріна або функцією впливу.

Початково метод використовувався для вирішення задач Дирихле, Неймана – рівняння Лапласа [160]. В подальшому розвитку метод узагальнили для рівнянь теорії пружності. Аналогом формул Гріна в теорії пружності є формули Бетті (пружні

потенціали на базі рішення Кельвіна-Соміліани) [130]. Г. Вейль використав антенний потенціал [35]. В.Д. Купрадзе узагальнив постановку для граничних задач теорії коливань [93].

Метод однорідних рішень. Цей метод широко використовувався при побудові рішень задач напружено деформованого стану товстих і тонких плит, пустотних сфер, конусів, циліндрів та плоскої задачі. Вперше метод вказаний М.А. Шиффом при вивченні вісесиметричної деформації суцільних циліндрів [208]. Розвитку методу і його використанню присвячені роботи [102, 103][140-143]. Початково вирішується задача для нескінченно довгого циліндру, тобто виконані граничні умови на циліндричній поверхні. Далі використовують цей метод, приєднуючи до знайдених умов однорідні рішення, що прирівнюють деякі напруження до нуля. Поєднання напружень, що знайдені на першому етапі задовольняє умовам на бічній поверхні циліндру при будь-яких значеннях постійних. Таким чином не використовуючи нескінченну систему можна задовільнити граничні умови на торцевих поверхнях точно для нормальних напружень та для дотичних напружень, або для одно з переміщень (а для іншого лише при певному фіксованому значенні радіуса). Задача зводиться до розкладання заданого навантаження в ряд по неортогональним функціям, що важко реалізовувати практично. Через це, обмежуючись кінцевим числом членів рядів, контурні умови виконують тільки в точках кінцевого числа кілець на торцевих поверхнях або по умовам мінімуму квадратного відхилення напружень від заданих сил. Метод використовують для розрахунку пустотних валів [140-144].

Переваги методу однорідних рішень:

- широкий спектр застосування: може бути використаний для розв'язання різноманітних диференціальних рівнянь, включаючи лінійні та нелінійні рівняння з різними умовами;
- можливість зведення до стандартних функцій: деякі типи рівнянь можуть бути зведені до стандартних функцій, таких як тригонометричні та гіперболічні функції, що значно спрощує їх розв'язання;

- дозволяє знайти загальний вигляд розв'язку без необхідності виконувати велику кількість обчислень.

Недоліки методу однорідних рішень:

- може бути застосований тільки для деяких типів диференціальних рівнянь;
- не завжди можливо знайти загальний вигляд розв'язку: У деяких випадках метод може допомогти знайти частинний розв'язок, але не завжди можна знайти загальний вигляд розв'язку. Це може бути пов'язано зі складністю рівняння або недостатньою кількістю відомих умов;
- метод передбачає наявність деяких властивостей у диференціального рівняння, наприклад, лінійності та однорідності. Якщо рівняння не відповідає цим властивостям, метод може бути неефективним або непридатним для використання;
- неможливість розв'язання нелінійних рівнянь: не може бути використаний для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, оскільки вони не задовольняють умову лінійності;
- обмеженість застосування: може бути застосований тільки до диференціальних рівнянь першого та другого порядку. Якщо рівняння має вищий порядок, метод може бути неефективним або непридатним для використання;
- залежність від вибору базисних функцій: метод базується на виборі певного набору функцій для побудови загального розв'язку. Це може призвести до того, що розв'язок буде залежати від вибору базисних функцій, і різні вибори можуть призвести до різних розв'язків.

1.2.4 Метод прямих та його розвиток

Як вже було описано, метод прямих належить до комбінованих методів. В даній роботі цей метод використовується для вирішення вісесиметричних задач, продовжуючи розвиток вишукувань попередніх науковців та розвиваючи його.

Вперше метод прямих зустрічається у роботах Е. Роте 1930-1931 році [205, 206] де він використав поперечну схему методу прямих для вирішення квазілінійного параболічного рівняння.

Розвиток методу можна прослідкувати у роботах Л.В. Канторовича у 1933-1937 роках [77-79] де він запропонував новий варіаційний метод наближеного вирішення двовимірних рівнянь еліптичного типу, заснований на варіаційних методах. Також він дослідив збіжність методу.

Використовувати метод прямих як спосіб обчислення чисельного розв'язку еліптичних задач математичної фізики почав М.Г. Слободянський у 1939 році [150]. Застосування скінченно-різницевої схеми, 3-х шарову та 5-ти шарову, перетворює вихідні диференціальні рівняння.

Загальний розв'язок однорідних систем звичайних диференціальних рівнянь, відповідних отриманим схемам, не залежить від крайових умов задачі, форми і розмірів області і тому може бути визначений заздалегідь для будь якого кроку h . У роботі [151] побудовані схеми методу прямих і загальні розв'язки однорідних систем для різних задач теорії пружності 2-го і 4-го порядку, як на площині, так і в просторі.

Ці дослідження продовжила В.М. Фаддеева [172]. У її роботі дані вказівки щодо вирішення задач в області з непрямолінійними основами. До діагонального виду за допомогою ортогональних перетворень систему диференціальних рівнянь привів С.Г. Малихін [112].

Різні лінійні рівняння 2-го [122, 123], 4-го [124, 125] и 6-го [126, 127] порядків на площині досліджені Е.О. Омаровим. Використовуючи роботу В.М. Фаддеевої [172] він отримує загальні рівняння запропонованих схем через корені деяких характеристичних рівнянь. Для побудованих схем доведено їх єдине рішення у прямокутній області, тобто можливість знайти (єдиним способом) значення довільних постійних, що входять в загальний розв'язок.

Метод прямих використовується не тільки в прямокутних декартових координатах. Н.Н. Устінова [171] в задачі Дирихле для рівняння Лапласа в полярних координатах будує на прямих $\varphi_n = 2\pi n / N$, $0 \leq n \leq N - 1$, апроксимуючу схему з залишковим членом $O(h^4)$ і її загальний розв'язок. Ця і більш проста схема для рівняння Пуассона в полярних координатах разом з загальними рішеннями відповідних однорідних систем приведені В.І. Лебедевим [97]. Аналогічну схему для

рівняння Гельмгольца з крайовими умовами 1-го і 2-го роду використав С.В. Немчинов [118].

Л.П. Вінокуров [41-48] крім прямокутних декартових і полярних, використовує косокутні декартові, циліндричні і сферичні координати, у задачах він отримує схеми за допомогою «ковзної» інтерполяції Л.В. Канторовича.

Чернін К.Е. [176] в задачі для безперервного тіла попередньо перетворив рівняння до циліндричних координат, а потім за допомогою методу прямих знайшов наближений розв'язок.

Метод прямих для розв'язання еліптичних рівнянь використовували А. Лангенбах [96] і Я.І. Аліхашкін [5]. Але вони обмежились побудовою апроксимуючої схеми і пошуком ефективного способу її вирішення, надали загальний розв'язок схеми або однорідної системи рівнянь і не займались питанням збіжності і оцінкою погрішності.

Е.Х. Костюкович [87-90] звернув увагу що результати для прямокутних областей не відповідають результатам для трапецевидних областей.

В.Е. Попович [139] розраховував прямокутні пластини з довільними граничними умовами під дією рівномірно розподіленого навантаження. Моделював задачі через диференційні рівняння Софі Жермен і вирішував методом паралельних прямих.

Ю.П. Петров у роботі [135] виконав розрахунок пружної трапецеподібної пластини методом прямих. Використовуючи поліноми 4-ї степені більш точно визначаються законтурні функції. Система редукованих рівнянь розв'язується методом «зосереджених вантажів». Такий підхід можна використати дискретний метод до задач про згин пружних секторальних, круглих, ортотропних та пластин на пружній основі [131-134].

Л.Т. Шкелев [194-196] розширив метод прямих на задачі визначення НДС пластин довільної форми в полярних координатах для вирішення плоскої теорії пружності. Для побудови редукованих рівнянь використовувались формули методу кінцевих різниць по дискретній координаті. Редуковані рівняння вирішувались з

використанням власних векторів і власних чисел матричних коефіцієнтів для перетворення зв'язаної системи диференціальних рівнянь в систему незв'язаних рівнянь.

Далі методом займались А.Ф. Корбаков [83], Ю.А. Морсков [114-117], Е.А. Одинець [121], А.М. Станкевич [161]. В своїх роботах вони покращили і розширили метод на задачі згину багатів'язних пластин, пластинчастих систем, багат шарових пластин, складених пластин та оболонок. Разом зі Шкельовим вони систематизували головні принципи побудови редукованих рівнянь для просторових пластинчастих елементів та оболонок, побудували загальне рішення редукованих рівнянь. Запропонували комбінувати метод прямих з методом Бубнова-Галеркіна для вирішення просторової задачі теорії пружності.

Я.М. Григоренко з учнями вперше використали метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [61], для вирішення задач теорії оболонок. Цей чисельний метод стає ефективно стійким при використанні разом з методом прямих. Вперше комбінацію цих методів використали для знаходження динамічних характеристик оболонок. Запропонували використання алгоритму дискретної ортогоналізації С.К. Годунова в методі прямих для неканонічних областей [65].

На цьому етапі сформувався певні проблеми та недоліки методу, які необхідно було вирішувати в подальшому:

- редукування рівнянь не відповідали сучасному стану методів, які використовуються для зниження вимірності рівнянь математичної фізики. В варіаційних і проєкційних методах процес їх використання більш простий та не потребує використання законтурних значень невідомої функції;
- в алгоритмах методу прямих важко врахувати зміну товщини по континуальній координаті при редукуванні за поперечною координатою;
- метод прямих використовувався для вирішення статичних задач теорії пружності і ніколи не використовувався для вирішення задач нестационарної термопружності та нестационарних динамічних задач. І це стосувалось як задач плоских, так і тривимірних.

Далі методом продовжують займатись Л.Т. Шкельов, В.К.Чибіряков, А.М. Станкевич Разом з учнями вони проводять вишукування для вирішення недоліків методу та поширюють його на інші типи задач [197-198, 177-180, 184-189, 193]. Узагальнюють метод прямих, шляхом комбінування його з проєкційним методом Бубнова-Галеркіна-Петрова. Де в якості базисних функцій використовуються локальні функції, досліджують точність методу в залежності від виду базисних функцій.

В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, Д.В. Левківський [181-183, 162-167] запропонували іншу схему першого етапу методу прямих, за допомогою якої для вихідної граничної або початково-граничної багатовимірної задачі будується система одновимірних по просторових координатах редукованих рівнянь, граничних та початкових умов. А також використовують сучасний і ефективний метод розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь для другого етапу методу прямих за допомогою апарату розв'язування редукованих рівнянь для статичних задач [84], квазістатичних задач (знаходження частот власних коливань пластин і оболонок [66]), чим приводять метод до сучасного стану – модифікований метод прямих.

В подальшому В.К. Чибіряков, О.П. Кошевий, Д.В. Левківський та інші розробляють алгоритм застосування модифікованого методу прямих для розв'язання задач теорії пружності та термопружності [189] та чисельно реалізують його в своїх роботах [191].

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. З середини ХХ століття та розвитком ЕОМ описаний розвиток дослідження напружено деформованого стану (НДС) тіл обертання, як однієї з основних форм елементів будівельних споруд, машин та механізмів. Розглянута загальна задача дослідження статичного НДС тіл обертання, що традиційно поділяється на дві глобальні: - дослідження НДС валів змінного перерізу при кососиметричному

відносно центральної осі Oz характеру впливів; та при вісесиметричному характері НДС тіл обертання (вісесиметрична задача).

2. Детально розглянуто розвиток дослідження НДС вісесиметричних тіл обертання, описані основні підходи і типи задач, що вирішувались різними вченими.

Розкривається розвиток теорії та методів розрахунку вісесиметричних задач теорії пружності. Проаналізовані аналітичні і наближені аналітичні методи розрахунку, а саме:

- метод Фур'є або метод розділених змінних;
- метод Пікара або метод послідовних наближень;
- метод степеневих рядів;
- метод Адамса;
- метод Ейлера;
- метод Рунге-Кутта;
- модифікований метод Ейлера;
- метод коллокації (інтерполяційний метод);
- метод найменших квадратів;
- метод Гальоркіна.

Відмічені переваги та недоліки цих методів та їх подальший розвиток.

3. Сучасний рівень розвитку науки і технологій визначив специфіку розрахунку конструкцій, та призвів до широкого використання чисельних методів, що переводять рішення до фізико-механічних задач до найпростіших обчислювальних процедур, що виконуються за допомогою ЕОМ, в розділі описаний розвиток:

- метод скінченних різниць;
- варіаційно-різницевий метод;
- метод скінченних елементів;
- метод прямих.

4. Також розглядається подальший розвиток комбінованих методів, що є альтернативними універсальним чисельним методам, а саме:

- метод граничних перетворень (метод потенціалу);

- метод граничних елементів(МГЕ);
- метод однорідних рішень.

5. Проаналізовані переваги та недоліки цих чисельних та комбінованих методів, та описані їх можливості і розвиток на сучасному етапі вишукувань.

6. Одним із сучасних комбінованих методів для розрахунку НДС вісесиметричних тіл є метод прямих. В роботі проаналізований його розвиток та можливості використання. Запропонована подальша модифікація методу прямих, в якій на першому етапі застосовується інша схема вирішення початково-граничної багатовимірної задачі на основі побудови системи одновимірних, по просторових координатах, редукованих рівнянь, граничних та початкових умов, а також використання сучасних та ефективних методів розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь для другого етапу методу прямих.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 1:

1. Янсонс М.О. Модифікований метод прямих, алгоритм його застосування, можливості та перспективи. /Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Сович Ю.В.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 70. – Київ, КНУБА, 2019. – С. 595-616.

2. Янсонс М.О. Чисельна реалізація модифікованого методу прямих. /Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Сович Ю.В.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 74. – Київ, КНУБА, 2020. – С. 341-359.

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКА ВИХІДНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Об'єкти дослідження та впливи на них.

У роботі розглядаються тверді тіла вісесиметричної геометрії, модель такого тіла зображена на (Рис. 2.1). По контурах тверде тіло може взаємодіяти з оточуючим середовищем (жорсткий контакт, шарнір або певне піддатливе з'єднання). Враховуючи осьову симетрію всі подальші розрахунки виконуються в циліндричній системі координат.

Розглянемо деякі будівельні конструкції чия геометрія та завантаження можуть бути зведені до такої розрахункової моделі:

- *Трубопровід (Рис. 2.3), тунель метро.*

Циліндричне тіло з тонкою стінкою на яке діють зовнішній тиск від ґрунту (пружна основа) та внутрішній тиск усередині (від рідин, тощо) в такому випадку приймаються навантаження і геометрія конструкції стала по координаті z . З теорії пружності відомо, що в такому випадку тривимірну задачу можна звести до плоскої задачі теорії пружності. Відносні деформації в напрямку осі z , приймається $\varepsilon_z = 0$, тоді з тривимірної моделі зображеної на Рис. 2.4 вирізається смужка одиничної товщини та визначається напружено-деформований стан.

На наступному етапі плоска задача зводиться до одновимірної за допомогою модифікованого методу прямих. Для цього по радіальній координаті плоске тіло зображене на Рис. 2.2 розбивається коловими лініями з кроком Δ (Рис. 2.3). Для зниження вимірності на лініях обираються базисні функції. Вихідна система диференційних рівнянь зводиться до форми Коші. По коловій координаті розв'язок визначається методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Також можливий другий варіант, оскільки задача вісесиметрична, то по коловій координаті функції можна записати за допомогою тригонометричних рядів. Тоді система зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку.

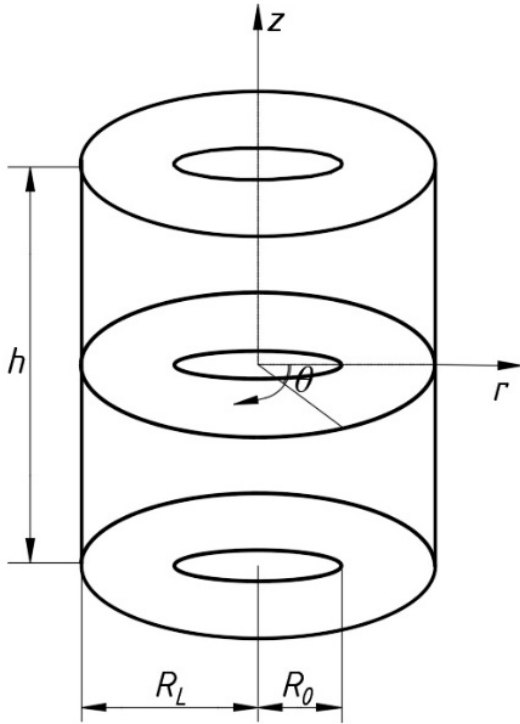


Рис. 2.1 Модель твердого циліндричного тіла

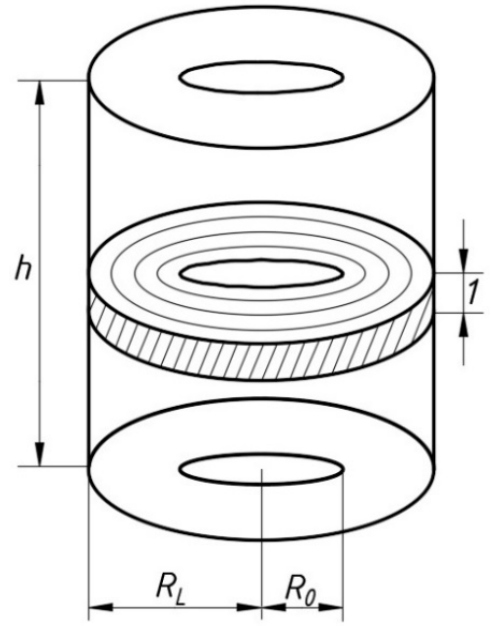


Рис. 2.4 Зона тривимірного тіла, що розглядається. Плоска деформація.

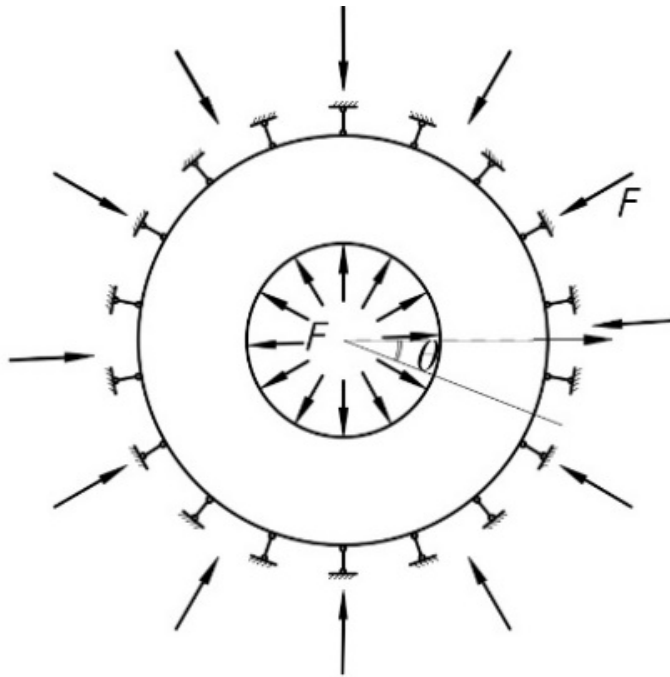


Рис. 2.2 Розрахункова модель трубопроводу, тунелю в перерізі. Плоска деформація.



Рис. 2.3 Зображення конструкції трубопроводу

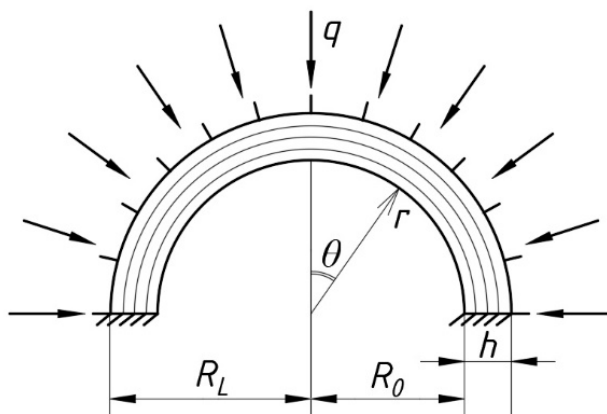


Рис. 2.5 Розрахункова модель циліндричного тунелю в перерізі



Рис. 2.6 Зображення конструкції циліндричного тунелю

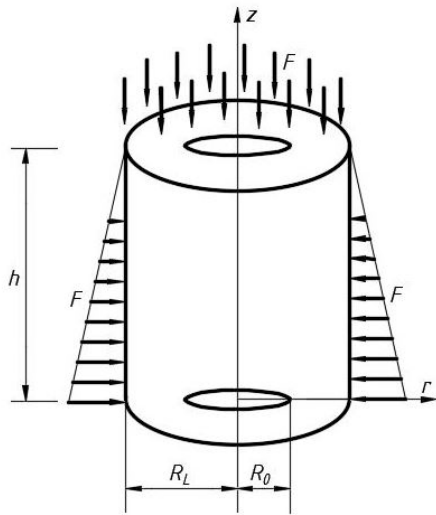


Рис 2.7

Розрахункова модель
вісесиметричного тіла

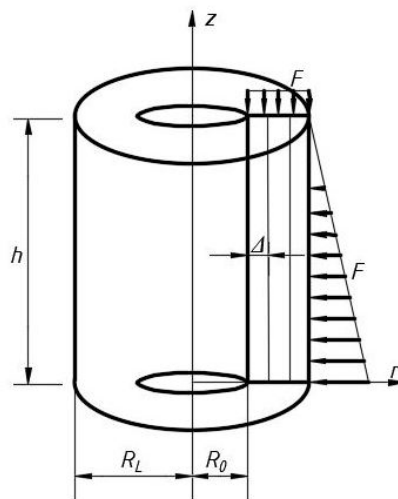


Рис 2.8

Розбиття лініями перерізу
вісесиметричного тіла по
координаті z

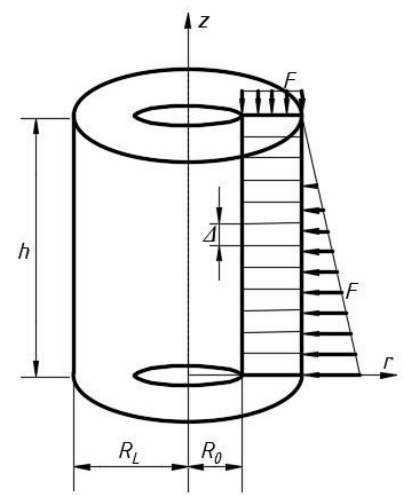


Рис 2.9

Розбиття лініями
перерізу
вісесиметричного тіла
по координаті r

- **Циліндричний тунель (Рис. 2.6), аочні кам'яні конструкції.**

По коловій координаті тіло не має замкнутої геометричної форми. Задача також розглядається як плоска задача теорії пружності, оскільки навантаження стали по координаті z . Якщо присутня пружна основа (тиск ґрунту), то у такому випадку зниження вимірності вихідних рівнянь виконується по координаті r . По коловій координаті використовується метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

- **Бетонні кільця опускних колодязів, елеватори, стволи танкової та артилерійської зброї, димові труби та інші.**

Задача є вісесиметричною. Навантаження і геометрія тіла симетричні відносно осі z . При такому навантаженні необхідно розв'язувати тривимірну задачу теорії пружності в циліндричній системі координат. На першому етапі знижується вимірність диференціальних рівнянь проєкційним методом геометрично це зображено на Рис. 2.8, 2.9. Існує декілька варіантів зниження вимірності, але на першому етапі по коловій координаті зниження вимірності виконувати тригонометричними рядами.

Перший: прямокутна область розбивається прямими з кроком Δ по координаті z (Рис. 2.8). По колійній координаті використовуються тригонометричні функції, по координаті r функція залишається неперервною. У напрямку осі r використовується метод дискретної ортогоналізації. *Другий:* по координаті r проводяться прямі з кроком Δ , а по координаті z використовується метод ортогоналізації (Рис 2.9).

2.2 Вихідні рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат.

Для опису поставлених задач використовуються класичні диференційні рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат [120]. Співвідношення Коші описують взаємодію між деформаціями та переміщеннями (2.1).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r}; \\
 \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\
 \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$ - лінійні деформації, $\varepsilon_{\theta r}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}$ - кутові деформації, u_r, u_θ, u_z - переміщення у відповідних напрямках.

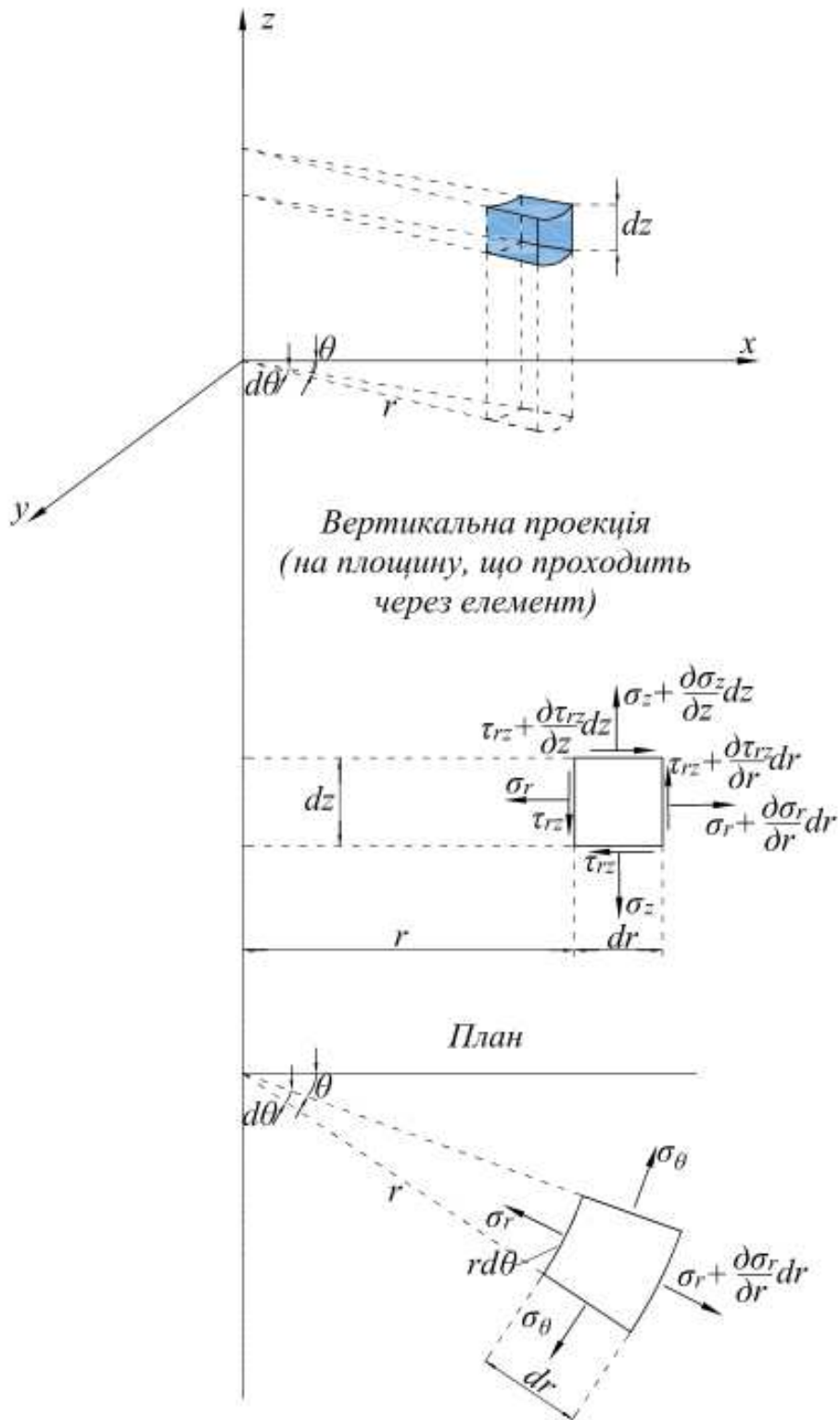


Рис. 2.10 Напруження в елементі вісесиметричного тіла

Рівняння узагальненого закону Гука:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz}; \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz}; \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}; \\
 \tau_{r\theta} &= 2\mu\varepsilon_{r\theta}; \\
 \tau_{\theta z} &= 2\mu\varepsilon_{\theta z}; \\
 \tau_{rz} &= 2\mu\varepsilon_{rz}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

λ, μ - коефіцієнти Ляме,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

ν - коефіцієнт Пуасона.

Рівняння закону Гука є алгебраїчними співвідношеннями. Підставимо рівняння (2.1) до рівнянь (2.2) виключивши компоненти тензора деформації з системи визначальних рівнянь, отримані перетворені рівняння будуть вихідними рівняннями (2.3):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{R_0 + x}u_r + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R_0 + x} + \bar{R}_t = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{R_0 + x} + \bar{\theta}_t = 0.$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \bar{R}_t = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \bar{\theta}_t = 0; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \bar{Z}_t = 0.$$

2.3 Початкові і граничні умови.

Розглянемо врахування граничних і початкових умов для задач теорії пружності, що є моделями об'єктів які розглядаються у даній роботі.

Для вихідних диференціальних рівнянь за початкові умови задаються значення початкових переміщень та швидкостей:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= u_0(x, y, z), \dot{u}(x, y, z, 0) = \dot{u}_s(x, y, z), \\ v(x, y, z, 0) &= v_0(x, y, z), \dot{v}(x, y, z, 0) = \dot{v}_s(x, y, z), \\ w(x, y, z, 0) &= w_0(x, y, z), \dot{w}(x, y, z, 0) = \dot{w}_s(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Граничні умови моделюються за допомогою стержнів заданої жорсткості, що враховує умови закріплення тіла (жорсткий контакт, шарнір, пружну взаємодію) з іншими тілами або середовищем в якому знаходиться тіло.

Граничні умови для тривимірної задачі в загальному вигляді.

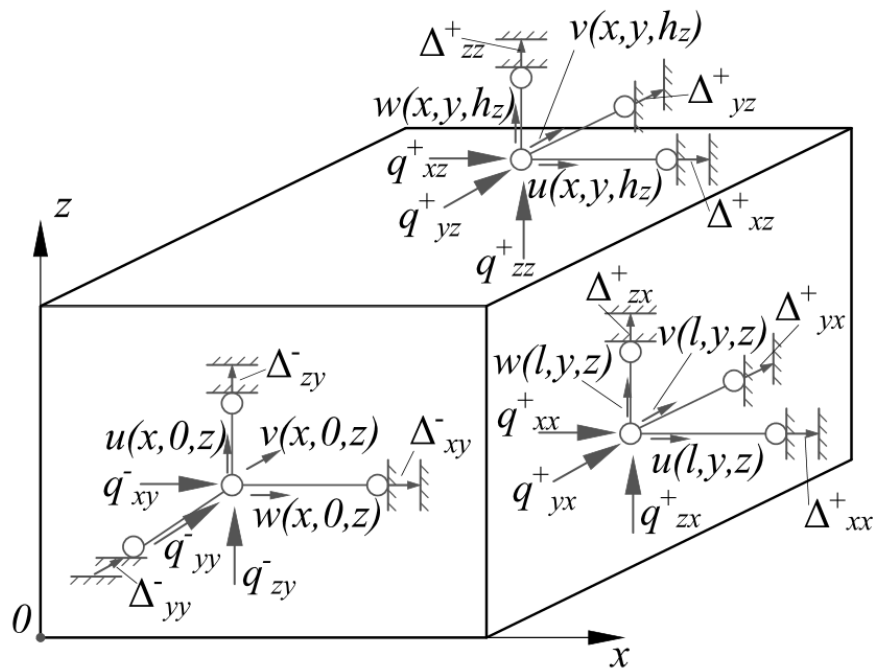


Рис. 2.11 Умови закріплення та навантаження тривимірної моделі об'єкту

На кожній з шести граничних площин розглядаються граничні умови загального вигляду (Рис. 2.11), що дозволяють розглядати кінематичні, статичні та змішані умови. Кожна точка зовнішньої грані об'єкту прикріплена до відповідної точки оточуючого середовища трьома пружними стержнями заданої жорсткості k . Ця точка оточуючого середовища може зміщуватись на задані переміщення Δ у трьох координатних напрямках. До точки зовнішньої грані об'єкту може бути прикладене розподілене навантаження \vec{q} . Для всіх величин, що увійдуть до граничних умов, прийнято позначення за допомогою трьох індексів, що індифікують грань об'єкту, в точках якої ці величини розглядаються.

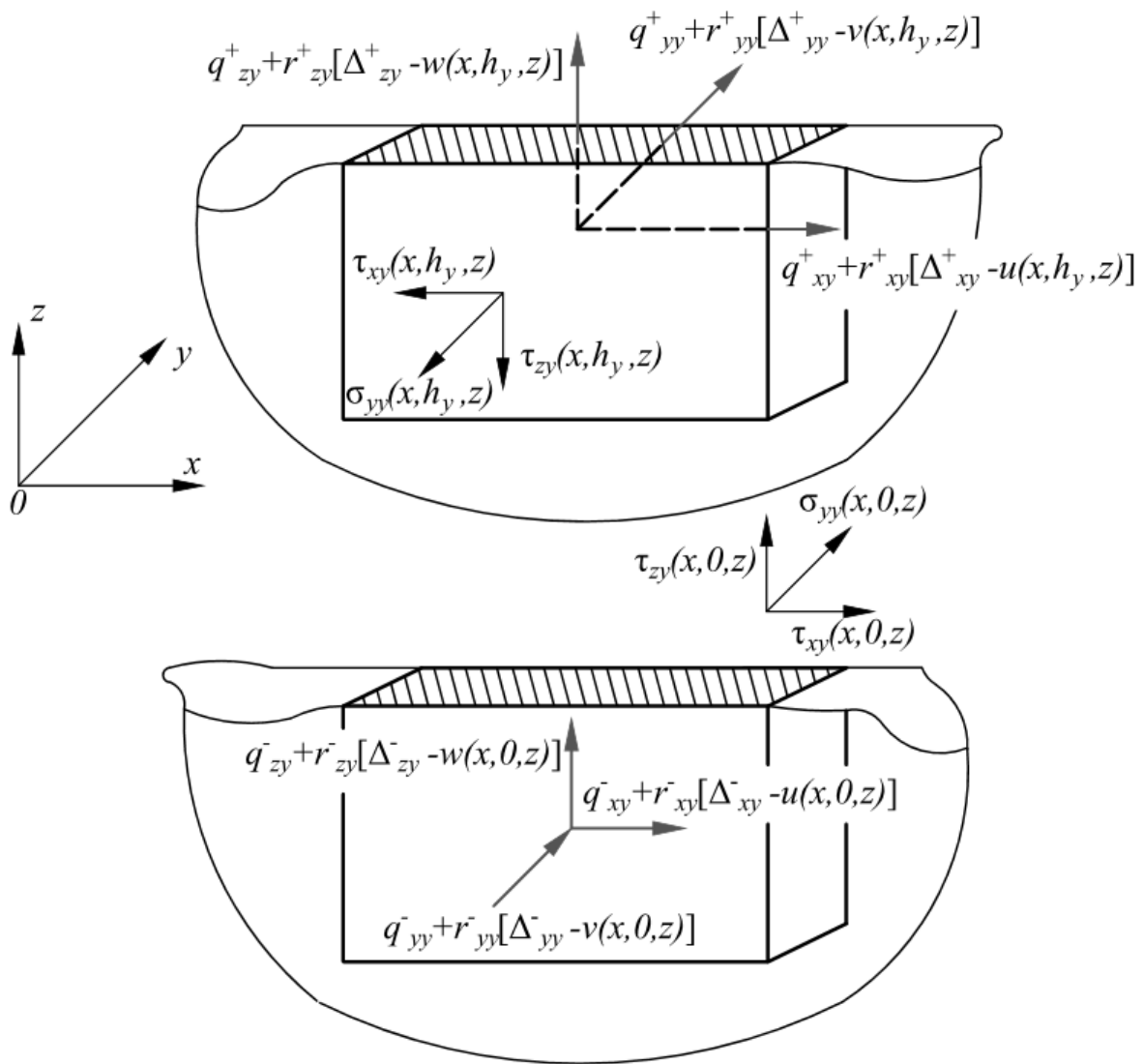


Рис. 2.12 До умов рівноваги на гранях

Перший нижній індекс визначає вісь, якою визначається ця величина; другий нижній індекс визначає нормаль до відповідної грані, верхній індекс для торцевих граней 0 або l визначає грань за її координатою по осі Ox , для бокових граней $+$ або $-$ відповідає знаку зовнішньої нормалі на цій грані. На всіх гранях додатні напрямки навантажень та осадок співпадають з додатніми напрямками відповідних осей.

Відповідні граничні умови випливають з рівнянь рівноваги (Рис. 2.12) і тому є природними граничними умовами. Вони мають вигляд:

при $x = 0$

$$\begin{aligned} r_{xx}^0 u(0, y, z) - \sigma_{xx}(0, y, z) &= r_{xx}^0 \Delta_{xx}^0(y, z) + q_{xx}^0(y, z), \\ r_{yx}^0 v(0, y, z) - \tau_{yx}(0, y, z) &= r_{yx}^0 \Delta_{yx}^0(y, z) + q_{yx}^0(y, z), \\ r_{zx}^0 w(0, y, z) - \tau_{zx}(0, y, z) &= r_{zx}^0 \Delta_{zx}^0(y, z) + q_{zx}^0(y, z), \end{aligned}$$

(2.6)

при $x = l$

$$\begin{aligned} r_{xx}^l u(l, y, z) - \sigma_{xx}(l, y, z) &= r_{xx}^l \Delta_{xx}^l(y, z) + q_{xx}^l(y, z), \\ r_{yx}^l v(l, y, z) - \tau_{yx}(l, y, z) &= r_{yx}^l \Delta_{yx}^l(y, z) + q_{yx}^l(y, z), \\ r_{zx}^l w(l, y, z) - \tau_{zx}(l, y, z) &= r_{zx}^l \Delta_{zx}^l(y, z) + q_{zx}^l(y, z). \end{aligned}$$

На боковых гранях:

при $y = 0$

$$\begin{aligned} r_{xy}^- u(x, 0, z) - \tau_{xy}(x, 0, z) &= r_{xy}^- \Delta_{xy}^-(x, z) + q_{xy}^-(x, z), \\ r_{yy}^- v(x, 0, z) - \sigma_{yy}(x, 0, z) &= r_{yy}^- \Delta_{yy}^-(x, z) + q_{yy}^-(x, z), \\ r_{zy}^- w(x, 0, z) - \tau_{zy}(x, 0, z) &= r_{zy}^- \Delta_{zy}^-(x, z) + q_{zy}^-(x, z), \end{aligned}$$

при $y = h_y$

$$\begin{aligned} r_{xy}^+ u(x, h_y, z) + \tau_{xy}(x, h_y, z) &= r_{xy}^+ \Delta_{xy}^+(x, z) + q_{xy}^+(x, z), \\ r_{yy}^+ v(x, h_y, z) + \sigma_{yy}(x, h_y, z) &= r_{yy}^+ \Delta_{yy}^+(x, z) + q_{yy}^+(x, z), \\ r_{zy}^+ w(x, h_y, z) + \tau_{zy}(x, h_y, z) &= r_{zy}^+ \Delta_{zy}^+(x, z) + q_{zy}^+(x, z), \end{aligned}$$

(2.7)

при $z = 0$

$$\begin{aligned} r_{xz}^- u(x, y, 0) - \tau_{xz}(x, y, 0) &= r_{xz}^- \Delta_{xz}^-(x, y) + q_{xz}^-(x, y), \\ r_{yz}^- v(x, y, 0) - \tau_{yz}(x, y, 0) &= r_{yz}^- \Delta_{yz}^-(x, y) + q_{yz}^-(x, y), \\ r_{zz}^- w(x, y, 0) - \sigma_{zz}(x, y, 0) &= r_{zz}^- \Delta_{zz}^-(x, y) + q_{zz}^-(x, y), \end{aligned}$$

при $z = h_z$

$$r_{xz}^+ u(x, y, h_z) + \tau_{xz}(x, y, h_z) = r_{xz}^+ \Delta_{xz}^+(x, y) + q_{xz}^+(x, y),$$

$$r_{yz}^+ v(x, y, h_z) + \tau_{yz}(x, y, h_z) = r_{yz}^+ \Delta_{yz}^+(x, y) + q_{yz}^+(x, y),$$

$$r_{zz}^+ w(x, y, h_z) + \sigma_{zz}(x, y, h_z) = r_{zz}^+ \Delta_{zz}^+(x, y) + q_{zz}^+(x, y).$$

Якщо в якомусь співвідношенні (2.6), (2.7) припустити що $r = 0$, то отримаємо статичну граничну умову, а при $r \rightarrow \infty$ умова буде кінематичною, якщо $r \neq 0$, то це буде мішана гранична умова [163, 164].

Граничні умови для вісесиметричного тіла.

Розглядаємо не тонку кільцеву пластину (Рис. 2.13), для елементарної частини об'єкту – розрахункової області, що наведена в вісесиметричних осях позначимо розміри (Рис. 2.14). На кожній з її шести граничних площин змодельємо граничні умови за допомогою стержнів заданої жорсткості, за аналогією до тривимірної задачі в загальному вигляді.

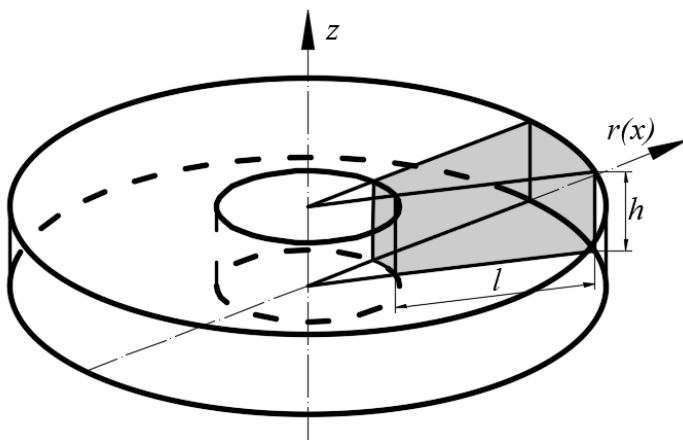


Рис. 2.13 Нетонка кільцева пластина

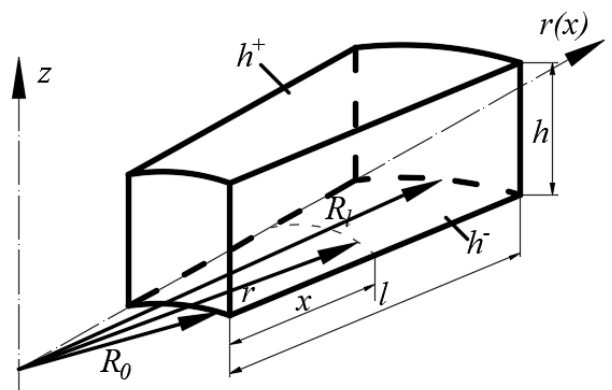


Рис. 2.14 Обрана розрахункова область

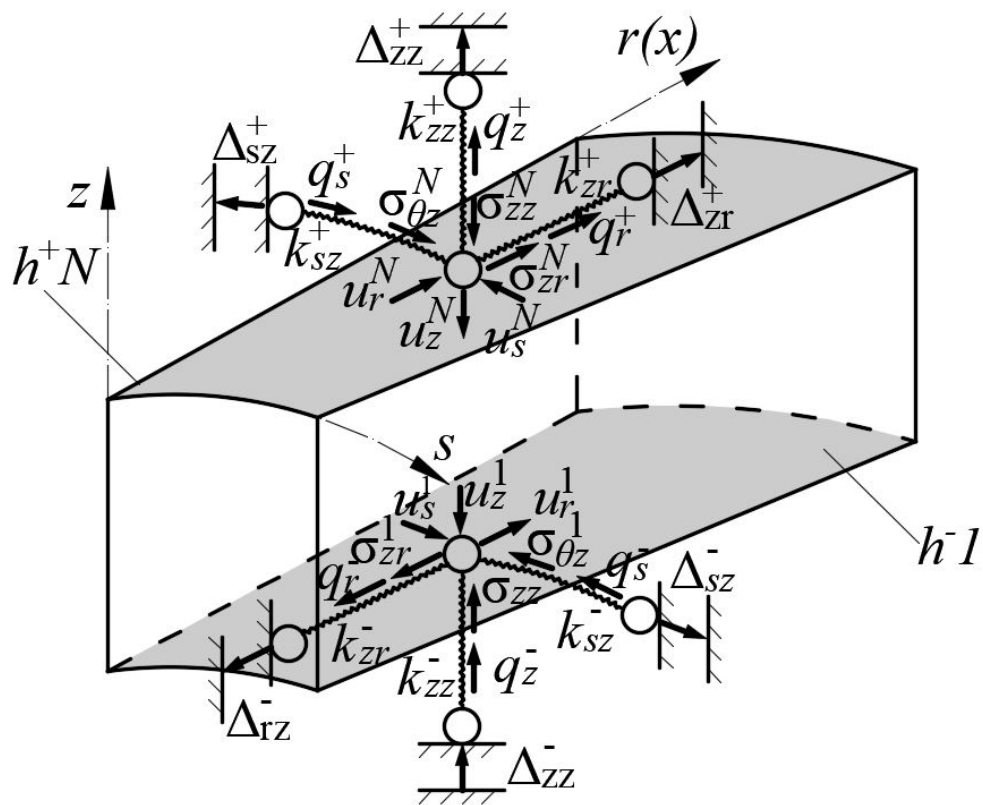


Рис. 2.15 Умови закріплення та навантаження тривимірної вісесиметричної моделі об'єкту на торцевих гранях

Запишемо рівняння рівноваги відносно осей для торцевих поверхонь:

$$\begin{aligned}
 \Sigma r = 0; \quad \sigma_{zr}^N + q_r^+(x) + k_{zr}^+ (\Delta_{zr}^+(x) + u_r^N(x)) &= 0; \\
 \Sigma z = 0; \quad -\sigma_{zr}^N - q_z^+(x) + k_{zr}^+ (\Delta_{zr}^+(x) - u_z^N(x)) &= 0; \\
 \Sigma s = 0; \quad -\sigma_{\theta z}^N - q_s^+(x) + k_{sz}^+ (-\Delta_{sz}^+(x) - u_s^N(x)) &= 0; \\
 \Sigma r = 0; \quad \sigma_{zr}^1(x) + q_r^-(x) + k_{zr}^- (\Delta_{zr}^-(x) - u_r^1(x)) &= 0; \\
 \Sigma z = 0; \quad \sigma_{zz}^1(x) + q_z^-(x) + k_{zz}^- (\Delta_{zz}^-(x) - u_z^1(x)) &= 0; \\
 \Sigma s = 0; \quad -\sigma_{\theta z}^1 - q_s^-(x) + k_{sz}^- (\Delta_{sz}^-(x) + u_s^1(x)) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

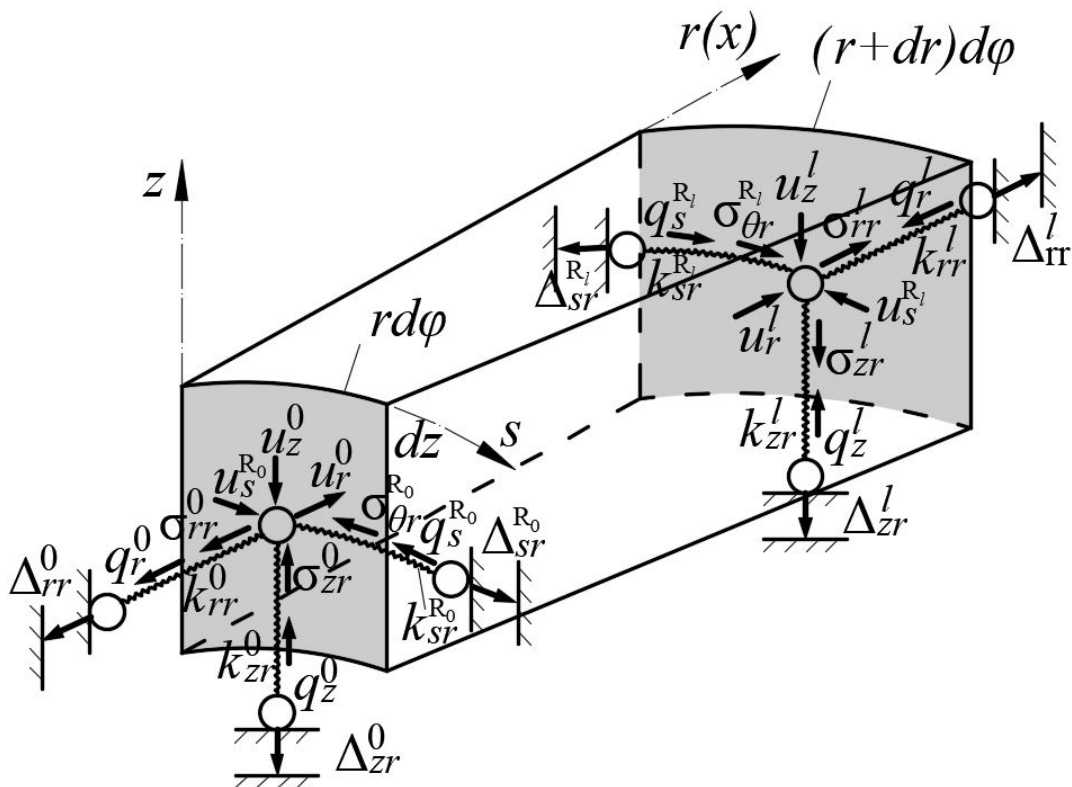


Рис. 2.16 Умови закріплення та навантаження тривимірної вісесиметричної моделі об'єкту на бічних гранях

Запишемо рівняння рівноваги відносно осей для бічних поверхонь:

$$\begin{aligned}
 \Sigma r = 0; \sigma_{rr}^0(z) + q_r^0 + k_{rr}^0 (\Delta_{rr}^0(z) - u_r^0(z)) &= 0; \\
 \Sigma z = 0; \sigma_{zr}^0(z) + q_z^0 + k_{zr}^0 (\Delta_{zr}^0(z) - u_z^0(z)) &= 0; \\
 \Sigma s = 0; -\sigma_{\theta r}^{R_0}(z) + q_s^{R_0} + k_{sr}^{R_0} (\Delta_{sr}^{R_0}(z) + u_s^{R_0}(z)) &= 0; \\
 \Sigma r = 0; -\sigma_{rr}^l(z) + q_r^l + k_{rr}^l (\Delta_{rr}^l(z) - u_r^l(z)) &= 0; \\
 \Sigma z = 0; -\sigma_{zr}^l(z) + q_z^l + k_{zr}^l (\Delta_{zr}^l(z) - u_z^l(z)) &= 0; \\
 \Sigma s = 0; \sigma_{\theta r}^{R_l}(z) + q_s^{R_l} + k_{sr}^{R_l} (-\Delta_{sr}^{R_l}(z) - u_s^{R_l}(z)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

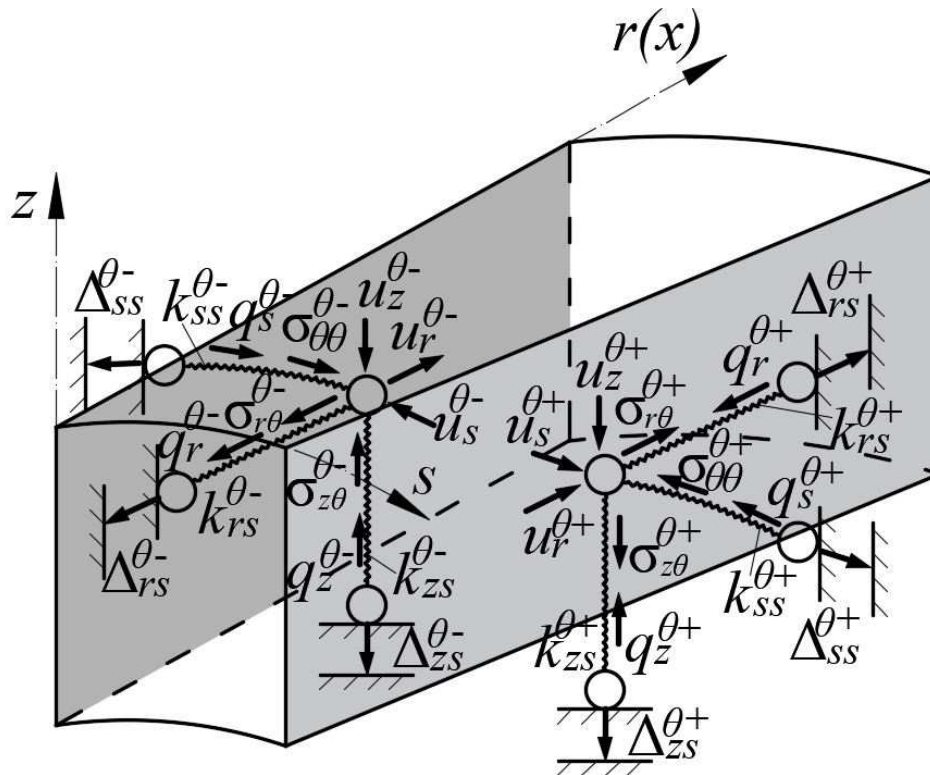


Рис. 2.17 Умови закріплення та навантаження тривимірної вісесиметричної моделі об'єкту на бічних гранях у коловому напрямку

Запишемо рівняння рівноваги відносно осей для бічних поверхонь у коловому напрямку:

$$\begin{aligned}
 \Sigma r = 0; & -\sigma_{r\theta}^{\theta^-}(s) + q_r^{\theta^-} + k_{rs}^{\theta^-} \left(-\Delta_{rs}^{\theta^-}(s) - u_r^{\theta^-}(s) \right) = 0; \\
 \Sigma z = 0; & \sigma_{z\theta}^{\theta^-}(s) + q_z^{\theta^-} + k_{zs}^{\theta^-} \left(-\Delta_{zs}^{\theta^-}(s) - u_z^{\theta^-}(s) \right) = 0; \\
 \Sigma s = 0; & \sigma_{\theta\theta}^{\theta^-}(s) + q_s^{\theta^-} + k_{ss}^{\theta^-} \left(-\Delta_{ss}^{\theta^-}(s) - u_s^{\theta^-}(s) \right) = 0; \\
 \Sigma r = 0; & \sigma_{r\theta}^{\theta^+}(s) - q_r^{\theta^+} + k_{rs}^{\theta^+} \left(\Delta_{rs}^{\theta^+}(s) + u_r^{\theta^+}(s) \right) = 0; \\
 \Sigma z = 0; & -\sigma_{z\theta}^{\theta^+}(s) - q_z^{\theta^+} + k_{zs}^{\theta^+} \left(-\Delta_{zs}^{\theta^+}(s) - u_z^{\theta^+}(s) \right) = 0; \\
 \Sigma s = 0; & -\sigma_{\theta\theta}^{\theta^+}(s) - q_s^{\theta^+} + k_{ss}^{\theta^+} \left(\Delta_{ss}^{\theta^+}(s) + u_s^{\theta^+}(s) \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Граничні умови для задач що враховують вісесиметричну геометрію об'єктів.

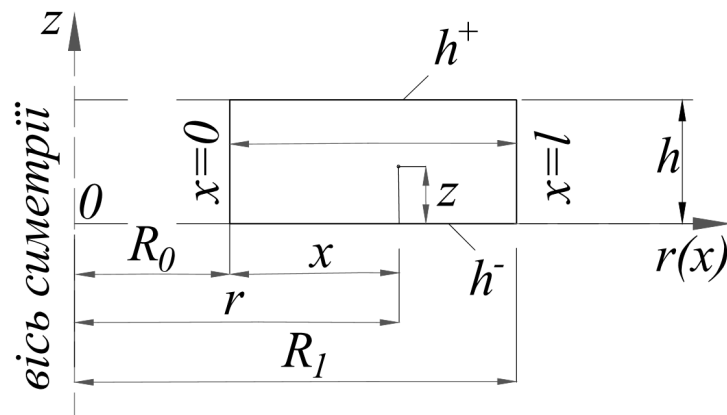


Рис 2.18 Осьовий переріз кільцевої пластини

Розглядаємо осьовий переріз не тонкої кільцевої пластини (Рис. 2.13), оскільки по кутовій координаті можна врахувати осьову симетрію, то задачу можна звести до плоскої (Рис. 2.18) в площині $r0z$.

Запишемо вирази напружень з рівнянь рівноваги відносно осей для торцевих поверхонь (Рис. 2.19):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz}^1(x) &= k_{rz}^- u_r^1(x) - k_{rz}^- \Delta_{rz}^-(x) - q_r^-(x); \\
 \sigma_{zz}^1(x) &= k_{zz}^- u_z^1(x) - k_{zz}^- \Delta_{rz}^-(x) - q_z^-(x); \\
 \sigma_{rz}^N(x) &= -k_{rz}^+ u_r^N(x) + k_{rz}^+ \Delta_{rz}^+(x) + q_r^+(x); \\
 \sigma_{zz}^N(x) &= -k_{zz}^+ u_z^N(x) + k_{zz}^+ \Delta_{zz}^+(x) + q_z^+(x).
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

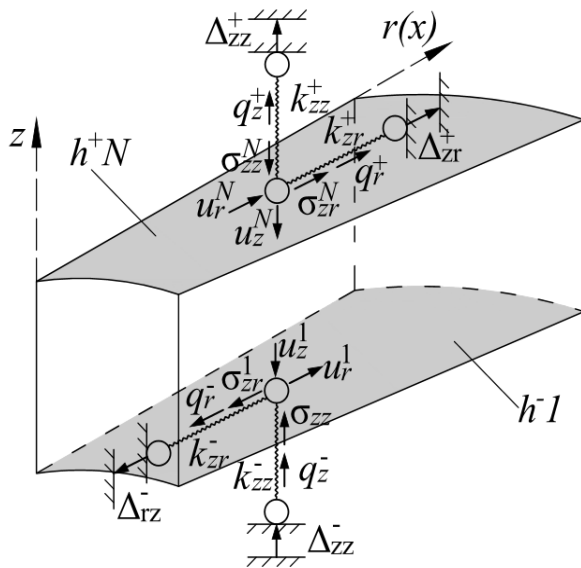


Рис 2.19 Граничні умови на торцевих поверхнях

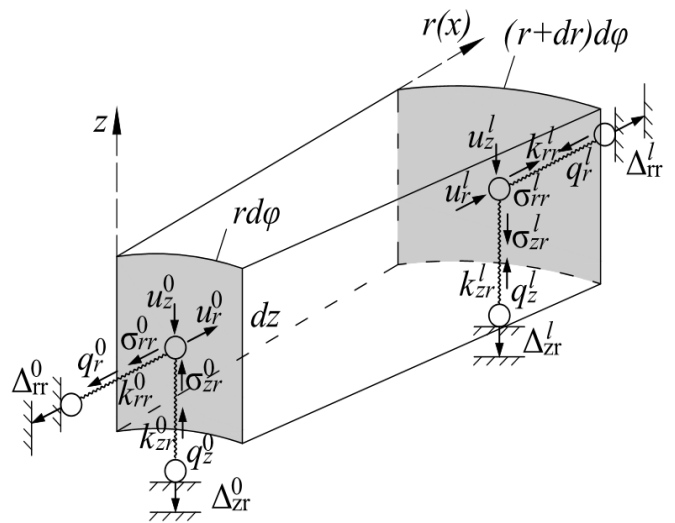


Рис 2.20 Граничні умови на бічних поверхнях

Запишемо вирази для напружень з рівнянь рівноваги відносно осей для бічних поверхонь (Рис. 2.20):

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^0(z) &= -k_{rr}^0 u_r^0(z) + k_{rr}^0 \Delta_{rr}^0(z) + q_r^0(z); \\
 \sigma_{zr}^0(z) &= -k_{zr}^0 u_z^0(z) + k_{zr}^0 \Delta_{zr}^0(z) + q_z^0(z); \\
 \sigma_{rr}^l(z) &= k_{rr}^l u_r^l(z) - k_{rr}^l \Delta_{rr}^l(z) - q_r^l(z); \\
 \sigma_{zr}^l(z) &= k_{zr}^l u_z^l(z) - k_{zr}^l \Delta_{zr}^l(z) - q_z^l(z).
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Граничні умови для двовимірних задач (плоска задача).

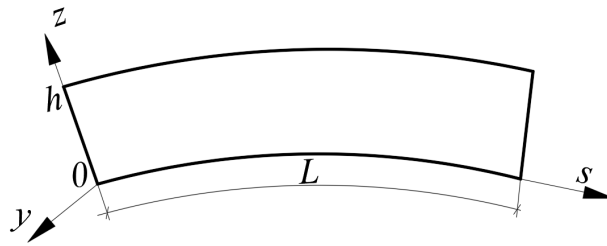


Рис. 2.21 Двовимірна модель об'єкту криволінійної форми.

Навантаження та геометрія об'єкту постійні по координаті z , тому задача зводиться до плоскої деформації. Для зручності розрахунку проведемо заміну, перейдемо до нової системи координат y, s , де $y \in [0; h]$ і $s \in [0; L]$ (Рис. 2.21).

при $y = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_r^1 &= -q_y^1 - \Delta_y^1 \cdot k_s^1 + u^1 \cdot k_y^1, \\ \tau_{\theta r}^1 &= -q_s^1 - \Delta_s^1 \cdot k_y^1 + v^1 \cdot k_y^1,\end{aligned}\tag{2.13}$$

при $y = h$

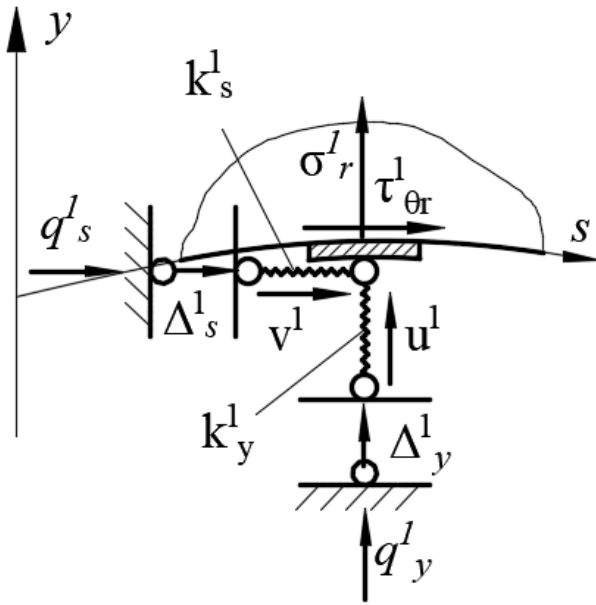
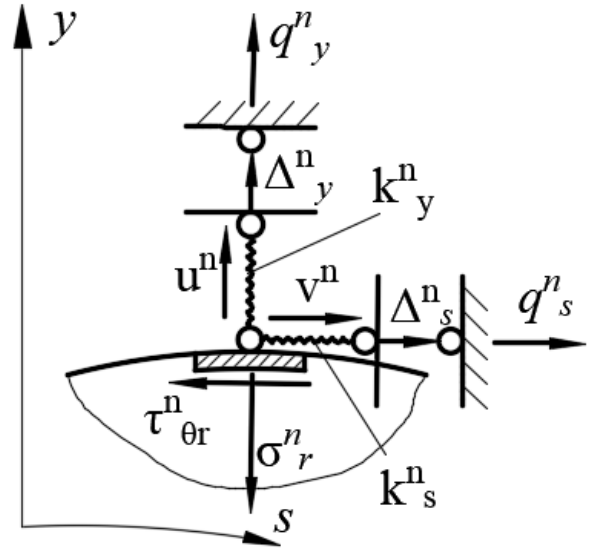
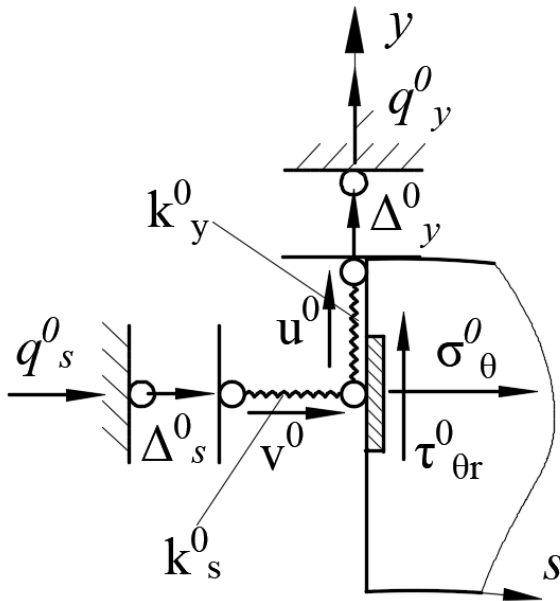
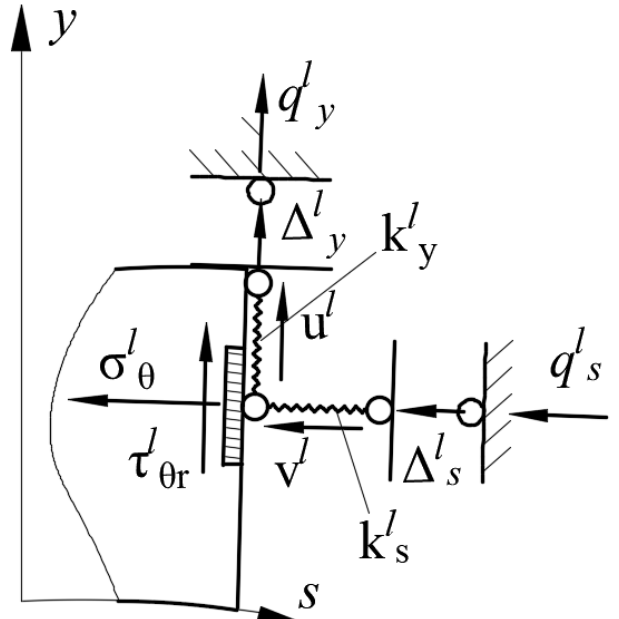
$$\begin{aligned}\sigma_r^n &= q_y^n + \Delta_y^n \cdot k_y^n - u^n \cdot k_y^n, \\ \tau_{\theta r}^n &= q_s^n - v^n \cdot k_s^n + \Delta_s^n \cdot k_s^n.\end{aligned}$$

при $s = 0$

$$\begin{aligned}q_s^l - \sigma_{\theta}^l + \Delta_s^l \cdot k_s^l - v^l \cdot k_s^l &= 0, \\ q_y^l - \tau_{\theta r}^l + \Delta_y^l \cdot k_y^l - u^l \cdot k_y^l &= 0,\end{aligned}\tag{2.14}$$

при $s = L$

$$\begin{aligned}q_y^0 + \tau_{\theta r}^0 - u^0 \cdot k_y^0 + \Delta_y^0 \cdot k_y^0 &= 0, \\ -v^0 \cdot k_s^0 + q_s^0 + \sigma_{\theta}^0 + \Delta_s^0 \cdot k_s^0 &= 0.\end{aligned}$$

Рис. 2.22 Переріз при $y = 0$ Рис. 2.23 Переріз при $y = h$ Рис. 2.24 Переріз при $s = 0$ Рис. 2.25 Переріз при $s = L$

Вихідні рівняння є системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, які передбачається розв'язувати чисельно-аналітичним методом прямих. Класичний варіант методу прямих використовує чисельний метод скінчених різниць для зниження вимірності вихідних рівнянь по одній з просторових змінних (як правило

поперечній z) та подальшому розрахунку одновимірної граничної задачі (це головна особливість методу прямих) аналітичними або наближеними методами.

2.4.1 Плоска деформація. Перетворення рівнянь до задачі Коші.

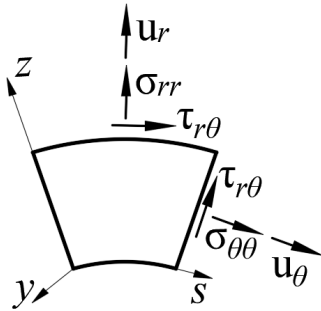


Рис. 2.26 Напруження в елементі при плоскій деформації

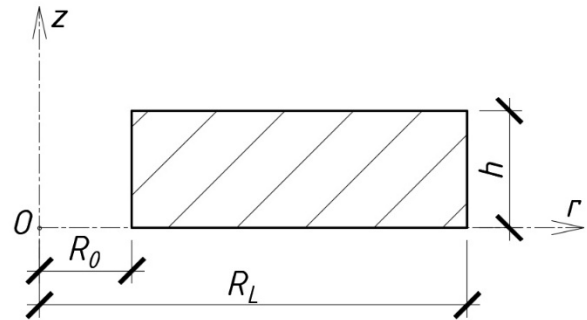


Рис. 2.27 Осьовий переріз вісесиметричного тіла.

Для плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) диференціальні рівняння зводяться до вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial s} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + R = 0; \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial s} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \theta = 0; \quad (2.16)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} + \frac{u_r^*}{r} \right); \quad (2.17)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left(\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} + \frac{u_r^*}{r} \right); \quad (2.18)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} + \frac{u_r^*}{r} \right); \quad (2.19)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\partial u_r^*}{\partial s} + \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} - \frac{2u_\theta^*}{r}. \quad (2.20)$$

Тут проведено заміну $\partial s = r\theta$, $ds = rd\theta$, $u_r^* = \mu u_r$, $u_\theta^* = \mu u_\theta$. По координаті r виконується зниження вимірності, а по s використовується метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова відносно функцій переміщень u_θ^* , u_r^* яким відповідають функції напружень $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$.

$$\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{\theta\theta} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{u_r^*}{r}; \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial s} = -\tau_{r\theta} - \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} + \frac{2u_\theta^*}{r}; \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - \theta; \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - R; \quad (2.24)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} + \frac{u_r^*}{r} \right); \quad (2.25)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} + \frac{u_r^*}{r} \right). \quad (2.26)$$

тут $u_\theta^* \rightarrow \sigma_{\theta\theta}$ $u_r^* \rightarrow \tau_{r\theta}$

В системі координат y,s , де навантаження і геометрія постійні по координаті z , граничні умови описані формулами 2.13 та 2.14.

Розглянемо вісесиметричну задачу теорії пружності як випадок плоскої деформації. По коловій координаті функції не змінюються враховуючи вісесиметричне навантаження $\frac{df}{d\theta} = 0$. Диференціальні рівняння залежать від функцій σ_{rr} , τ_{rz} , $\sigma_{\theta\theta}$, u_r , u_θ , запишемо їх:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + R = 0; \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0; \quad (2.28)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{u_r^*}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \quad (2.29)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{u_r^*}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \quad (2.30)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{u_r^*}{r} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \quad (2.31)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \frac{2\partial u_r^*}{\partial z}. \quad (2.32)$$

Граничні умови для вісесиметричної задачі в осях rOz описані формулами 2.11 та 2.12

При такій постановці існує 2 варіанти зниження вимірності – по координаті z та координаті r .

- 1) Зниження по координаті z : задача Коші розв'язується відносно функцій u_r^* , u_z^* , σ_{rr} , τ_{rz} .

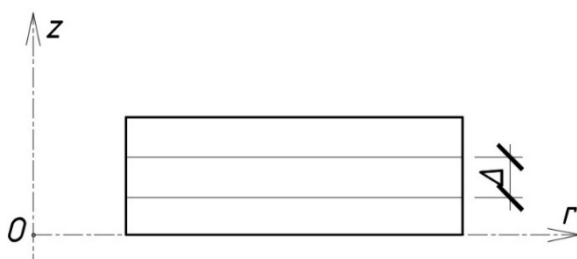


Рис. 2.28 Поділ лініями осьового перерізу по координаті z .

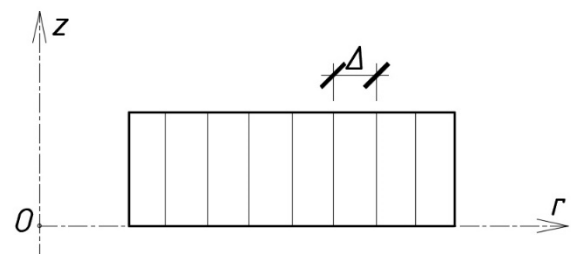


Рис. 2.29 Поділ лініями осьового перерізу по координаті r .

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial r} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} - \frac{\lambda u_r^*}{\mu r} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial u_z^*}{\partial r} = -\tau_{rz} - \frac{2\partial u_r^*}{\partial z}; \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - R; \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r} - Z; \quad (2.36)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda u_r^*}{\mu r} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \quad (2.37)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{u_r^*}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_z^*}{\partial z}. \quad (2.38)$$

2) Зниження вимірності по координаті r :

Задача Коші розв'язується відносно функції u_z^* , u_r^* , σ_z , τ_{rz} .

$$\frac{\partial u_z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{zz} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} - \frac{\lambda u_r^*}{\mu r}; \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial z} = -\tau_{rz} - \frac{\partial u_z^*}{\partial r}; \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r} - Z; \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - R; \quad (2.42)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda u_r^*}{\mu r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \quad (2.43)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{u_r^*}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_z^*}{\partial z}. \quad (2.44)$$

Граничні умови для вісесиметричної задачі в осях rOz описані формулами 2.11 та 2.12.

2.4.2 Перетворення рівнянь для зниження вимірності по осевій координаті.

Зважаючи на актуальність та великий об'єм розрахунків задачі в якості вихідних рівнянь розглядаємо просторову задачу теорії пружності для вісесиметричного тіла в циліндричній системі координат [159]:

В якості вихідних розрахункових рівнянь приймаємо рівняння (2.1 – 2.4), які є системою диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку (тобто в формі Коші).

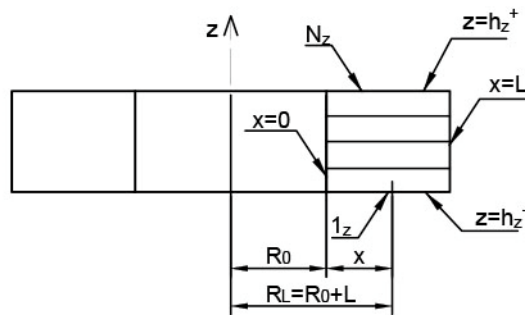


Рис. 2.30 Область у вісесиметричному тілі

Ці рівняння визначені у вісесиметричній області $D = [R_0, R_L] \otimes [0, 2\pi] \otimes [h_z^-, h_z^+]$ Рис. 2.30, яка отримується поворотом області $D_0 = [0 \leq x \leq R] \otimes [h_z^-, h_z^+]$ на кут $\theta \in [0, 2\pi]$

Зручно замість координати r використовувати координату $x \in [0, L]$. В зв'язку з лінійною заміною змінних $r = R_0 + x$ маємо тотожність $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}$.

Остаточно вихідні рівняння запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{R_0 + x} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{R_0 + x} \right) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta} - \frac{1}{R_0 + x} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{R_0 + x}; \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{\mu} \tau_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z}. \\
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{R_0 + x} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R_0 + x} - R; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{R_0 + x} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} - \frac{2}{R_0 + x} \tau_{r\theta} - \theta; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{R_0 + x} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{R_0 + x} - Z.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Як бачимо, система таких рівнянь – це ті рівняння, в яких в якості однієї складової є похідна від розрахункової функції по координаті r (або x) – передбачається, що ця координата залишиться єдиною просторовою координатою при зниженні вимірності рівнянь по двох інших координатах.

Таким чином замість 15 вихідних невідомих та 15 рівнянь редукувати будемо 6 рівнянь, причому головні невідомі – переміщення u_r, u_θ, u_z та узагальнені сили, які відповідають цим узагальненим переміщенням, напруження $\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$. Але в рівняннях (2.2), (2.3) залишаються ще інші напруження - $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{\theta z}$.

Напруження $\sigma_{\theta\theta}$ та σ_{zz} як і одне з головних невідомих σ_r є лінійними комбінаціями трьох компонентів тензора деформацій $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$, тому їх можна записати через одне з цих напружень та деформацій. З виразу для σ_r системи рівнянь (2.2) знаходимо:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{zz}. \tag{2.47}$$

Підставляючи ε_{rr} в вирази для $\sigma_{\theta\theta}$ та σ_{zz} отримаємо необхідні формули

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr} + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \tau_{rz} &= \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right).\end{aligned}\tag{2.48}$$

При розв'язанні рівнянь, що описують НДС вісесиметричних тіл в циліндричній системі координат, як правило, використовують зниження вимірності по окружній координаті і θ . Як вище зазначалось, загальний НДС поділяють на кососиметричний відносно центральної осі стан і симетричний стан.

Симетричний стан досліджують за допомогою розкладу по системі косинусів:

$$\{1, \cos\theta, \cos 2\theta, \dots, \cos n\theta, \dots\}$$

Якщо задані впливи можна представити у розкладі по косинусу, це ортогональна система функцій, але не нормована. Першим елементом цієї системи є $\cos 0^\circ = 1$. Цій функції відповідає вісесиметричний напружено-деформований стан. В цьому стані за рахунок осової симетрії вихідні рівняння значно скорочуються: $u_\theta = 0$, $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{zz} = 0$, $\varepsilon_{rz} = 0$, $\varepsilon_{\theta z} = 0$ і рівняння набирають вигляду:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{R_0+x}u_r + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}, \text{ або } \sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr} + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{u_r}{r} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{R_0+x}u_r + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R_0+x} + R &= 0; \\ \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{R_0+x} + Z &= 0.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Рівняння (2.49) при $R_0 \rightarrow \infty$ перетворюються на вихідні рівняння плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація). А якщо при цьому зробити відому заміну коефіцієнтів Ляме:

$$\lambda \rightarrow \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \mu \rightarrow \mu^* = \mu$$

то отримаємо рівняння, що описують плоский напружений стан в тонких пластинах.

Рівняння (2.49) перепишемо в зручному для подальшого зниження вимірності вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\sigma_{rr}}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{\tau_{rz}}{\mu} - \frac{\partial u_r}{\partial z}; \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R_0 + x} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - R;$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{R_0 + x} - Z.$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{r} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \tag{2.51}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{r} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Слід зазначити, що основна маса досліджень статички вісесиметричних тіл присвячена саме дослідженню вісесиметричного НДС. За допомогою модифікованого методу прямих можна наближено досліджувати напружено-деформований вісесиметричний стан при термопружних впливах.

В якості вихідних рівнянь будемо розглядати рівняння (2.49): будемо знижувати вимірність розрахункових рівнянь по змінній z . Редуковані рівняння будемо будувати “в коефіцієнтах”. Для цього вибирається система базисних функцій

– в даному випадку «функції-кришки», які пов'язані з вибраними прямими (Рис. 2.30), які є локально зосередженими. Тут N_z - кількість прямих включно з граничними номерами $1_z, N_z$. Будь-яка розрахункова функція, що залежить від змінної z розглядається як лінійна комбінація базисних функцій

$$f(z) = f^i \cdot \varphi_i(z). \quad (2.52)$$

тут по індексу, що повторюються (причому пара індексів розташована в різних рівнях) передбачається підсумування в межах зміни індексів (узгодження Ейнштейна).

Сукупність таких функцій (2.52) утворює лінійний простір, на елементах якого визначено скалярний добуток:

$$(f(z), g(z)) = \int_{h_z^-}^{h_z^+} f(z) \cdot g(z) dz. \quad (2.53)$$

Редуковані рівняння будемо в коефіцієнтах, тому перше з рівнянь (2.50) множимо скалярно на елемент взаємного базису φ^i :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} = \frac{\sigma_{rr}}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varphi^i(z) \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial u_r^i}{\partial x} = \frac{\sigma_{rr}^i}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}, \varphi^i(z) \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Тут враховано: $\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}, \varphi^i(z) \right) = \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial u_r}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-}^{h^+} u_r(x) dz = \frac{\partial}{\partial x} u_r^i(x)$, а похідну $\frac{\partial}{\partial x}$

винесено за знак інтегралу, оскільки інтегрування ведеться по z . До рівняння входять

алгебраїчно величини σ_r та u_r які інтегруванням перетворюються на індексні величини, в даному випадку коефіцієнти.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}, \varphi^i(z) \right) &= \int_{h_z^-}^{h_z^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \varphi^i(z) dz = \int_{h_z^-}^{h_z^+} \frac{\partial u_z^\alpha}{\partial z} \varphi_\alpha(z) \cdot g^{ij} \cdot \varphi_j dz = \\ &= g^{ij} u_z^\alpha \int_{h_z^-}^{h_z^+} \varphi_j(z) \cdot \varphi'_\alpha(z) dz = g^{ij} b_{j\alpha} \cdot u_z^\alpha. \end{aligned} \quad (2.55)$$

тут позначено $b_{j\alpha} = \int_{h_z^-}^{h_z^+} \varphi_j(z) \cdot \varphi'_\alpha(z) dz$

Остаточно редуковане рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x} = \frac{\sigma_{rr}^i}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha. \quad (2.56)$$

Аналогічно отримуємо:

$$\frac{\partial u_r^i}{\partial x} = \frac{\tau_{rz}^i}{\mu} - g^{ij} b_{j\alpha} u_r^\alpha. \quad (2.57)$$

Редукуємо третє рівняння:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R_0 + x} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - R + \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \varphi^i(z) \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial x} = -\frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{R_0 + x} - \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \varphi^i(z) - R + \rho \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Тут обчислюємо скалярний добуток

$$\left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \varphi^i(z) \right) = \int_{h_z^-}^{h_z^+} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \cdot \varphi^i(z) dz = \int_{h_z^-}^{h_z^+} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \cdot g^{ij} \varphi_j dz. \quad (2.59)$$

На відміну від попереднього під знаком інтегралу стоїть похідна по z від компоненти тензору напружень. Підставляти безпосередньо під стан похідної розклад τ_{rz} по базису не можна, оскільки в рівняннях термопружності переміщення двічі диференційовані, а напруження один раз. В роботах Марчук та Агошков [108] радять “пом’якшувати” інтегрування – застосовувати інтегрування частинами. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{h_z^-}^{h_z^+} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \cdot g^{ij} \varphi_j dz &= \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz = dv; \quad v = \tau_{rz} \\ \varphi_j = u; \quad du = \varphi_j' dz \end{array} \right| = \\ &= g^{ij} \left[\left(\tau_{rz} \cdot \varphi_j(z) \right) \Big|_{h_z^-}^{h_z^+} - \int_{h_z^-}^{h_z^+} \tau_{rz} \cdot \varphi_j' dz \right] = \\ &= g^{ij} \left[\left(\tau_{rz}^{N_z} \cdot \delta_j^{N_z} - \tau_{rz}^{1_z} \cdot \delta_j^{1_z} \right) - g^{ij} b_{\alpha j} \tau_{rz}^\alpha \right] = g^{iN_z} \tau^{N_z} - g^{i1_z} \tau^{1_z} - g^{ij} b_{\alpha j} \tau_{rz}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Тут позначимо $b_{\alpha j} = \int_{h_z^-}^{h_z^+} \varphi_\alpha(z) \cdot \varphi_j(z) dz$; використано тензорну операцію заміни індексу: $g^{ij} \delta_j^k = g^{ik}$, по індексах N_z та 1_z які повторюються, немає підсумування, тому що це фіксовані значення, а не поточні індекси, крім того, вони на одному рівні. Остаточно редуковане рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial x} = \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{R_0 + x} - g^{iN_z} \tau_{rz}^{N_z} + g^{i1_z} \tau_{rz}^{1_z} + g^{ij} b_{\alpha j} \tau_{rz}^\alpha - R^i. \quad (2.61)$$

Слід зазначити, що матриця $\{b_{\alpha j}\}$ є транспонованою до $b_{j\alpha}$

Аналогічно редукується четверте рівняння

$$\frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial x} = -g^{iN_z} \sigma_z^{N_z} + g^{i1_z} \sigma_z^{1_z} + g^{ij} b_{\alpha j} \sigma_z^\alpha - \frac{\tau_{rz}^i}{R_0 + x} - Z^i. \quad (2.62)$$

Як впливає з вигляду редукованих рівнянь рівноваги до них входять напруження $\tau_{rz}^{1_z}$, $\tau_{rz}^{N_z}$, $\sigma_z^{1_z}$, $\sigma_z^{N_z}$, які додають силові та кінематичні впливи на граничних поверхнях тіла з зовнішнього середовища. Їх враховуємо за допомогою граничних умов.

Граничні умови на площадках $z = h_z^-$ та $z = h_z^+$.

Розглядаємо граничні умови загального вигляду, вводячи до них реакції умовних в'язей заданої жорсткості k . Оскільки рівняння вісесиметричної задачі визначені в плоскій області $D_0 = [0, L] \otimes [h_z^-, h_z^+]$, на граничні поверхні $x = 0, x = L, z = h_z^-, h_z^+$ діють силові та кінематичні зовнішні впливи. Силові впливи $q_{zr}^0, q_{rr}^L, q_{zr}^+, q_{zz}^-$, та кінематичні впливи ("осадка опор" $\Delta_{rz}^0, \Delta_{zz}^L, \Delta$, враховуються також переміщення відповідних граничних точок (тіла u_r, u_z при врахуванні кінематичних впливів).

Граничні умови в кінці треба поділити по $\sqrt{1+k^2}$ і отримуємо граничні умови, яким мають задовольняти редуковані статичні рівняння.

Статичні рівняння (відкинуті інерційні складові) записуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{du_r^i}{dx} &= \frac{\sigma_{rr}^i}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha; \\ \frac{du_z^i}{dx} &= \frac{\tau_{rz}^i}{\mu} - g^{ij} b_{j\alpha} u_r^\alpha; \\ \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} &= \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{R_0 + x} - g^{iN_z} \tau_{rz}^{N_z} + g^{i1_z} \tau_{rz}^{1_z} + g^{ij} b_{\alpha j} \tau_{rz}^\alpha - \bar{R}^i; \\ \frac{d\tau_{rz}^i}{dx} &= -g^{iN_z} \sigma_z^{N_z} + g^{i1_z} \sigma_z^{1_z} + g^{ij} b_{\alpha j} \sigma_z^\alpha - \frac{\tau_{rz}^i}{R_0 + x} - \bar{Z}^i. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Ця система рівнянь побудована в формі Коші, що є необхідним для застосування, а вірніше кажучи адаптації сучасних чисельних методів розв'язування статичних граничних задач. Невідомі вектор-функції розрахункових редукованих рівнянь повинні задовільняти граничні умови (2.8-2.10)

Граничні умови (2.8-2.10) записані загальному вигляді, що дозволяє розглядати будь-які умови опирання.

Для розв'язування термопружних задач система має включати сумарні переміщення від силових та температурних навантажень $\bar{R}_t, \bar{\theta}_t$ (2.63):

$$\begin{aligned} \frac{du_r^i}{dx} &= \frac{\sigma_r^i}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha; \\ \frac{du_z^i}{dx} &= \frac{\tau_{rz}^i}{\mu} - g^{ij} b_{j\alpha} u_r^\alpha; \\ \frac{d\sigma_r^i}{dx} &= \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{R_0 + x} - g^{iN_z} \tau_{rz}^{N_z} + g^{i1_z} \tau_{rz}^{1_z} + g^{ij} b_{\alpha j} \tau_{rz}^\alpha - \bar{R}_t^i; \\ \frac{d\tau_{rz}^i}{dx} &= -g^{iN_z} \sigma_z^{N_z} + g^{i1_z} \sigma_z^{1_z} + g^{ij} b_{\alpha j} \sigma_z^\alpha - \frac{\tau_{rz}^i}{R_0 + x} - \bar{\theta}_t^i. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Перша термопружна задача – знаходження частот і форм власних коливань товстої кільцевої плити, в даному випадку – йдеться про дослідження вісесиметричних коливань.

Для цього опускаються усі зовнішні впливи – розглядається однорідна система рівнянь, а розв'язок шукається у вигляді:

$$\begin{aligned} u_r^i(x, t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi), \\ u_z^i(x, t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Де ω - частота власних коливань, A_1 , A_2 - амплітуди власних коливань. Термопружна задача перетворюється на квазі статичну задачу, яка розв'язується чисельно методом покрокового пошуку.

Для розв'язування нестационарних коливань система рівнянь (2.64) крім граничних умов доповнюється початковими умовами, які отримуємо з вихідних початкових умов зниженням їх вимірності на змінній z .

Крім того, розв'язування гранично-початкових задач математичної фізики виконується, як правило, скінчено різницевиими методами із застосуванням явних різницевих схем. А це передбачає запис вирішувальних рівнянь у вигляді системи рівнянь другого порядку. У нашому випадку необхідно привести редуковану систему рівнянь до системи рівнянь другого порядку відносно переміщень (коефіцієнтів переміщень $u_r^i(x,t)$ та $u_z^i(x,t)$).

Щоб побудувати такі рівняння, треба виходити з рівнянь у формі Коші з додаванням похідних по часовій координаті і записувати їх у такій формі: - з правої частини цих рівнянь виключити напруження, записавши їх через переміщення. В результаті це будуть, по суті, редуковані рівняння Ляме (рівняння рівноваги, записані в переміщеннях (а у нас рівняння рівноваги в коефіцієнтах переміщень). До цих рівнянь додаються редуковані граничні умови в коефіцієнтах переміщень. В граничних умовах є перші похідні від коефіцієнтів переміщень. Крім того формуються початкові умови – зниження вимірності вихідних початкових умов в коефіцієнтах.

2.4.3 Просторова задача, перетворення рівнянь для зниження вимірності.

Для опису поставлених задач використовуються класичні диференційні рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат [169]. Використаємо співвідношення Коші, що описують взаємодію між деформаціями та переміщеннями (2.1) та рівняння узагальненого закону Гука (2.2), є алгебраїчними співвідношеннями, і їх можна врахувати виключивши компоненти тензора деформації з системи визначальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z};\end{aligned}\tag{2.66}$$

u_r, u_θ, u_z - переміщення у відповідних напрямках.

λ, μ - коефіцієнти Ляме,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Оскільки нормальні напруження є лінійними комбінаціями трьох нормальних деформацій, то $\sigma_{\theta\theta}$ та σ_{zz} можна представити через σ_{rr} та ці деформації:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{zz}; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{zz}.\end{aligned}\tag{2.67}$$

Підставляючи ε_{rr} до $\sigma_{\theta\theta}$ та σ_{zz} отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{zz}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{zz}; \\ \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.68}$$

Головні вихідні рівняння:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\text{ТУТ } \frac{\partial u_r}{\partial r}), \text{ з заміною } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \\ \tau_{r\theta} &= (\text{ТУТ } \frac{\partial u_\theta}{\partial r}), \\ \tau_{rz} &= (\text{ТУТ } \frac{\partial u_z}{\partial r}).\end{aligned}\tag{2.69}$$

невідомі u_r, u_θ, u_z

Три рівняння термопружної рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R_t &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \theta_t &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + Z_t &= 0.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Після зниження вимірності по координаті z та побудови редукованих рівнянь по z необхідно перейти до зниження вимірності по θ . Тут виникає певна проблема зниження вимірності по θ виконується методом скінченних інтегральних перетворень. Відповідне перетворення виконується для диференціальних рівнянь другого порядку. Це так зване косинус-перетворення (для симетричного по θ НДС) та синусне-перетворення (для кососиметричного по θ НДС). Щоб застосувати такі перетворення необхідно редуковані по z рівняння перебудувати – вилучити з рівнянь напруження, виражаючи їх через моменти переміщень. Знаходимо систему з трьох рівнянь – кожне другого порядку по x та θ .

Після цього застосовуються (окремо) \cos -перетворення та \sin -перетворення з індексом $n - \cos$ та $m - \sin$. Оскільки $\cos n\theta$ та $\sin m\theta$ є власними функціями

диференціального оператора другого порядку $\frac{d^2 w}{d\theta^2} = \lambda w$, де λ - власне число, то отримаємо три перетворених редукованих рівняння, з індексом n (для \cos , або m – для \sin), тобто тут окремі трійки звичайних диференціальних рівнянь (по змінній x , тому що інші змінні (z та θ) в результаті перетворилися на індекси: змінна z в результаті узагальненого методу прямих змінилась на N_z індексів i, j, \dots , а змінна θ - на n чи m фіксовані значення для кожної трійки редукованих рівнянь, тобто маємо не скінченну кількість таких трійок. Їх необхідно повернути до систем звичайних диференціальних рівнянь і розв'язувати методом Годунова (в разі статичних рівнянь), або за допомогою явних різницевих схем.

З редукованих рівнянь випливають різні спрощені постановки задач – вісесиметрична та інші.

Простіше за все у циліндричній системі координат розглядати тіло, обмежене координатними поверхнями циліндричної системи, а це нетонка кільцева пластина. Найпростіше, щоб редуковані рівняння були залежними від координати r , а краще x , або ще від часової координати. В такій тривимірній (по просторових змінних) задачі можна знизити на дві змінні вимірність – на відміну від прямокутних координат, де таке зробити значно складніше. Це є наслідком існування координати - θ , а також фактом, що кільцева пластина є об'єктом вісесиметричним, тобто вона є геометричним місцем точок, побудованих точками прямокутника при обертанні його навколо осі Oz на 360° . Ці всі особливості і дозволяють значно спростити розрахунок.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Розглянуті об'єкти досліджень, що мають вісесиметричну геометрію і розрахункові схеми їх побудовані та розраховуються в циліндричній системі координат. Описані схеми побудови тривимірної задачі трубопроводів та тунелів метро, проаналізовані зовнішні зусилля прикладені до їх поверхні, розрахункова

схема з граничними умовами та можливості зведення розрахунків до плоскої задачі, а далі до одновимірної з використанням модифікованого методу прямих.

2. Розглянуто побудову розрахункових моделей циліндричного тунелю та арочних кам'яних конструкцій, що розглядаються як плоска задача теорії пружності при сталому навантаженні по координаті z . Для моделей елеваторів, стволів танкової та артилерійської зброї, димових труб, опускних колодязів, для яких навантаження і геометрія тіла симетричні відносно осі z описано можливості зниження вимірності рішення в два етапи по двом координатам.

3. Для елемента вісесиметричного тіла використовуються класичні диференціальні рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат у вигляді співвідношень Коші, що описують взаємодію між деформаціями та переміщеннями. Розглянуті початкові та граничні умови для моделей і об'єктів, що розглядаються в даній роботі. Граничні умови моделюються за допомогою стержнів заданої жорсткості, що враховують умови закріплення з іншими тілами або з середовищем в якому знаходиться тіло.

4. Розглянута задача плоскої деформації в якій вирішальні рівняння перетворені до плоскої задачі Коші, та проведено зниження її вимірності по осьовій координаті та по окружній координаті при розв'язанні рівнянь для опису НДС вісесиметричних тіл в циліндричній постановці. При цьому з 15 вихідних невідомих та 15 рівнянь редукувати будемо лише 6 рівнянь використовуючи модифікований метод прямих.

5. Для вирішення просторової задачі використовуються співвідношення Коші, що описують взаємодію між деформаціями та переміщеннями. Для зниження вимірності використовується метод скінченних інтегральних перетворень для диференціальних рівнянь 2-го порядку для цього часто застосовуються *cos*-перетворення (для кососиметричного по θ НДС). Ці особливості модифікованого методу прямих дозволяють значно спростити розрахунки.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 2:

1. *Янсонс М.О.* Метод прямих у циліндричній системі координат. /Левківський Д.В.// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 93, - Київ, КНУБА, 2014. – С. 118-124.
2. *Янсонс М.О.* Особливості застосування методу ліній для зниження вимірності диференціальних рівнянь теорії пружності в циліндричній системі координат. /Левківський Д.В.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 66. – Київ, КНУБА, 2018. – С. 674-680.
3. *Янсонс М.О.* Розрахунок аروحного кріплення методом прямих // Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доповідей V Міжнародної конференції - м. Одеса 22-25 травня 2018. – С. 259-261.

РОЗДІЛ 3

ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ДЛЯ ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ ЗАДАЧ.

3.1 Головна ідея модифікованого методу прямих до зниження вимірності задач.

Опираючись на п.1.2.4, де описаний історичний розвиток та основна ідея методу прямих, можна резюмувати, що метод прямих використовується у математичній фізиці для зведення багатовимірних рівнянь по просторових координатах до систем звичайних диференціальних рівнянь. Таким чином може бути побудований загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь аналітичними методами. Також є зрозумілим, що класичний метод прямих обмежений застосуванням рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Саме через це запропоновано використовувати модифікований метод прямих, що опирається на наближені чисельні методи і дозволяє будувати загальні розв'язки рівнянь методу прямих також і у випадках використання змінних коефіцієнтів з різною точністю отриманих результатів. За рахунок таких змін, модифікований метод прямих можна використати до об'єктів складніших геометричних форм, фізичних властивостей, дослідити температурну складову.

На даному етапі досліджень, реалізація зниження вимірності рівнянь в модифікованому методі прямих виконується проєкційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Дана робота є дослідженням такого методу і розповсюджує його для вирішення задач на об'єкти модель яких є нетонкою пластиною чи оболонкою циліндричної форми або товстою оболонкою. Для цього використовується певний вид системи базисних функцій, а граничні умови зводяться до природніх, що дозволяє позбутись законтурних функцій, які є недоліком класичного методу прямих.

3.2 Зниження вимірності вихідних рівнянь та граничних умов.

Оскільки модифікований метод прямих є комбінованим методом використовуємо двоетапний алгоритм розв'язку. На першому етапі будемо знижувати вимірність вихідної задачі теорії пружності по просторових координатах. Для цього замінюємо вихідні рівняння відповідною редукованою системою рівнянь, формуємо відповідні граничні та початкові умови. На другому етапі розв'язуємо редуковану граничну або початково-граничну задачу.

При зниженні вимірності вихідні рівняння теорії пружності можна розглядати як звичайні диференціальні рівняння відносно певної координати, а всі шукані функції є залежними від інших координат як від параметрів. Далі обирається метод для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь: степеневий, проєкційний або асимптотичний. Як вже було зазначено для модифікованого методу прямих прийнято використовувати проєкційний метод.

Алгоритм проєкційного методу описаний [108], але при певних видах базисних функцій та операторах, він має бути зведений до частинних випадків. Для об'єктів що розглядаються, прямі розбивають тіло на ділянки і розв'язок має бути визначеним локально на кожній прямій, тому і базисні функції обираються локальними для кожної ділянки.

Такий підхід гарно реалізовується в методі Бубнова-Гальоркіна-Петрова, який ще має назву метод розділення області. Важливою умовою вибору базисних функцій є задоволення граничних умов. Оскільки в модифікованому методі прямих граничні умови є природніми, дану проблему виключено з розв'язку. Але якщо базисні функції не задовільняють граничні умови, це може впливати на швидкість збіжності. Замість головних умов можна використати природні, що апроксимують задані головні умови за допомогою граничного переходу. Отже, задача з головними граничними умовами повинна бути зведена до задачі з природніми граничними умовами за допомогою методу штрафів [108].

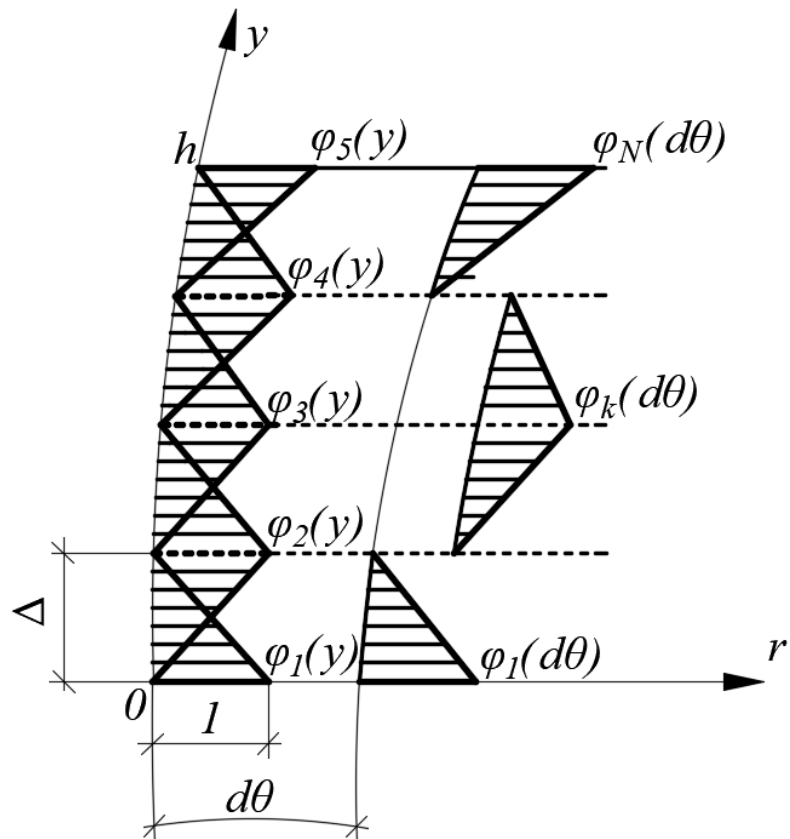


Рис. 3.1 Базисні фінітні функції для тіл в циліндричній системі координат.

Особливість застосування методу Бубнова-Гальоркіна-Петрова є використання в якості базисних – фінітних функцій. Ці функції мають властивість – система цих функцій «майже» ортогональна, а отже скалярний добуток цих функцій призводить до розрідженості матриць, і ці матриці схожі на матриці в різницевих методах. Найбільш поширеними фінітними функціями є кусково-лінійні – функції кришки [108]. При застосуванні таких функцій алгебраїчні рівняння розв’язків мають вигляд ідентичний рівнянням розв’язків при використанні заміни похідних скінченно-різницевиими співвідношеннями.

Для тіл в циліндричній системі координат при розв’язках скінченні різниці замінюються їх проєкційною інтерпретацією Рис. 3.1. Через локальність система таких функцій є лінійно незалежною та кожна з них відмінна від нуля на інтервалі довжиною 2Δ . Функції є неперервними кусково-лінійними, що мають першу

похідну і тому їх скалярний добуток існує. Дані функції майже ортогональні, тільки для сусідніх функцій скалярний добуток відмінний від нуля.

3.2.1 Зниження вимірності по радіальній координаті.

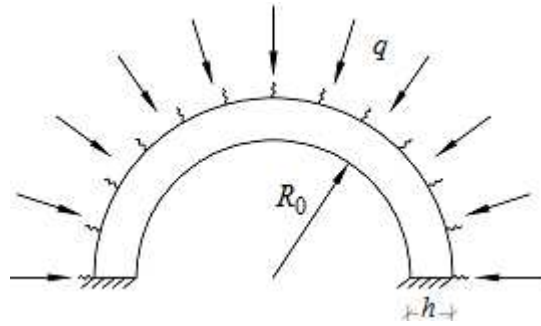


Рис. 3.2 Модель циліндричного тунелю в пружній основі.

У роботі розглянуто циліндричний тунель (Рис. 3.2) в пружній основі на який тисне ґрунт. Навантаження та геометрія тунелю постійні по координаті z , тому задача зводиться до плоскої деформації. У такому випадку рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + R = 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \theta = 0. \quad (3.2)$$

Рівняння Коші:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad (3.4)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \quad (3.5)$$

Рівняння закону Гука:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \mu\sigma_{\theta\theta}); \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \mu\sigma_{rr}); \quad (3.7)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{r\theta}. \quad (3.8)$$

Тут у рівняннях u_r, u_θ - вектори переміщень, $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$ - компоненти тензора напружень, μ - коефіцієнт Пуассона, E - модуль пружності

Зниження вимірності запропоновано виконувати за допомогою методу прямих в поєднанні з проєкційним методом Бубнова-Петрова по радіусу. Для цього тіло розбито прямими з кроком Δ . По координаті θ функції залишаються неперервними. Для зручності розрахунку проведемо заміну, перейдемо до нової системи координат y, s , де $y \in [0; h]$ і $s \in [0; L]$ (Рис.3.3).

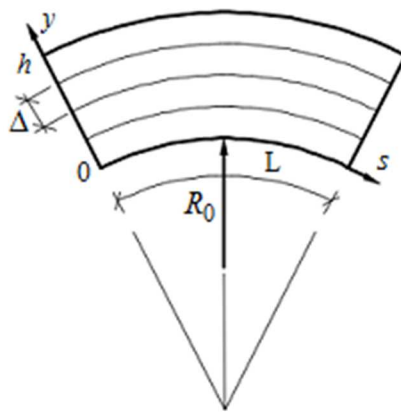


Рис. 3.3 Розбиття циліндричного тіла прямими.

змінна r записана через $r = R_0 + y$, тоді $dr = d(R_0 + y) = dy$. Довжина дуги $s = r\theta$, а $ds = (R_0 + y)d\theta$, де R_0 - початковий радіус.

При переході до нової системи координат рівняння (3.1-3.2) набувають вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial s} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R_0 + y} + R = 0; \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial s} + \frac{2\tau_{r\theta}}{R_0 + y} + \theta = 0. \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial y}; \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial s} + \frac{u_r}{R_0 + y}; \quad (3.12)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial y} - \frac{u_\theta}{R_0 + y} + \frac{\partial u_r}{\partial s}. \quad (3.13)$$

Підставимо рівняння (3.8) у (3.13), а (3.7) у (3.12) та проводимо заміну $u_\theta^* = u_\theta \cdot E$, $u_r^* = u_r \cdot E$ отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial s} = 2(1 + \mu)\tau_{r\theta} - \frac{\partial u_\theta^*}{\partial y} + \frac{u_\theta^*}{R_0 + y}; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} = \sigma_{\theta\theta}(1 - \mu^2) - \mu \frac{\partial u_r^*}{\partial y} - \frac{u_r^*}{R_0 + y}. \quad (3.15)$$

Перепишемо рівняння (3.10) у іншому вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial y} - \frac{2\tau_{r\theta}}{R_0 + y} - \theta. \quad (3.16)$$

Далі рівняння (3.10) за допомогою рівнянь (3.3), (3.6) запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} - \frac{\mu \sigma_{\theta\theta}}{R_0 + y} - \frac{\partial u_r^*}{\partial y(R_0 + y)} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R_0 + y} - R. \quad (3.17)$$

У результаті отримаємо замкнену систему вихідних рівнянь записану відносно координати s :

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial s} = 2(1 + \mu)\tau_{r\theta} - \frac{\partial u_\theta^*}{\partial y} + \frac{u_\theta^*}{R_0 + y}; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u_\theta^*}{\partial s} = \sigma_{\theta\theta}(1 - \mu^2) - \mu \frac{\partial u_r^*}{\partial y} - \frac{u_r^*}{R_0 + y}. \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial y} - \frac{2\tau_{r\theta}}{R_0 + y} - \theta; \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} - \frac{\mu\sigma_{\theta\theta}}{R_0 + y} - \frac{\partial u_r^*}{\partial y(R_0 + y)} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R_0 + y} - R. \quad (3.17)$$

Моделювання граничних умов

Кожна гранична точка поверхні тіла взаємодіє з оточуючим середовищем через пружні в'язі певної жорсткості k (Рис. 3.4).

$$\sigma_r^n = q_y^n + \Delta_y^n \cdot k_y^n - U^n \cdot k_y^n; \quad (3.18)$$

$$\tau_{\theta r}^n = q_s^n - V^n \cdot k_s^n + \Delta_s^n \cdot k_s^n; \quad (3.19)$$

$$\sigma_r^1 = -q_y^1 - \Delta_y^1 \cdot k_y^1 + U^1 \cdot k_y^1; \quad (3.20)$$

$$\tau_{\theta r}^1 = -q_s^1 - \Delta_s^1 \cdot k_y^1 + V^1 \cdot k_y^1; \quad (3.21)$$

$$q_y^0 + \tau_{\theta r}^0 - U^0 \cdot k_y^0 + \Delta_y^0 \cdot k_y^0 = 0; \quad (3.22)$$

$$-V^0 \cdot k_s^0 + q_s^0 + \sigma_\theta^0 + \Delta_s^0 \cdot k_s^0 = 0; \quad (3.23)$$

$$q_s^l - \sigma_\theta^l + \Delta_s^l \cdot k_s^l - V^l \cdot k_s^l = 0; \quad (3.24)$$

$$q_y^l - \tau_{\theta r}^l + \Delta_y^l \cdot k_y^l - U^l \cdot k_y^l = 0. \quad (3.25)$$

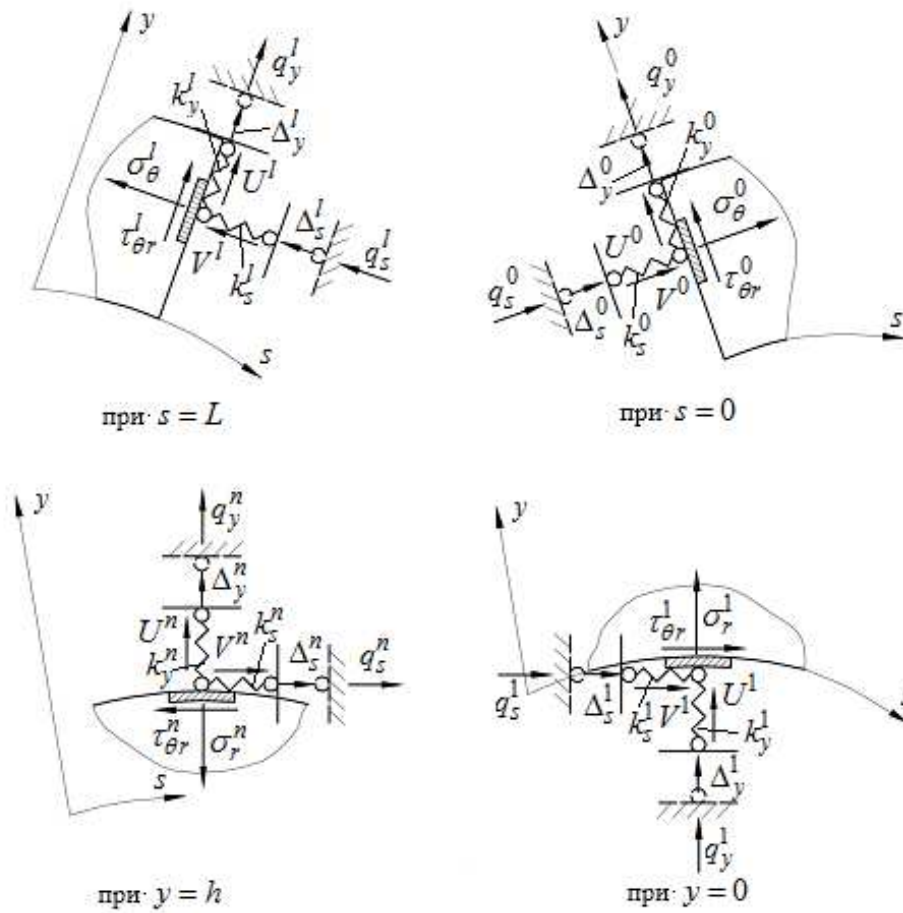


Рис. 3.4 Граничні умови

тут $U = u_r, V = u_\theta$.

По координаті y функції розподілені за допомогою залежності $f(y; s) \approx f(s) \cdot \varphi_i(y)$

На прямих обираємо систему базисних функцій виду (Рис. 3.5).

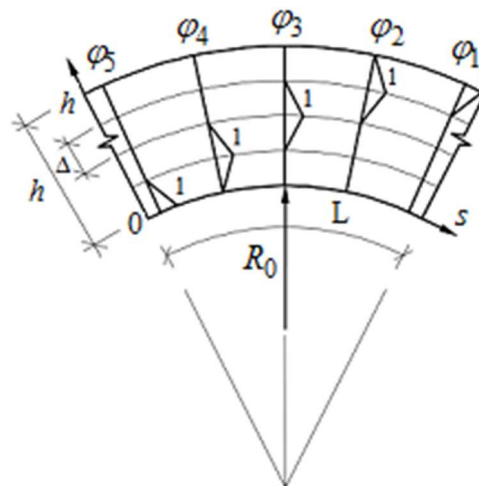


Рис. 3.5 Система базисних функцій

Помноживши систему з рівнянь (3.14-3.17) на систему базисних функцій $\varphi_i(y)$ та інтегруємо від 0 до h . Система базисних функцій не задовольняє граничні умови, тому інтегрування функцій напружень виконується інтегруванням частинами, це дає можливість врахувати граничні умови на 1-й і n -й прямій.

У результаті редукована система рівнянь записана в коефіцієнтах має вигляд:

$$\frac{du_{\theta}^{*\alpha}}{ds} = (1 - \mu^2) \sigma_{\theta\theta}^{\alpha} - (\mu \cdot q^{\alpha i} \cdot b_{ij} + q^{\alpha i} \cdot d_{ij}) \cdot u_r^{*j}; \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u_r^{*\alpha}}{\partial s} = 2(1 + \mu) \tau_{r\theta}^{\alpha} - q^{\alpha i} \cdot b_{ij} \cdot u_{\theta}^{*j} + q^{\alpha i} \cdot d_{ij} \cdot u_{\theta}^{*j}; \quad (3.27)$$

$$\frac{d\sigma_{\theta\theta}^{\alpha}}{ds} = -q^{\alpha i} [\tau_{r\theta}^n - \tau_{r\theta}^1] + (q^{\alpha i} \cdot b_{ji} - 2q^{\alpha i} \cdot d_{ij}) \tau_{r\theta}^j - \theta^{\alpha}; \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{r\theta}^{\alpha}}{ds} = & -q^{\alpha i} [\sigma_{rr}^n - \sigma_{rr}^1] + \mu \cdot q^{\alpha i} \cdot b_{ji} \cdot \sigma_{\theta\theta}^j + q^{\alpha i} \cdot b_{ji} \cdot q^{jk} \cdot b_{k\beta} \cdot u_r^{*\beta} - \\ & - \mu \cdot q^{\alpha i} \cdot d_{ij} \cdot \sigma_{\theta\theta}^j - q^{\alpha i} \cdot c_{ij} \cdot u_r^{*j} + q^{\alpha i} \cdot d_{ij} \cdot \sigma_{\theta\theta}^j - R^{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Підчас інтегрування з'являються 4 види матричних операторів:

$$1) \text{ Двічі коваріантний метричний тензор } \{g_{ij}\} = (\varphi_i \cdot \varphi_j) = \int_0^h \varphi_i(y) \cdot \varphi_j(y) dy;$$

$$2) \text{ Матриця } \{b_{ij}\} = (\varphi_i \cdot \varphi_j') = \int_0^h \varphi_i(y) \cdot \varphi_j'(y) dy;$$

$$3) \text{ Матриця } \{d_{ij}\} = \int_0^h \varphi_i \cdot \varphi_j \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy$$

$$4) \text{ Матриця } \{c_{ij}\}$$

При інтегруванні даних функцій виникають певні особливості пов'язані з функцією

$$\frac{1}{R_0 + y}, \text{ вона порушує симетрію у матриці.}$$

Запишемо рівняння базисної функції для i -тої лінії.

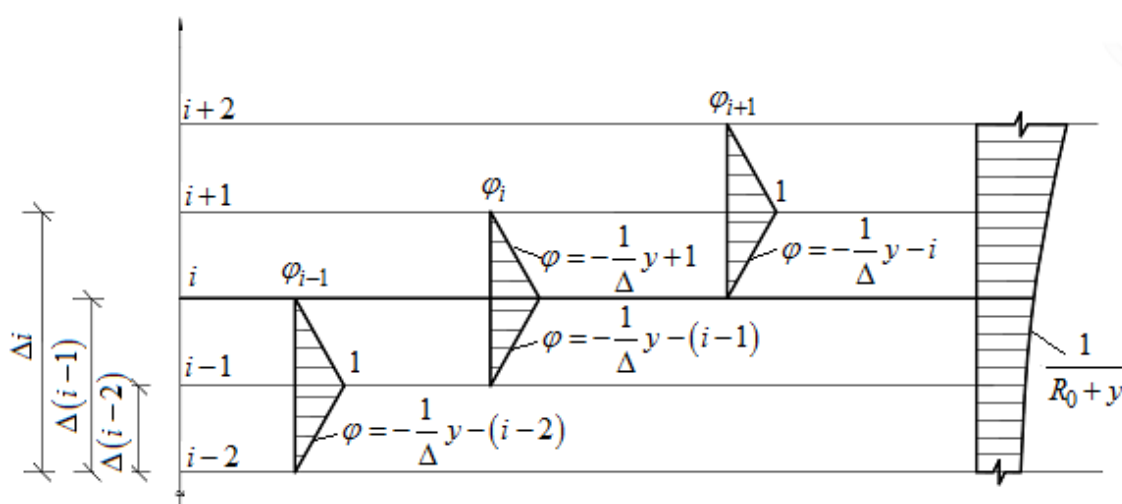


Рис. 3.6 Базисні функції

Елементи головної діагоналі матриці $\{d_{ij}\}$:

$$\begin{aligned}
 d_{ii} &= \int_{\Delta(i-2)}^{\Delta(i-1)} \left[\frac{y}{\Delta} - (i-2) \right]^2 \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy + \int_{\Delta(i-1)}^{\Delta i} \left[-\frac{y}{\Delta} + i \right]^2 \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy = \\
 &= \left(\frac{(i-1)}{\sqrt{2}} - (i-2) \cdot \sqrt{2} \right)^2 - \frac{(i-2)^2}{2} - \frac{2R_0}{\Delta} - \\
 &\quad - \left(i \cdot \sqrt{2} - \frac{(i-1)}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{i^2}{2} + \left(\frac{R_0}{\Delta} + (i-2) \right)^2 \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\ln |R_0 + \Delta(i-1)| - \ln |R_0 + \Delta(i-2)| \right) + \left(\frac{R_0}{\Delta} + i \right)^2 \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\ln |R_0 + \Delta i| - \ln |R_0 + \Delta(i-1)| \right).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

де $i \in [2; n-1]$

Елементи другорядної діагоналі матриці $\{d_{ij}\}$:

$$\begin{aligned}
d_{i;i+1} &= \int_{\Delta(i-1)}^{\Delta i} \left(-\frac{y}{\Delta} + i \right) \left(\frac{1}{\Delta} y - (i-1) \right) \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy = \\
&= \frac{R_0}{\Delta} - \frac{i^2}{2} + (2i-1)i + \frac{(i-2)^2}{2} - (2i-1)(i-1) + \\
&+ \left(\ln |R_0 + \Delta(i-1)| - \ln |R_0 + \Delta i| \right) \cdot \left(\frac{R_0^2}{\Delta^2} + \frac{(2i-1)}{\Delta} R_0 + i(i-1) \right).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

де $i \in [1; n]$

1-й елемент і n-й елемент $\{d_{ij}\}$:

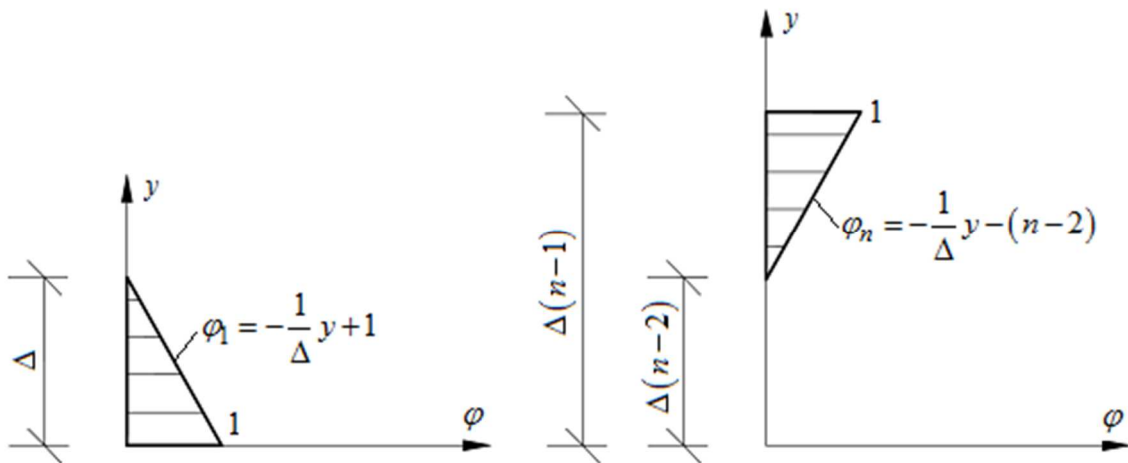


Рис. 3.7 Базисні граничні функції

$$d_{11} = \int_0^{\Delta} \left(-\frac{y}{\Delta} + 1 \right)^2 \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy = -1,5 - \frac{R_0}{\Delta} + \left(1 + \frac{R_0}{\Delta} \right)^2 \cdot \left(\ln |R_0 + \Delta| - \ln |R_0| \right); \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
d_{nn} &= \int_{\Delta(n-2)}^{\Delta(n-1)} \left(\frac{1}{\Delta} y - (n-2) \right)^2 \frac{1}{R_0 + y} dy = \frac{(2n-3)}{2} - 2(n-2) - \frac{R_0}{\Delta} + \\
&+ \left(\frac{R_0}{\Delta} + (n-2) \right)^2 \cdot \left(\ln |R_0 + \Delta(n-1)| - \ln |R_0 + \Delta(n-2)| \right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Елементи головної діагоналі матриці $\{c_{ij}\}$:

$$\begin{aligned}
 c_{ii} &= \int_{\Delta(i-2)}^{\Delta(i-1)} \left(\frac{y}{\Delta} - (i-2) \right) \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy + \int_{\Delta(i-1)}^{\Delta i} \left(-\frac{y}{\Delta} + i \right) \cdot \left(-\frac{1}{\Delta} \right) \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy = \\
 &= \frac{2}{\Delta} + \frac{2}{\Delta} \ln |R_0 + \Delta(i-1)| + \ln |R_0 + \Delta(i-2)| \cdot \left(\frac{R_0}{\Delta^2} + \frac{(i-2)}{\Delta} \right) + \\
 &\quad + \ln |R_0 + \Delta i| \left(-\frac{R_0}{\Delta^2} - \frac{i}{\Delta} \right).
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

де $i \in [2; n-1]$

Елементи другорядної діагоналі матриці $\{c_{ij}\}$:

$$\begin{aligned}
 c_{i;i+1} &= \int_{\Delta(i-1)}^{\Delta i} \left(-\frac{y}{\Delta} + i \right) \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy = \\
 &= -\frac{1}{\Delta} + \left(\frac{R_0}{\Delta^2} + \frac{(i-2)}{\Delta} \right) \cdot (\ln |R_0 + \Delta(i-1)| - \ln |R_0 + \Delta(i-2)|).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

де $i \in [1; n]$

1-й елемент і n-й елемент матриці $\{c_{ij}\}$:

$$c_{11} = \int_0^{\Delta} \left(-\frac{y}{\Delta} + 1 \right) \left(-\frac{1}{\Delta} \right) \left(\frac{1}{R_0 + y} \right) dy = \frac{1}{\Delta} + \left(\frac{R_0}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta} \right) (\ln |R_0| - \ln |R_0 + \Delta|). \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 c_{nn} &= \int_{\Delta(n-2)}^{\Delta(n-1)} \left(\frac{y}{\Delta} - (n-2) \right) \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy = \\
 &= \frac{1}{\Delta} + \left(\frac{R_0}{\Delta^2} + \frac{(n-2)}{\Delta} \right) (\ln |R_0 + \Delta(n-2)| - \ln |R_0 + \Delta(n-1)|).
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

3.2.2 Зниження вимірності по коловій координаті.

Розглянемо пластину в циліндричних координатах, для нескінченно малого елемента цієї пластини записані вирази рівнянь 2.1-2.4. При зниженні вимірності по коловій координаті, всі залежності від координати z схожі до умов в прямокутних координатах. Врахуємо що переміщення в напрямку осі z не залежить від цієї координати, тобто $u_z(x, y)$. До того ж, кути зміщення, у площинах що перпендикулярні пластині, дорівнюють нулю. В циліндричних координатах це ε_{rz} та $\varepsilon_{\theta r}$. Запишемо їх вирази для середньої лінії:

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \quad (3.39)$$

Враховуючи $\varepsilon_{rz} = 0$, $\varepsilon_{\theta r} = 0$:

$$u_r = -z \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (3.40)$$

$$u_\theta = -z \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \quad (3.41)$$

Тоді співвідношення:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta. \quad (3.44)$$

Підставимо значення u_r, u_θ :

$$\varepsilon_{rr} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}; \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u_r; \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -z \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_z. \quad (3.47)$$

Вирази напружень через деформації:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{rr} + \mu \varepsilon_{\theta\theta}); \quad (3.48)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}); \quad (3.49)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{r\theta}. \quad (3.50)$$

Отримуємо значення напружень:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] u_z; \quad (3.51)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] u_z; \quad (3.52)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} (1-\mu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] u_z. \quad (3.53)$$

Підставимо ці вирази в 2.4, з яких виразимо $\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}$ та $\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u_z; \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right] u_z. \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right]; \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right]. \quad (3.57)$$

Записані вирази є гармонічними виразами, що можна позначити $\nabla^2 u_z$:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z; \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z. \quad (3.59)$$

Інтегруємо ці вирази по z :

$$\tau_{rz} = \frac{Ez}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z + f_1(r, \theta); \quad (3.60)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{Ez}{2(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z + f_2(r, \theta). \quad (3.61)$$

Щоб визначити невідомих функцій $f_1(r, \theta)$ та $f_2(r, \theta)$, при $z = \pm \frac{h}{2}$ дотичні

напруження будуть дорівнювати нулю:

$$\tau_{rz} = 0;$$

$$\tau_{\theta z} = 0.$$

$$\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z + f_1(r, \theta) = 0; \quad (3.62)$$

$$\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z + f_2(r, \theta) = 0. \quad (3.63)$$

$$f_1(r, \theta) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z; \quad (3.64)$$

$$f_2(r, \theta) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z. \quad (3.65)$$

Підставляємо ці вирази у вирази дотичних напружень:

$$\tau_{rz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z; \quad (3.66)$$

$$\tau_{\theta z} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z. \quad (3.67)$$

Через дотичні напруження виражаємо поперечні зусилля:

$$Q_{rz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz; \quad (3.68)$$

$$Q_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\theta z} dz. \quad (3.69)$$

Підставляємо попередні вирази τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ і виконуємо інтегрування:

$$Q_{rz} = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z; \quad (3.70)$$

$$Q_{\theta z} = -D \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z. \quad (3.71)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu)}. \quad (3.72)$$

Виразимо σ_{zz} :

$$\sigma_{zz} = -\int \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tau_{rz} \right) dz + f_3(r, \theta). \quad (3.73)$$

$$\sigma_{zz} = -\int \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \nabla^2 u_z dz + f_3(r, \theta). \quad (3.74)$$

$$\sigma_{zz} = -\int \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \nabla^2 \nabla^2 u_z dz + f_3(r, \theta). \quad (3.75)$$

Оскільки u_z не залежить від z :

$$\sigma_{zz} = \nabla^4 u_z \int \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} dz + f_3(r, \theta). \quad (3.76)$$

$$\sigma_{zz} = \nabla^4 u_z \frac{3h^2 z - 4z^2}{24(1-\mu^2)} + f_3(r, \theta). \quad (3.77)$$

Визначаємо $f_3(r, \theta)$ використовуючи граничні умови по верхній і нижній площинам пластини:

При $z = -\frac{h}{2}$

$$\sigma_{zz} = -q_{z \text{ верх}};$$

При $z = \frac{h}{2}$

$$\sigma_{zz} = q_{z \text{ ниж}};$$

$$-q_{z \text{ верх}} = \nabla^4 u_z \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)} + f_3(r, \theta); \quad (3.78)$$

$$q_{z \text{ ниж}} = \nabla^4 u_z \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)} + f_3(r, \theta). \quad (3.79)$$

При $q_{z \text{ верх}} + q_{z \text{ ниж}} = q_z$ тоді:

$$q_z = \nabla^4 u_z 2 \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)} = D \nabla^4 u_z; \quad (3.80)$$

$$\nabla^4 u_z = \frac{1}{D} q_z; \quad (3.81)$$

3.2.3 Зниження вимірності по осьовій координаті.

У частинному випадку вісесиметричної задачі розрахунковою областю є Рис 2.14, а осьовим перерізом пластини Рис 2.18, тоді розрахункові рівняння є:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + R = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + Z = 0.$$

Запишемо рівняння рівноваги відносно осей для торцевих поверхонь:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz}^1(x) &= k_{rz}^- u_r^1(x) - k_{rz}^- \Delta_{rz}^-(x) - q_r^-(x); \\
 \sigma_{zz}^1(x) &= k_{zz}^- u_z^1(x) - k_{zz}^- \Delta_{rz}^-(x) - q_z^-(x); \\
 \sigma_{rz}^N(x) &= -k_{rz}^+ u_r^N(x) + k_{rz}^+ \Delta_{rz}^+(x) + q_r^+(x); \\
 \sigma_{zz}^N(x) &= -k_{zz}^+ u_z^N(x) + k_{zz}^+ \Delta_{zz}^+(x) + q_z^+(x).
 \end{aligned}
 \tag{3.83}$$

Запишемо рівняння рівноваги відносно осей для бічних поверхонь:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^0(z) &= -q_r^0 - k_{rr}^0 (\Delta_{rr}^0 - u_r^0(z)) = 0; \\
 \sigma_{zr}^0(z) &= -q_z^0 - k_{zr}^0 (\Delta_{zr}^0 - u_z^0(z)) = 0; \\
 \sigma_{rr}^l(z) &= q_r^l + k_{rr}^l (\Delta_{rr}^l - u_r^l(z)) = 0; \\
 \sigma_{zr}^l(z) &= q_z^l + k_{zr}^l (\Delta_{zr}^l - u_z^l(z)) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.84}$$

Вихідні рівняння є системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, які передбачається розв'язувати чисельно-аналітичним методом прямих. Класичний варіант методу прямих використовує чисельний метод скінчених різниць для зниження вимірності вихідних рівнянь по одній з просторових змінних (як правило поперечній z) та подальшому розрахунку одновимірної граничної задачі (це головна особливість методу прямих) аналітичними або наближеними методами.

У роботах [43, 197] було відзначено, що класичний варіант методу прямих призводить до редукованих рівнянь, які погано пристосовані до розв'язування найбільш розповсюдженими чисельними методами. І цих роботах було запропоновано для зниження вимірності вихідних рівнянь використовувати проєкційний метод Бубнова-Галеркіна-Петрова [164] з використанням базисних локально зосереджених функцій («функції-кришки» [108]). Було зазначено, що з

точки зору евклідового простору із скалярним добутком $(f(z), g(z)) = \int_{h^-}^{h^+} f(z) \cdot g(z) dz$

система базисних функцій є косокутною, в зв'язку з чим алгебраїчні перетворення рівнянь аналогічні перетворенням тензорної алгебри, тому подальші викладки в модифікованому методі прямих використовують позначення та алгебраїчні дії тензорної алгебри [192].

Для побудови редукованих статичних рівнянь вихідні рівняння перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial x} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} &= -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\mu} \sigma_{rz}; \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} - X_r;$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rz}}{R_0 + x} - X_z.$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{R_0 + x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (3.86)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right).$$

У цих та подальших рівняннях зручно перейти від просторової змінної r до змінної x , враховуючи, що відповідні вихідні співпадають – при $r = R_0 + x$, $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}$.

Оскільки невідомій функції $f(x, z)$ у випадку косокутного базису $\{\varphi_i(z)\} (i = \overline{1, N})$ можна поставити у відповідність два тип величин - $f^i(x)$ - контрваріантні індексні величини, або коефіцієнти в розкладі по основному базису $\{\varphi_i(z)\}$ або коваріантні

величини $f_i(x)$ - скалярні добутки - моменти відносно елементів основного базису. В той же час елементи $f_i(x)$ можна розглядати як коефіцієнти розкладу по елементах взаємного базису $\{\varphi^i(z)\}$, або вони є моментами відносно елементів основного базису.

Далі також використовуються метричні тензори другого рангу $g_{ij} = (\varphi_i(z), \varphi_j(z))$, $g^{ij} = (\varphi^i(z), \varphi^j(z))$, $\delta_i^j = (\varphi_i(z), \varphi^j(z))$, $\delta^i_j = (\varphi^i(z), \varphi_j(z))$, а також співвідношення між матрицями двічі коваріантного та двічі контрваріантного тензора $\{g_{ij}\}^{-1} = \{g^{ij}\}$. У публікаціях [43],[197] редуковані рівняння будувалися в моментах відносно основного базису. Подальші дослідження виявили, що зручніше для подальшого застосування чисельних методів є редуковані рівняння, отримані в коефіцієнтах відносно основного базису. Для цього необхідно вихідні рівняння проєкувати на елементи взаємного базису.

Редукуємо перше рівняння системи (3.85):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial x} &= \left(-\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}, \varphi^i(z) \right) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{du_r^i}{dx} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} \varphi^i(z) dz + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i \rightarrow \\ \rightarrow \frac{du_r^i(x)}{dx} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i. \end{aligned} \quad (3.87)$$

тут виконано перетворення

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} \varphi^i(z) dz &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial (u_z^\alpha \varphi_\alpha(z))}{\partial z} g^{ij} \varphi_j(z) dz = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} u_z^\alpha \cdot \varphi_\alpha'(z) \cdot \varphi_j(z) dz = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha \end{aligned} \quad (3.88)$$

По індексах, що повторюються, передбачається підсумовування (узгодження Ейнштейна).

Аналогічно редукується друге рівняння системи (3.85) та рівняння (3.86). За допомогою редукованого рівняння (3.87) з редукованих рівнянь для $\sigma_{\theta\theta}^i$ та σ_{zz}^i

виключається похідна $\frac{du_z^i}{dx}$:

$$\frac{du_z^i}{dx} = -g^{ij}b_{j\alpha}u_r^\alpha(x) + \frac{1}{\mu}\sigma_{rz}^i(x); \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^i &= \lambda \frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{R_0 + x} u_r^i(x) + \lambda g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) = \\ &= \lambda \left[-\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \right. \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} &\left. + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i \right] + \frac{\lambda + 2\mu}{R_0 + x} u_r^i(x) + \lambda g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) = \\ &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i; \end{aligned}$$

$$\left(\sigma_{zz} = \lambda \frac{u_r}{\partial x} + \lambda \frac{u_r}{R_0 + x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varphi^i(z) \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{zz}^i = \lambda \frac{du_r^i}{dx} + \lambda \frac{u_r^i}{R_0 + x} + (\lambda + 2\mu) g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) = \quad (3.91)$$

$$= \lambda \left[-\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i \right] +$$

$$+ \lambda \frac{u_r^i}{R_0 + x} + (\lambda + 2\mu) g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x);$$

$$\sigma_{zz}^i = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i(x). \quad (3.92)$$

Остаточно система редукованих рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{du_z^i}{dx} &= -g^{ij}b_{j\alpha}u_r^\alpha(x) + \frac{1}{\mu}\sigma_{rz}^i(x); \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{u_r^i(x)}{R_0+x} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{u_r^i(x)}{R_0+x} + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr}^i(x). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Редукування рівнянь рівноваги в частинах.

Рівняння рівноваги мають особливість зниження вимірності. При обчисленні інтегралу, під знаком якого стоїть похідна по змінній z від компоненти тензору напружень, необхідно “пом’якшувати” інтегрування по відповідній змінній [192], перетворюючи інтеграл по частинах. При цьому граничні умови на бокових поверхнях, які з’являються при інтегруванні частинами враховують силові та кінематичні впливи потрапляють до редукованих рівнянь рівноваги.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \bar{R}_t &= 0; \\ \left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} - \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} - \bar{R}_t\right), \varphi^i(z) &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} = -\int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} \varphi^i(z) dz - \sigma_{rr}^i + \sigma_{\theta\theta}^i - \bar{R}_t^i; \\ -\int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} g^{ij} \varphi_j(z) dz = -g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} \varphi_j(z) dz = \\ = -g^{ij} [(\sigma_{rz} \cdot \varphi_j)] \Big|_{h^-}^{h^+} - \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{rz} \cdot \varphi_j'(z) dz = \\ = -g^{ij} [\sigma_{rz}^N \cdot \delta_j^N - \sigma_{rz}^1 \cdot \delta_j^1 - \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{rz}^\alpha \cdot \varphi_\alpha(z) \varphi_j'(z) dz] = \\ = -g^{ij} [\sigma_{zz}^N \cdot \delta_j^N - \sigma_{rz}^1 \cdot \delta_j^1 - \sigma_{rz}^\alpha b_{\alpha j}]; \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} &= -g^{ij}\sigma_{rz}^N\delta_j^N + g^{ij}\sigma_{rz}^1\delta_j^1 + g^{ij}b_{\alpha j}\sigma_{rz}^\alpha - \sigma_{rr}^i + \sigma_{\theta\theta}^i - \bar{R}_t^i \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} = -g^{iN}\sigma_{rz}^N + g^{i1}\sigma_{rz}^1 + g^{ij}b_{\alpha j}\sigma_{rz}^\alpha - \sigma_{rr}^i + \sigma_{\theta\theta}^i - \bar{R}_t^i \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} = -g^{iN}\left[-k_{rz}^+u_r^N(x) + k_{rz}^+\Delta_{rz}^+(x) + q_r^+(x)\right] + \\
&\quad + g^{i1}\left[k_{rz}^-u_r^1(x) - k_{rz}^-\Delta_{rz}^-(x) - q_r^-(x)\right] + \\
&+ g^{ij}b_{\alpha j}\sigma_{rz}^\alpha - \sigma_{rr}^i + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i - \bar{R}_t^i; \\
&\quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \bar{\theta}_t = 0 \rightarrow \\
&\rightarrow \left(\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial x} = -\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{r}\sigma_{rz} - \bar{\theta}_t\right), \varphi^i(z) \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{d\sigma_{rz}^i}{dx} = -\int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \varphi^i(z) dz - \frac{1}{R_0 + x} \sigma_{rz}^i - \bar{\theta}_t^i \rightarrow \\
&\rightarrow -\int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \varphi^i(z) dz = -\int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} g^{ij} \varphi_j(z) dz = -g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \varphi_j(z) dz = \\
&= -g^{ij} \cdot \sigma_{zz} \cdot \varphi_j(z) \Big|_{h^-}^{h^+} - \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{zz} \varphi_j'(z) dz = -g^{ij} [\sigma_{zz}^N \delta_j^N - \sigma_{zz}^1 \delta_j^1 - \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{zz}^\alpha \varphi_\alpha \varphi_j' dz] = \\
&= -g^{iN} \sigma_{zz}^N + g^{i1} \sigma_{zz}^1 + g^{ij} b_{\alpha j} \sigma_{zz}^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$\sigma_{zz}^N, \sigma_{zz}^1$ - підставимо з граничних умов

σ_{zz}^α - виключимо через рівняння:

$$\sigma_{zz}^\alpha = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^\alpha(x)}{R_0 + x} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha j} b_{j\gamma} u_z^\gamma(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^\alpha(x). \tag{3.98}$$

Аналогічно редукуються граничні умови на торцях. Оскільки при виборі системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, то усі граничні умови є алгебраїчними співвідношеннями, тому редукування алгебраїчних співвідношень формально зводиться до заміни невідомих функцій їх коефіцієнтами. Відповідно редуковані граничні умови на торцевих поверхнях мають вигляд:

$$\sigma_{rr}^i(x) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x} + \frac{\lambda}{r} u_r^i(x) + \lambda g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x); \quad (3.99)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i(x) = \lambda \frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} u_r^i(x) + \lambda g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x); \quad (3.100)$$

$$\sigma_{zz}^i(x) = \lambda \frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x} + \frac{\lambda}{r} u_r^i(x) + (\lambda + 2\mu) g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x); \quad (3.101)$$

$$\sigma_{rz}^i(x) = \mu \frac{\partial u_z^i(x)}{\partial x} + \mu g^{ij} b_{j\alpha} u_r^\alpha(x). \quad (3.102)$$

Кінцева система редукованих рівнянь:

$$\frac{du_r^i}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} \cdot b_{j\alpha} \cdot u_z^\alpha(x) + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i; \quad (3.103)$$

$$\frac{du_z^i}{dx} = -g^{ij} \cdot b_{j\alpha} \cdot u_r^\alpha(x) + \frac{1}{\mu} \sigma_{rz}^i(x);$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} = & -g^{iN} [-k_{rz}^+ \cdot u_r^N(x) + k_{rz}^+ \cdot \Delta_{rz}^+(x) + q_r^+(x)] + \\ & + g^{i1} [k_{rz}^- \cdot u_r^1(x) - k_{rz}^- \cdot \Delta_{rz}^-(x) - q_r^-(x)] + g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot \sigma_{rz}^\alpha - \sigma_{rr}^i + \\ & + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g^{ij} \cdot b_{j\alpha} \cdot u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i - \bar{R}_r^i; \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{zr}^i}{dx} = & \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \frac{1}{R_0+x} g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot u_r^\alpha(x) + g^{iN} \cdot k_{zz}^N(x) \cdot u_z^N(x) + \\
& + g^{i1} \cdot k_{zz}^- \cdot u_z^1(x) + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot g^{\alpha j} \cdot b_{j\gamma} \cdot u_z^\gamma(x) + \\
& + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot \sigma_{rr}^\alpha(x) - \frac{1}{R_0+x} \sigma_{rz}^i(x) - \bar{\theta}_t^i.
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Остаточно отримуємо граничну задачу для системи редукованих диференціальних рівнянь в звичайних похідних, записану у формі Коші з граничними умовами загального вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{Y}}{dx} &= A\vec{Y} + \vec{F}; \\
&\text{при } x = 0 \\
C_0(\vec{Y}_{(0)} - \vec{\Phi}_0) &= 0; \\
&\text{при } x = l \\
C_l(\vec{Y}_{(l)} - \vec{\Phi}_l) &= 0.
\end{aligned}$$

ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ 3

1. Описані головні ідею методу прямих з точки зору історичного розвитку та відмічено за рахунок яких змін модифікування метод прямих можна використовувати до об'єктів складних геометричних форм, фізичних властивостей, та враховувати температурні складові.

2. Проаналізовано підхід до зниження вимірності вихідних рівнянь теорії пружності в модифікованому методі прямих, а також особливості застосування методу Бубнова-Галеркіна-Петрова для визначення і задоволення природних граничних умов за допомогою введення базисним функцій.

3. На прикладі циліндричного тунелю на пружній основі запропоновано зниження вимірності рівнянь методу прямих по радіальній координаті в поєднанні з проєкційним методом Бубнова-Петрова, а також змодельовані граничні умови на основі системи базисних функцій в результаті чого утворена редукована система рівнянь в коефіцієнтах та розглянуті особливості її інтегрування.

4. На прикладі кільцевої пластини в циліндричних координатах розглянуто зниження вимірності по коловій координаті, визначені значення нормальних та дотичних напружень з урахуванням граничних умов.

5. Розглянуто зниження вимірності по осьовій координаті з використанням методу Бубнова-Гальоркіна-Петрова на основі використання базисних локально-зосереджених функцій. Проведені алгебраїчні перетворення для отримання значень внутрішніх зусиль та напружень у вісесиметричних тілах при використанні модифікованого методу прямих.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 3:

1. Янсонс М.О. Розрахунок товстої пластини модифікованим методом прямих. / Левківський Д.В.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 63, - Київ, КНУБА, 2017. – С. 247-250.

2. Янсонс М.О. Застосування узагальненого методу прямих для дослідження динамічного напружено-деформованого стану кільцевих нетонких пластин // Математичні проблеми технічної механіки – 2021: тези доповідей Міжнародної наукової конференції - м. Дніпро, Кам'янське 2021. – С. 22-24.

3. Янсонс М.О. Модифікований метод прямих в статичних задачах вісесиметричних нетонких пластин. /Кошевий О.П., Левківський Д.В., Чубарев А.Г.// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. - Вип.109 – Київ, КНУБА, 2022. - С. 342-358.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НДС ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ

4.1 Загальна структура програмного забезпечення для дослідження НДС вісесиметричних тіл.

Вирішення сучасних задач науки та техніки широко застосовуються чисельні автоматизовані методи розрахунку, але для таких задач можна використовувати аналітичні та напіваналітичні методи в яких іноді виникають проблеми з вирішенням систем диференційних рівнянь в крайових задачах. Для цього і застосовується модифікований метод прямих, що значно спрощує вирішення крайових задач в розрахунках НДС вісесиметричних тіл. Крім того, в модифікованому методі прямих застосовуються чисельні методи, які добре розв'язуються в середовищі ПК, тому створення програмних комплексів з використанням модифікованого методу прямих для дослідження НДС вісесиметричних тіл є актуальною задачею прикладної механіки.

Для розрахунку напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл вибір методу розрахунку є дуже важливим рішенням, тому що від цього напряму залежать результати досліджень. В даному дослідженні використовується модифікований метод прямих, що є комбінованим чисельно-аналітичним методом, та дає більш точні об'єктивні результати розрахунку НДС вісесиметричних нетонких оболонок та є альтернативою універсальним чисельним методам. Розроблену методіку реалізовано на кафедрі опору матеріалів КНУБА у вигляді програмного забезпечення для дослідження напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл за допомогою модифікованого методу прямих при різних видах зовнішніх навантажень, та можливістю врахування всіх комбінацій цих навантажень.

Робота програмного забезпечення розділена на три етапи. На першому етапі спочатку формується просторова розрахункова схема конструкції з використанням ПК AUTOCAD, Revit, ArchiCAD. Далі просторова розрахункова схема дає

можливість формування розрахункових моделей елементів вісесиметричних тіл для подальшого чисельного моделювання модифікованим методом прямих.

Для сформованих чисельних моделей елементів вісесиметричних тіл моделюються та вирішуються задачі по визначенню зовнішніх статичних силових навантажень, кінематичних та сейсмічних навантажень, температурних, електромагнітних та інших видів навантажень за допомогою модифікованого методу прямих.

На другому етапі проводиться розрахунок напружено-деформованого стану елементів вісесиметричних тіл за допомогою модифікованого методу прямих, а також, по необхідності, формується база комплексного навантаження за допомогою технології Windows Forms, для виявлення найбільш не вигідного поєднання навантажень, та підключення і передачі даних в ПК LIRA SAPR, за допомогою програмних компонентів OLE технологій і COM серверами. Проводиться розрахунок НДС просторової моделі вісесиметричних тіл від комплексного навантаження при найбільш не вигідному поєднанні навантажень в ПК LIRA SAPR.

Результати розрахунків НДС вісесиметричних тіл візуалізуються та оброблюються на третьому етапі роботи програмного забезпечення. За допомогою MS Excel та можливостей ПК LIRA SAPR, у вигляді таблиць значень внутрішніх зусиль N , Q , M , нормальних напружень в радіальному σ_r , тангенціальному σ_τ напрямках, дотичних напружень, переміщень конструкції в цілому, та її елементів окремо і т.д. Також будуються графіки, діаграми, розподілення величин, ізолінії розподілення величин, аналізується міцність та жорсткості характеристики стану конструкції. На основі отриманих та візуалізованих результатів приймаються рішення по визначенню стану вісесиметричних тіл, та прийняття оптимальних рішень при їх подальшому проєктуванні та експлуатації.

Створене програмне забезпечення використовує інтерфейс з яким зручно працювати при дослідженні НДС вісесиметричних тіл, та має простий і зручний функціонал для роботи:

- зручне задання вихідних даних;

- підключення до роботи інших сучасних програмних комплексів;
- автоматичне збереження результатів розрахунку та збереження їх на жорсткому диску ПК;
- контроль розрахунків в паралельному використанні інших програмних комплексів;
- високий рівень точності програмних розрахунків.

Створений інтерфейс програмного забезпечення зручний і простий у використанні, що дозволяє за мінімальну кількість часу створити розрахункові моделі, визначити всі навантаження і найбільш не вигідні їх комбінації, дослідити напружено-деформований стан вісесиметричного тіла, візуалізувати та проаналізувати отримані результати для прийняття проєктних рішень та визначення стану конструкції.

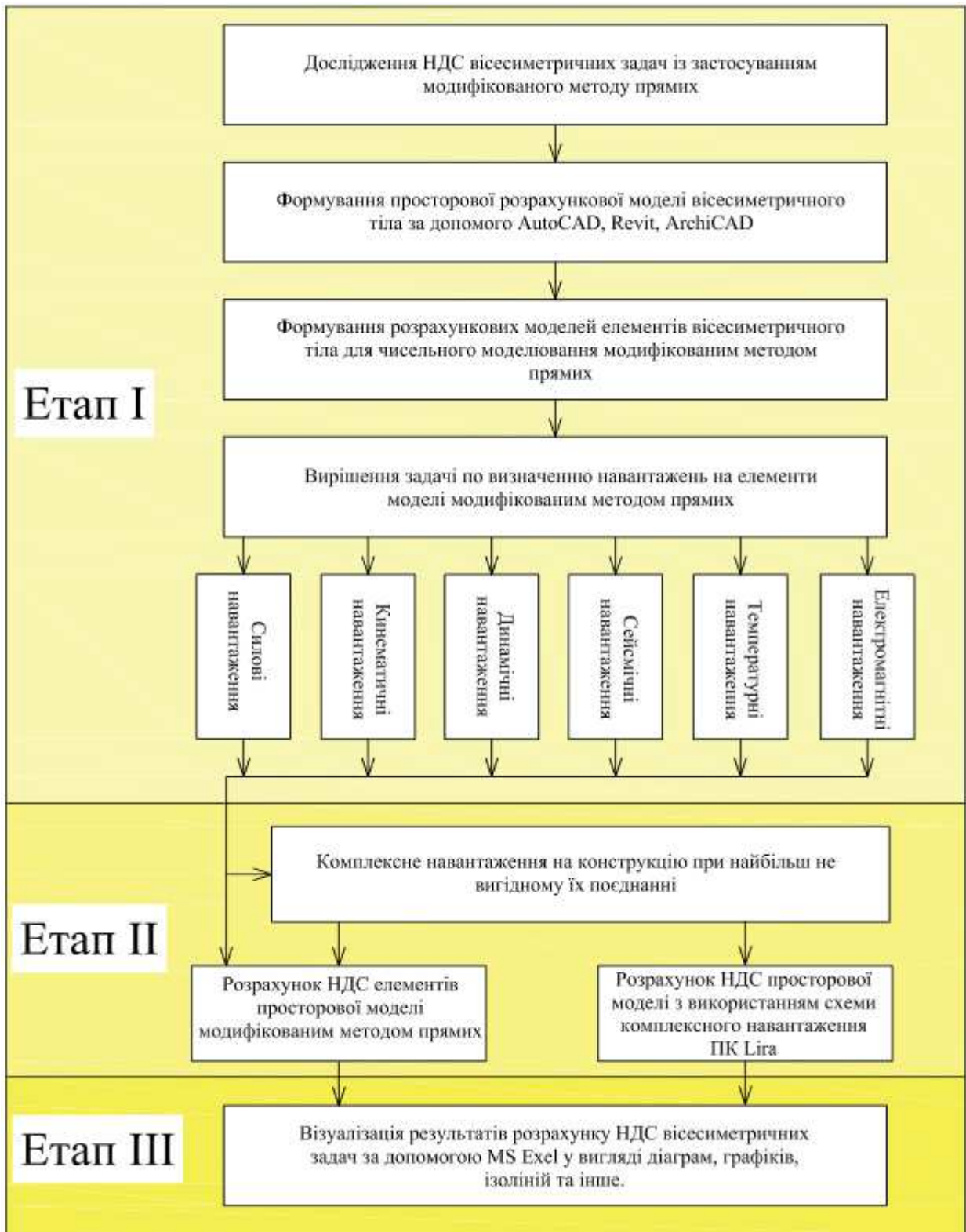


Рис 4.1 Блок схема ПЗ для дослідження НДС вісесиметричних тіл із застосуванням модифікованого методу прямих

4.2 Тестування методики та програмного забезпечення на прикладі задачі про теплопровідність циліндру

З метою тестування основних положень розробленої методики та розрахункового програмного забезпечення, вирішено ряд задач по визначенню НДС нетонких пластин циліндричної форми та товстих оболонок від впливу термосилового навантаження. За розробленим програмним забезпеченням існує можливість дослідити НДС вісесиметричних тіл з використанням методу прямих при різних видах навантажень, та при всіх можливих комбінаціях цих навантажень. В першій тестовій задачі результати числового аналізу, отримані за допомогою розробленого програмного забезпечення, порівнюються з результатами аналітичного розрахунку та методу НМСЕ [69]. Наступна задача вирішена для перевірки запропонованої методики при розрахунку на термосилові впливи. За результатами розрахунку задачі різниця між методами має невелике відхилення, що підтверджує достовірність розробленої методики.

Розв'язок задачі теплопровідності циліндричної стінки

Вихідні дані: $r_1 = 10$ мм, $r_2 = 40$ мм, температура на внутрішній поверхні стінки $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $T_2 = 400^\circ\text{C}$. Дискретна модель приведена на Рис. 4.2.

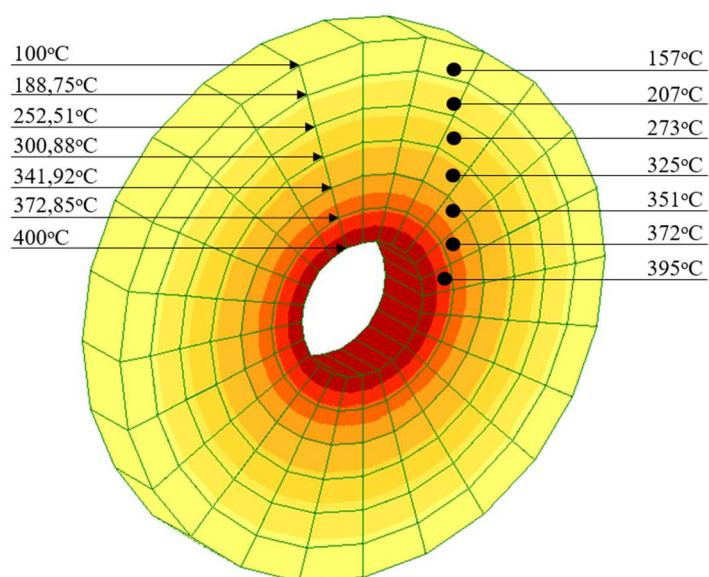


Рис. 4.2 Дискретна модель з наведеними значеннями температури

таблиця 4.1

ρ , мм	Температура T , °C			Похибка, %	
	Аналітично	Модифікований метод прямих	НМСЕ	Модифікований метод прямих	НМСЕ
10	100	100	100	0	0
15	187,74	188,75	186,68	0,53	0,56
20	250	252,51	247,93	1,00	0,83
25	298,27	300,88	296,15	0,87	0,71
30	337,74	341,92	336,65	1,23	0,32
35	371,10	372,85	370,33	2,63	0,20
40	400	400	400	0	0

Моделювання напружено-деформованого стану циліндричного елемента конструкції від температурного та силового впливу.

За розробленою методикою було проведено комп'ютерне моделювання конструкції трубопроводу великого тиску, для роботи в парових турбінах, при внутрішньому тиску в ньому до 15 МПа та температурі $T_B = 550^\circ C$. Зовнішня поверхня трубопроводу термоізолювана $T_3 = 60^\circ C$. Внутрішній діаметр труби 20 мм, зовнішній діаметр – 80 мм, довжина відрізка труби, що заземлення по торцям складає 2000 мм. На першому етапі проведено моделювання температурних полів та визначені переміщення, що виникають в поперечних перерізах конструкції за рахунок вирішення задачі термопружності модифікованим методом прямих. На Рис 4.3 показані ізолінії температурних полів, що виникають в поперечних перерізах.

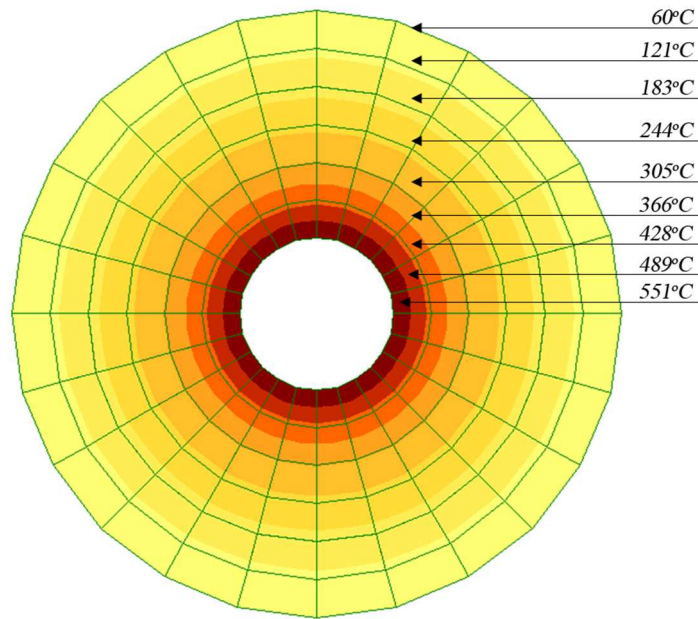
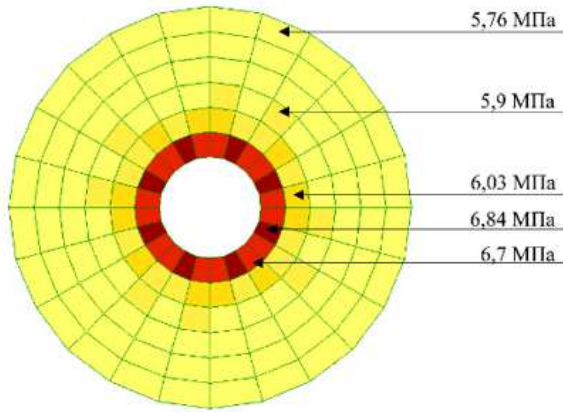
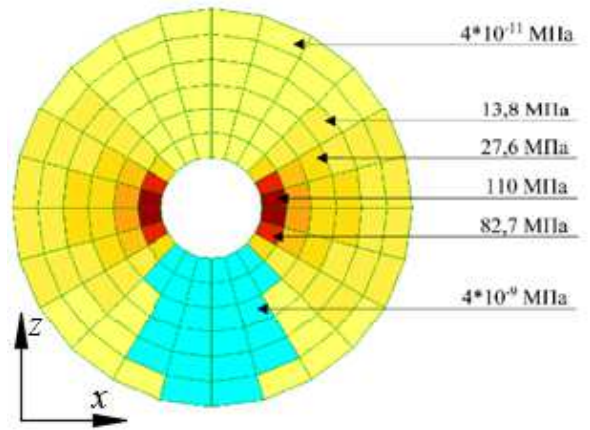


Рис.4.3 Ізолінії температурних полів.

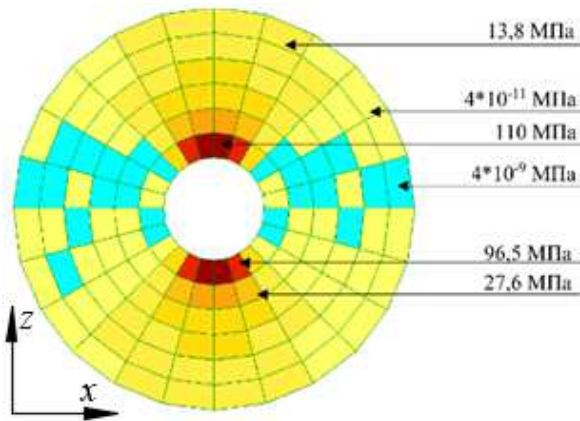
На другому етапі формується комп'ютерна модель конструкції з урахуванням температурних навантажень, власної ваги конструкції та внутрішнього тиску пари. В результаті розрахунку напружено-деформованого стану конструкції на третьому етапі отримані поля нормальних та дотичних напружень у всіх поперечних перерізах. Рис 4.4 та Рис 4.5 показані ізополя цих напружень в середньому та опорному перерізах конструкції. На Рис 4.6 надана деформована схема конструкції при дії на неї комплексного навантаження. Отримані результати демонструють можливості розробленого програмного забезпечення.



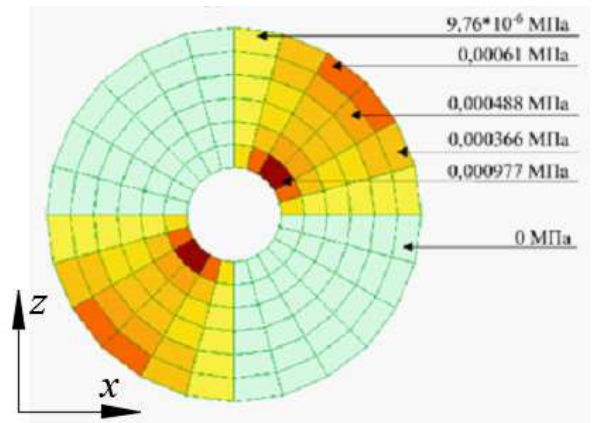
Ізолінії радіального напруження від температурного навантаження



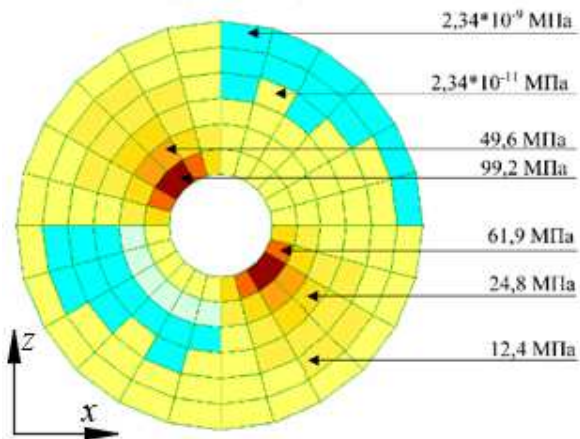
Напруження σ_z



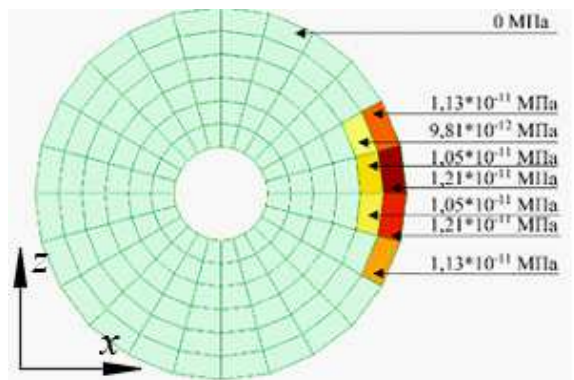
Напруження σ_x



Напруження τ_{xz}

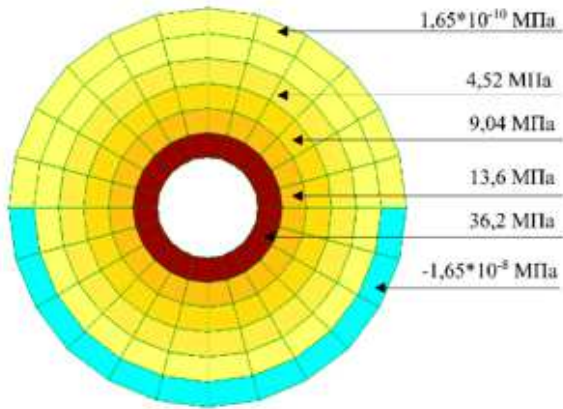


Напруження τ_{yz}

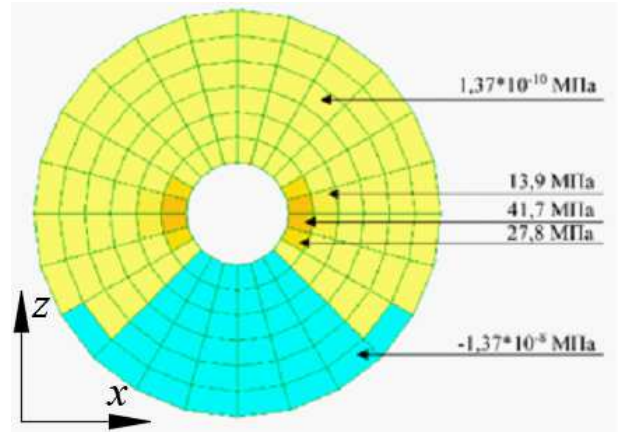


Напруження τ_{xy}

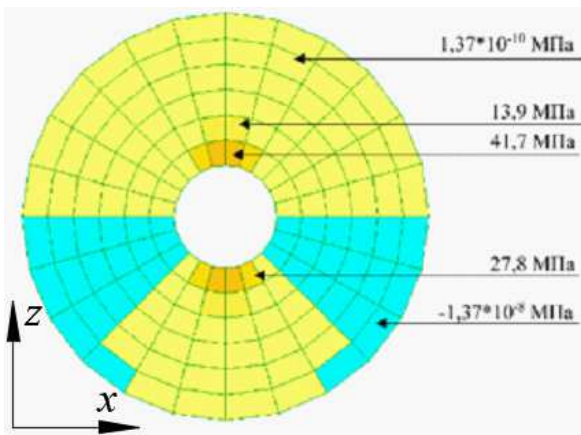
Рис.4.4 Ізополя напружень від комплексного навантаження в середньому перерізі конструкції



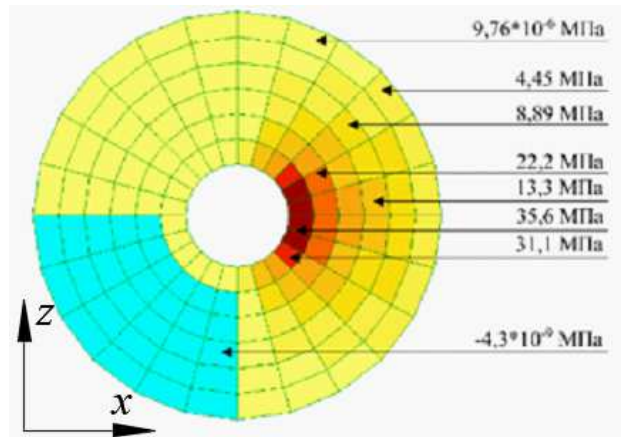
Ізолінії радіального напруження від температурного навантаження



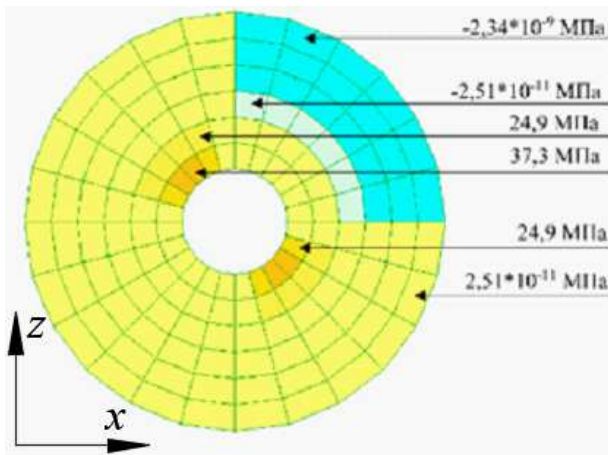
Напруження σ_z



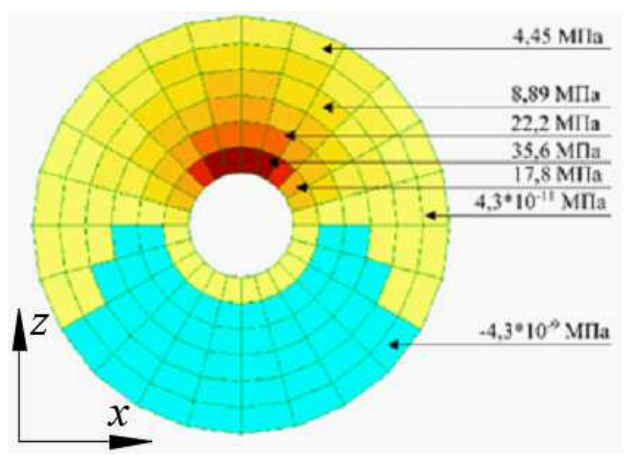
Напруження σ_x



Напруження τ_{xz}



Напруження τ_{yz}



Напруження τ_{xy}

Рис.4.5 Ізополя напружень від комплексного навантаження в опорному перерізі конструкції

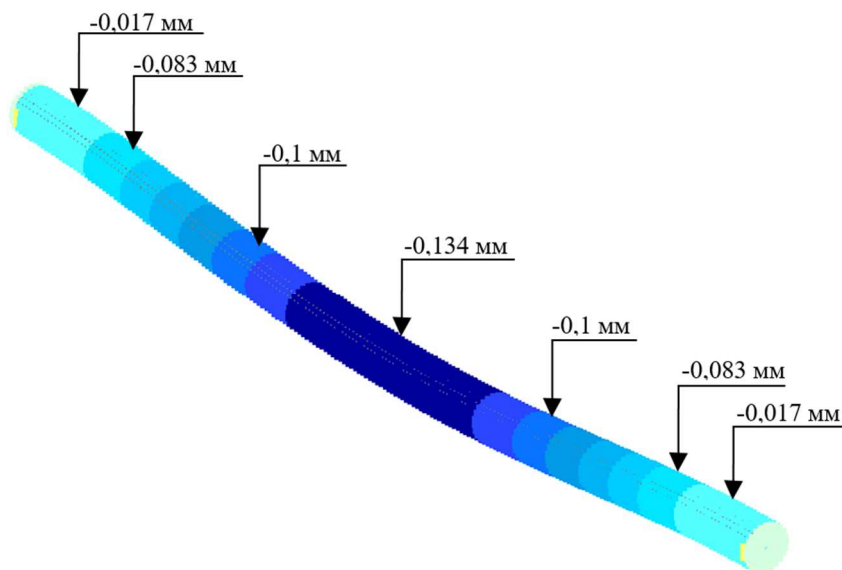


Рис.4.6 Деформована схема конструкції при дії комплексного навантаження

4.3 Дослідження НДС трубопроводів при різних умовах кріплення з урахуванням всіх типів навантажень.

За допомогою власного програмного забезпечення в поєднанні з ПК LIRA SAPR проведено чисельне дослідження НДС реальних задач: магістральних трубопроводів в місцях переходів через перешкоди (автостради, залізничні колії, річки, компенсатори температурного видовження та ін., Рис.4.7, Рис.4.8-4.9)

Для чисельного моделювання були розглянуті сталеві труби довжиною 8м, с жорстким зацмленням по кінцям, зовнішнім діаметром 530мм, з товщиною стінок 10мм, 16мм і 20мм.



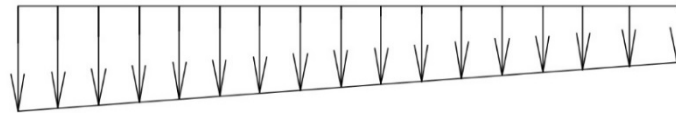
Рис.4.7 Перехід над перешкодою магістрального трубопроводу



Рис.4.8 – 4.9 Компенсатори температурного видовження

*Збір навантажень на сегмент труби
діаметром 530мм і стінкою 20мм (16мм, 10мм)*

Вага теплоносія - 200 кг/м



Власна вага труби - 750 кг/м

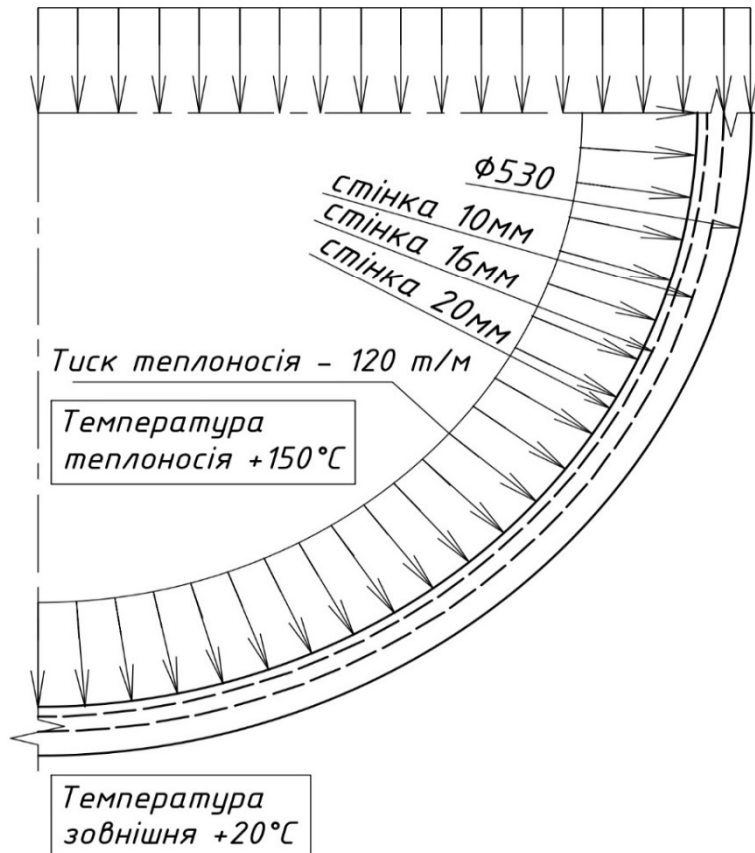
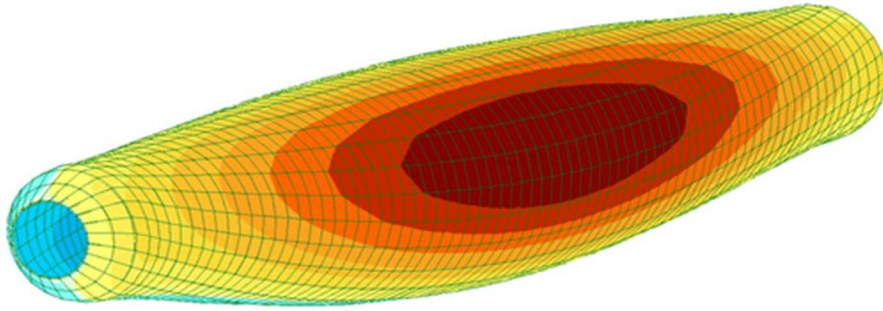
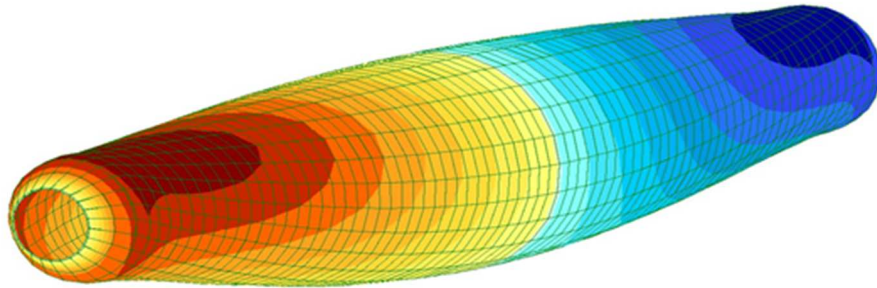
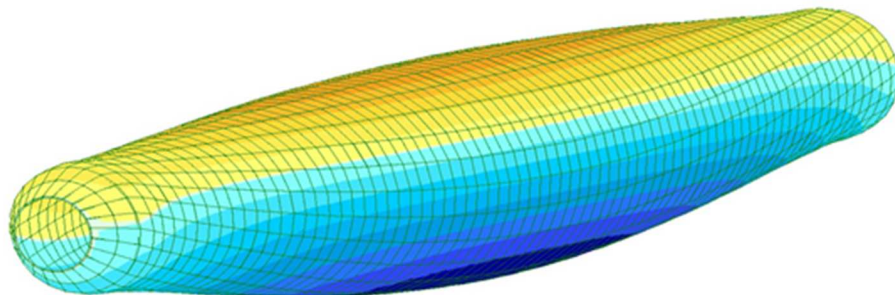


Рис.4.10 Розрахункова схема трубопроводу з навантаженнями

Рис.4.11 Деформована схема та переміщення U_x Рис.4.12 Деформована схема та переміщення U_y Рис.4.13 Деформована схема та переміщення U_z

В комплексному навантаженні на трубопроводи були враховані такі види: - власна вага труби довжиною 8м в залежності від товщини (10мм, 16мм, 20мм) - вага теплоносія (води) всередині труби, - тиск води всередині труби (12 атм. = 120 т/м²), - температура теплоносія всередині труби -150 °С, - температура на зовнішній поверхні труби під утеплювачем - 20 °С, - вага утеплювача та зовнішнього опорядження. Напруження і переміщення визначені від комбінації навантажень за допомогою модифікованого методу прямих. Всі навантаження умовно прийняті як постійні.

На Рис.4.10 показана розрахункова схема трубопроводу з величинами навантажень, що виникають на поверхнях трубопроводів.

В результаті чисельного моделювання напружено-деформованого стану магістральних трубопроводів в місцях переходів та компенсаторів за допомогою розрахункового комплексу LIRA SAPR отримані поля переміщень по осям X, Y, Z. Рис.4.11-4.13 показані переміщення по осям U_x , U_y , U_z для трубопроводів товщиною 10мм від комплексного навантаження, максимальне переміщення виникає по середині прольоту трубопроводу.

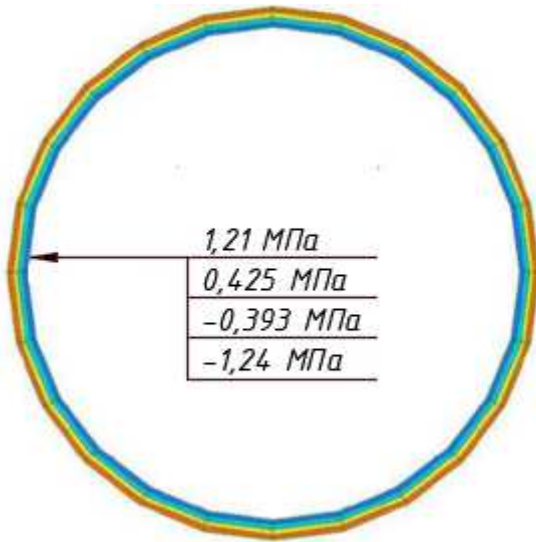


Рис.4.14 Напруження σ_{xx}

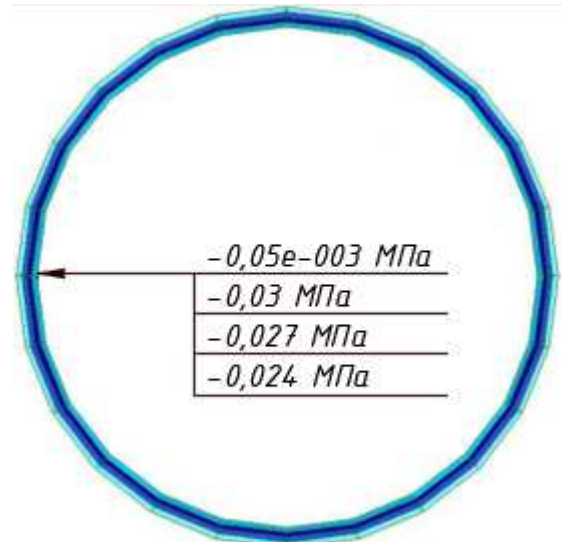


Рис.4.15 Напруження σ_{yy}

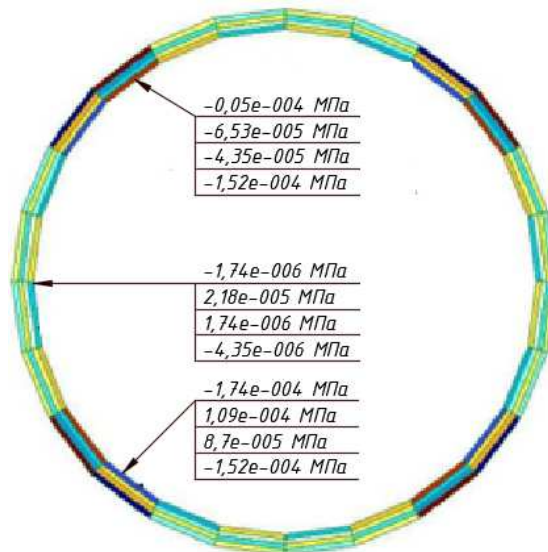


Рис.4.16 Напруження σ_{zz}

На Рис.4.14-4.16 показані результати розрахунку нормальних та дотичних напружень в перерізі трубопроводу посередині прольоту від комплексного навантаження при товщині трубопроводу 20 мм, що були визначені власним програмним забезпеченням за допомогою модифікованого методу прямих.

На Рис.4.17а показані результати розрахунку нормальних, дотичних напружень та на Рис.4.17б переміщень від комплексного навантаження в опорному перерізі трубопроводу при $Y=0$ м та товщині трубопроводу 10 мм.

На Рис.4.18а показані результати розрахунку нормальних, дотичних напружень та на Рис.4.18б переміщень від комплексного навантаження в перерізі посередині прольоту трубопроводу при $Y=4$ м та товщині трубопроводу 10мм на зовнішній поверхні труби.

В таблиці 4.2 представлені максимальні значення величин нормальних, дотичних напружень та переміщень чисельного моделювання трубопроводів в залежності від товщини 10 мм, 16 мм та 20 мм в опорному перерізі при $Y=0$ м.

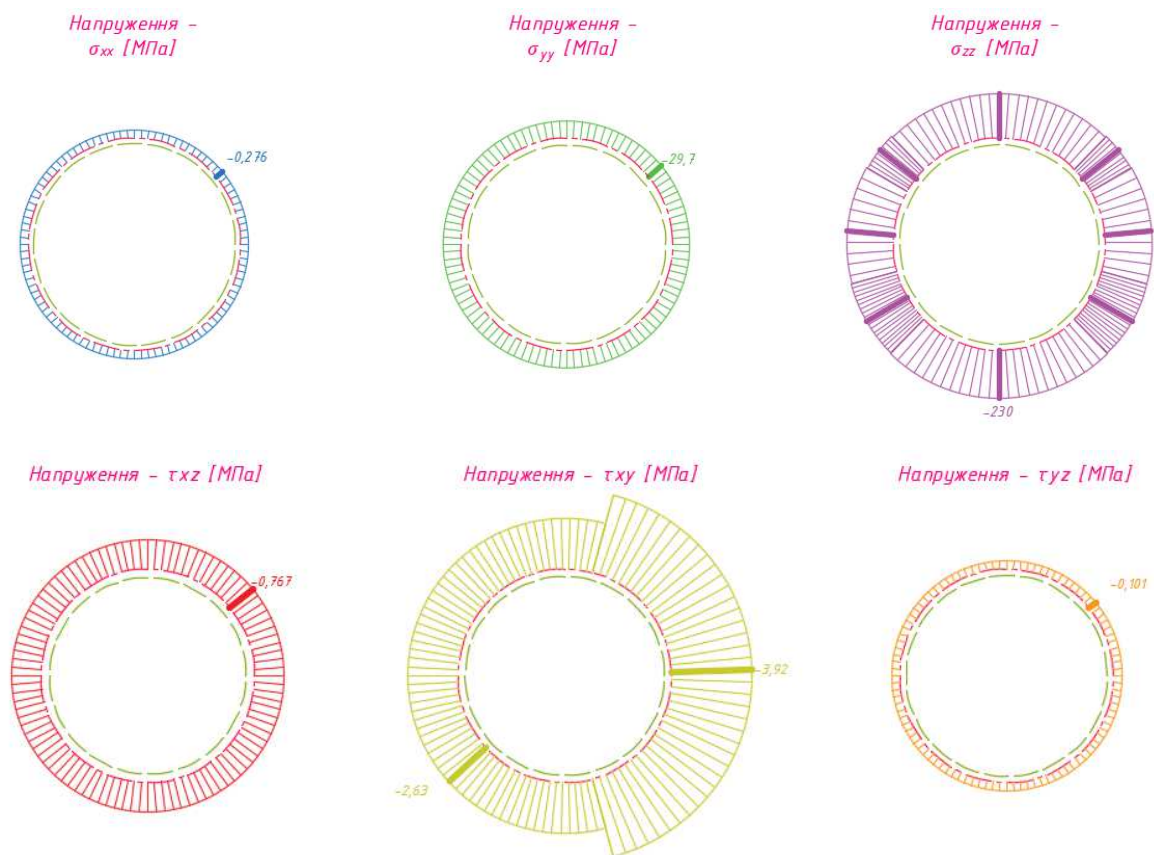


Рис.4.17 а) Напруження в опорному перерізі

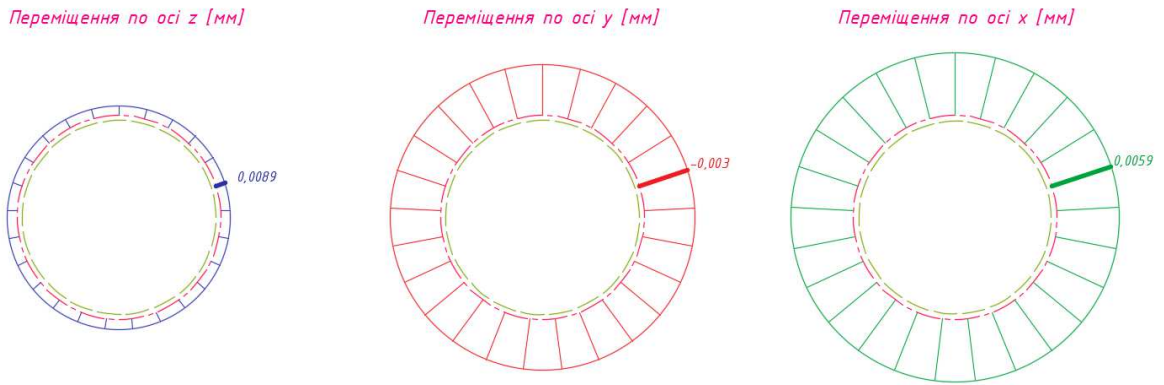


Рис.4.17 б) Переміщення в опорному перерізі

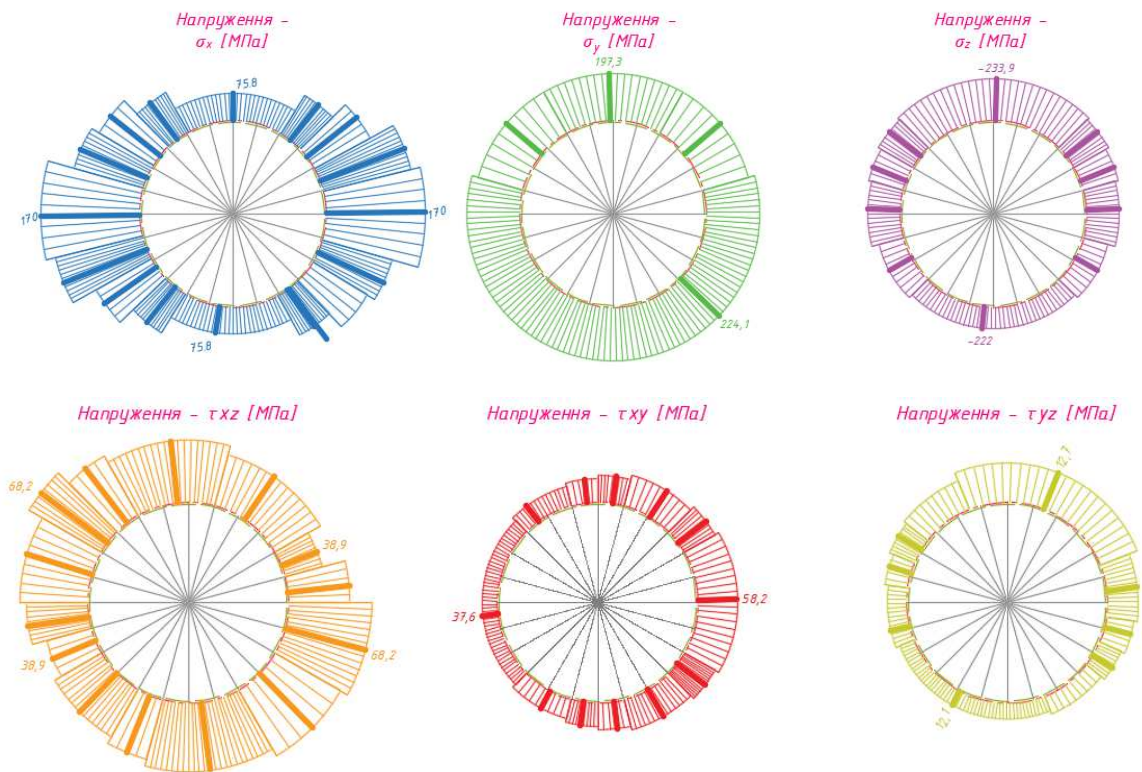


Рис.4.18 а) Напруження в середньому перерізі

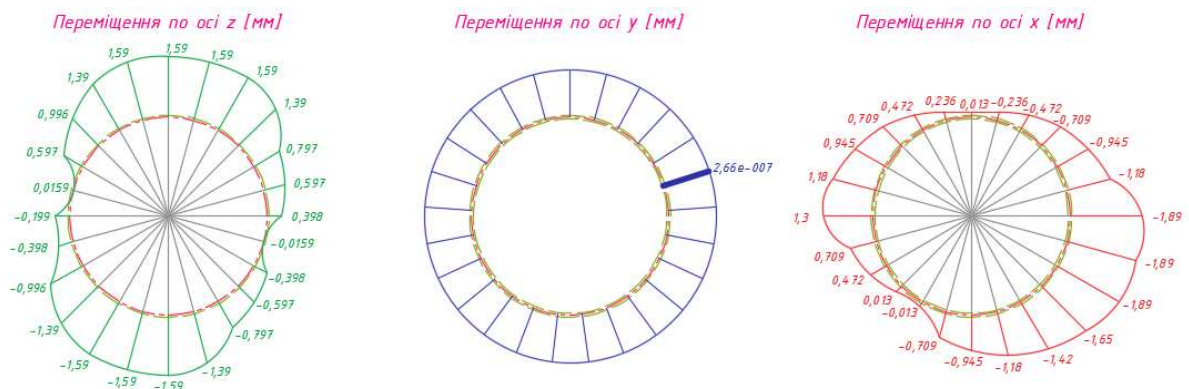


Рис.4.18 б) Переміщення в середньому перерізі

Таблиця 4.2

Товщина трубопро воду, мм	Нормальні напруження, МПа			Дотичні напруження, МПа			Переміщення по осям, мм		
	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	τ_{xz}	τ_{xy}	τ_{yz}	X	Y	Z
10	0,276	29,7	230	3,92	0,101	0,767	0,0059	0,003	0,0089
16	0,214	18,2	231	2,39	0,062	0,471	0,002	0,0031	0,0026
20	0,283	14,3	231	1,88	0,049	0,372	0,0085	0,003	0,0007

В таблиці 4.3 представлені максимальні значення величин нормальних, дотичних напружень та переміщень чисельного моделювання трубопроводів в залежності від товщини 10 мм, 16 мм та 20 мм в перерізі по середині прольоту при $Y=4\text{м}$.

Таблиця 4.3

Товщина трубопро воду, мм	Нормальні напруження, МПа			Дотичні напруження, МПа			Переміщення по осям, мм		
	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	τ_{xz}	τ_{xy}	τ_{yz}	X	Y	Z
10	170	224	234	68,2	58,2	12,7	1,59	0,003	1,89
16	169	266	233	63,5	36,6	13,0	1,02	0,0031	1,26
20	169	266	233	63,2	18,9	13,0	0,848	0,003	1,07

По результатам чисельного моделювання напружено-деформованого стану магістральних трубопроводів в місцях переходів та компенсаторів при товщині 10 мм, 16 мм, 20 мм від комплексного навантаження можна відмітити досить значні величини нормальних напружень, які виникають в місцях поворотів та закріплень,

причому товщина трубопроводу слабо впливає на зміну величини та розподілення напружень в цих місцях.

Аналіз отриманих результатів показує, що найбільші напруження виникають в середньому перерізі трубопроводу від комплексного навантаження на внутрішній поверхні трубопроводів, вплив температурних навантажень в межах 10%.

Посередині прольоту величини напружень та їх розподілення практично не змінюються, також майже не змінюються величини деформацій, вони практично не залежать від збільшення товщини трубопроводів, що дає можливість по суттєвій економії матеріалів та для прийняття оптимальних проєктних рішень.

4.4 Дослідження НДС тунелю метрополітену з урахуванням всіх типів навантажень.

Проведено чисельне моделювання НДС частини тунелю метрополітену на основі створення просторової моделі для розрахунку з використанням власного програмного забезпечення та розрахункового програмного комплексу LIRA SAPR від дії комплексного навантаження. Для чисельного моделювання розглядається частина тунелю метрополітену, з залізобетонних конструкцій довжиною 50м, з жорстким заземленням по кінцям, зовнішнім діаметром 5300мм, з товщиною стінки 200мм, товщина опорної площадки для прокладання ж/д полотна в нижній частині 500мм.

Комплексне навантаження формувалось за допомогою власного програмного забезпечення з використанням модифікованого методу прямих у вигляді переміщень, що діють на внутрішню та зовнішню поверхні тунелю.

Використовуючи модифікований метод прямих, знижуючи вимірності проєкційним методом, вихідні граничні умови обирались природніми з частковим потраплянням до редукованих рівнянь, ідеально пристосованих до застосування найбільш ефективного методу розв'язування одновимірних граничних задач – методу дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.



Рис. 4.19 Тунель метрополітену

На Рис.4.20 показана розрахункова схема тунелю метрополітену з величинами навантажень, що виникають на поверхнях тунелю.

В комплексному навантаженні на тунель метрополітену були враховані такі види: - власна вага конструкції тунелю 550 кг/м^2 ; - вага ґрунту 1300 кг/м^2 ; - власна вага опорної площадки для ж/д колій 1375 кг/м^2 ; - вага потягу на коліях 1500 кг/м^2 ; - бічний тиск ґрунту 600 кг/м^2 ; - також були розглянуті екстремальні умови експлуатації тунелю, при виникненні в ньому пожежі з внутрішньою температурою до $400 \text{ }^\circ\text{C}$, - температура на зовнішній поверхні тунелю $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Для визначення температурного впливу на конструкції тунелю вирішується задача термопружності модифікованим методом прямих та визначаються напруження і переміщення в конструкції тунелю від дії температури Рис.4.21.

Напруження і переміщення визначені від комбінації навантажень за допомогою модифікованого методу прямих формуються у вигляді комплексного навантаження для подальшого розрахунку в розрахунковому комплексі LIRA SAPR. Всі навантаження умовно прийняті як постійні.

Комплексна методика чисельного дослідження просторової моделі тунелю метрополітену передбачає три етапи розрахунку та реалізована у вигляді програмного забезпечення, що дає можливість поряд з формуванням комплексного навантаження від всіх зовнішніх впливів, включаючи температурні впливи, досліджувати

напружено-деформований стан конструкцій за допомогою модифікованого методу прямих при всіх можливих комбінаціях цих навантажень.

На першому етапі формуються вихідні дані у вигляді розрахункової просторової моделі конструкції тунелю метрополітену з використанням можливостей AutoCAD. В подальшому модифікованим методом прямих вирішуються задачі по визначенню навантажень (температурних, силових, кінематичних, електричних і т.д.), на основі яких формується комплексне навантаження на розрахункову модель конструкції у вигляді полів переміщень у вузлах тунелю.

Для аналізу напружено-деформованого стану тунелю метрополітену в екстремальних умовах та формування комплексного навантаження, спочатку була вирішена задача термопружності, завдяки чому були визначені напруження та деформації, що виникають в конструкціях тунелю, від дії на них температурного впливу.

На другому етапі досліджується напружено-деформований стан конструкції модифікованим методом прямих та програмному комплексі LIRA SAPR від комплексної дії на нього статичних та термопружних навантажень при різних умовах закріплення просторової моделі тунелю метрополітену, для прийняття оптимальних рішень при проектуванні елементів конструкцій тунелю. Результати розрахунків візуалізуються за допомогою програмних модулів MS EXCEL у вигляді діаграм, графіків, ізолій, які будуються на основі розрахунків проведених на перших двох етапах.

Збір навантажень на переріз тунелю

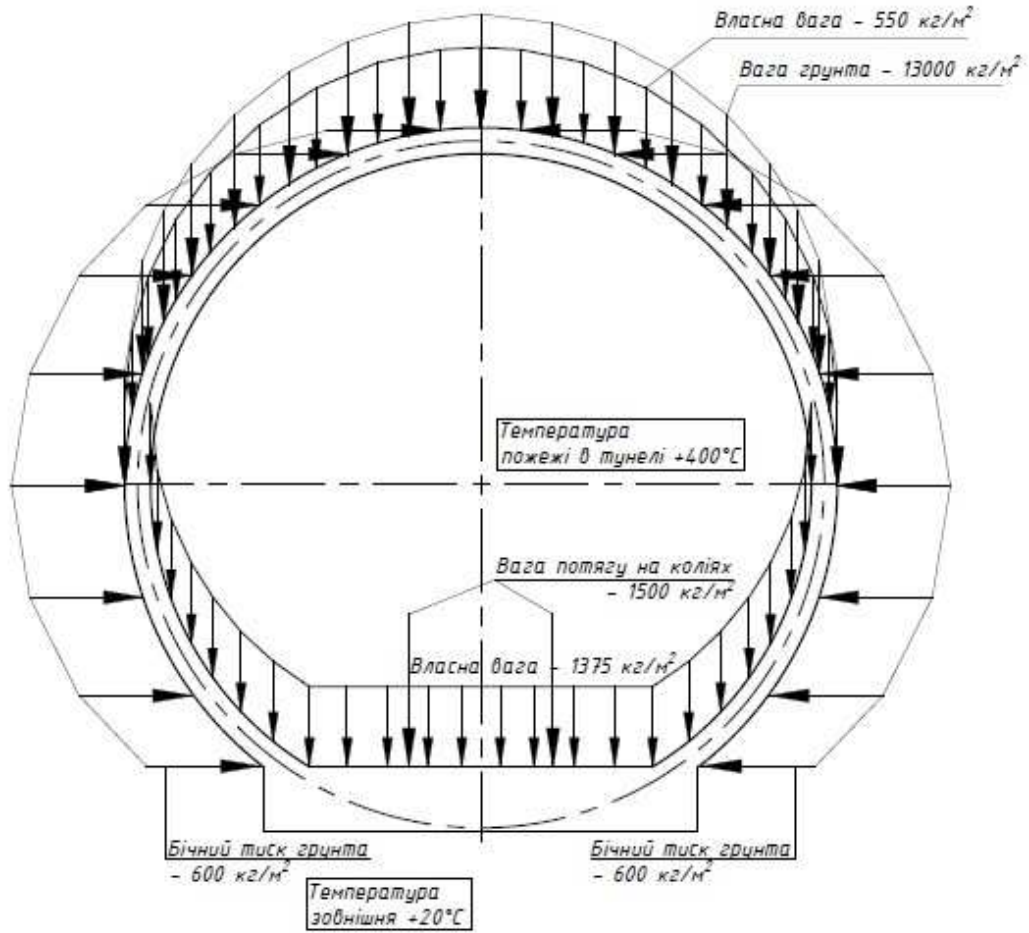


Рис.4.20 Розрахункова схема тунелю метрополітену з навантаженнями

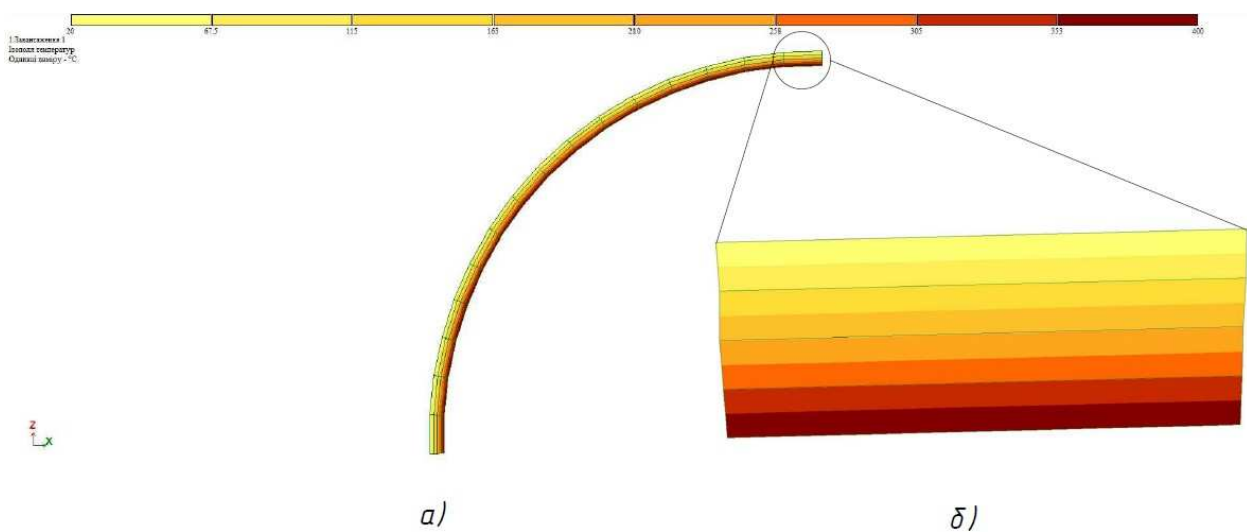


Рис.4.21 Ізополя температур; а) - в чвертині тунелю; б) – в розрахунковому елементі.

На третьому етапі створюється просторова комп'ютерна модель тунелю метрополітену, яка завантажується комплексним навантаженням з попередніх етапів, та автоматично передається у вигляді сформованого поля переміщень для розрахунку в програмний комплекс LIRA SAPR, в яких проводиться чисельне моделювання просторової моделі тунелю для оцінки його міцності, жорсткості і стійкості та розробляється оптимальний проєкт конструкцій тунелю з урахуванням екстремальних умов будівництва та експлуатації.

На Рис. 4.22 представлені ізополя нормальних напружень σ_{xx} – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю. На Рис.4.23 представлені ізополя нормальних напружень σ_{zz} – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю. На Рис.4.24 представлені ізополя дотичних напружень τ_{xz} – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю.

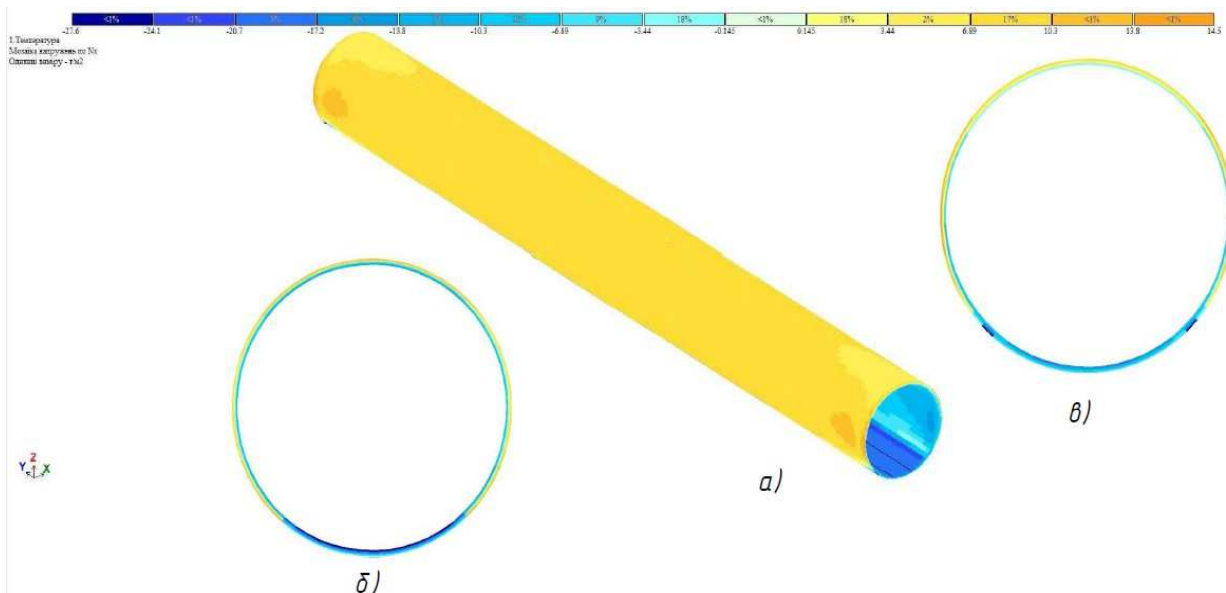


Рис.4.22 Ізополя нормальних напружень σ_{xx} при температурному впливі

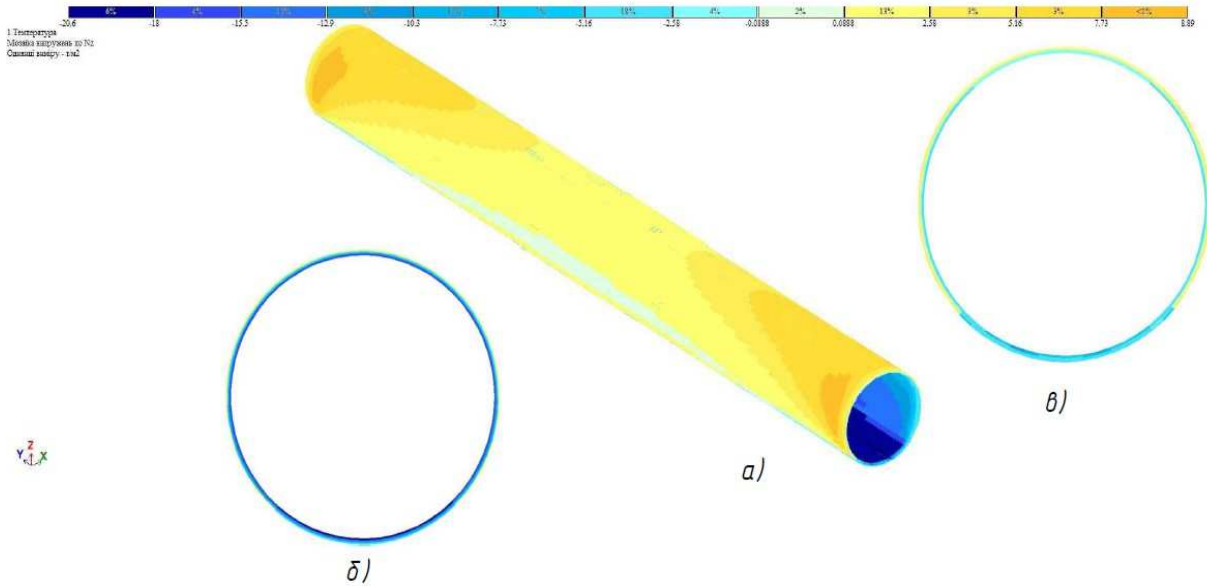


Рис.4.23 Ізополя нормальних напружень σ_{zz} при температурному впливі

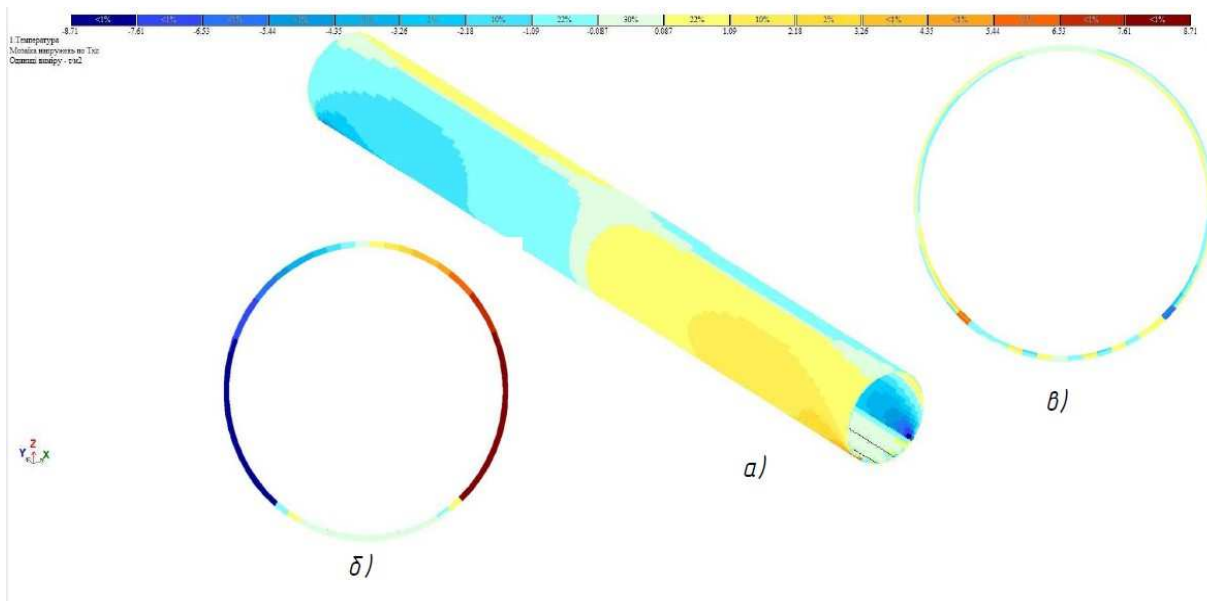


Рис.4.24 Ізополя дотичних напружень τ_{xz} при температурному впливі

На Рис.4.25 представлені ізополя переміщень U_x – а) розподілення переміщень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю. На Рис.4.26 представлені ізополя переміщень U_y – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю;

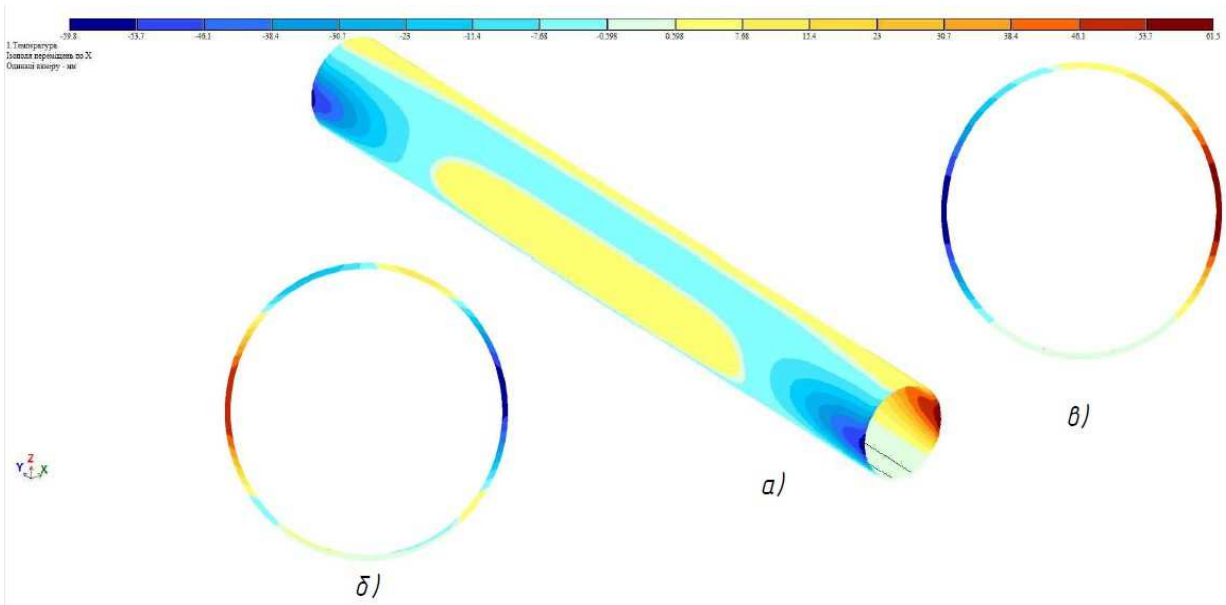


Рис.4.25 Ізополя переміщень U_x при температурному впливі

в) в середньому поперечному перерізі тунелю. На Рис.4.27 представлені ізополя переміщень U_z – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю.

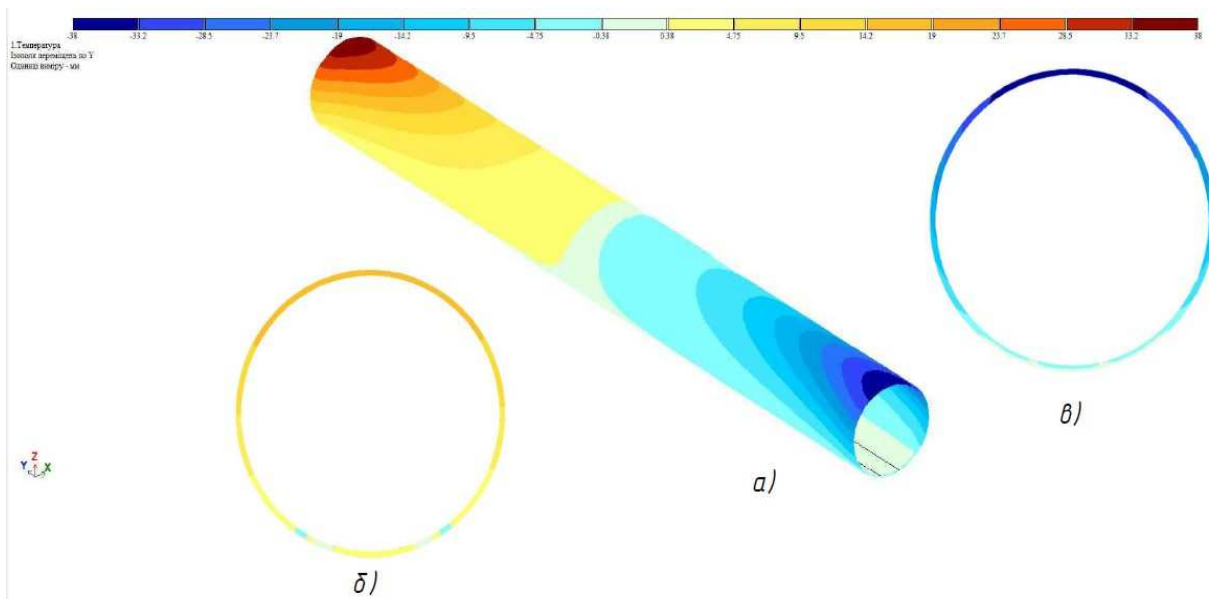


Рис.4.26 Ізополя переміщень U_y при температурному впливі

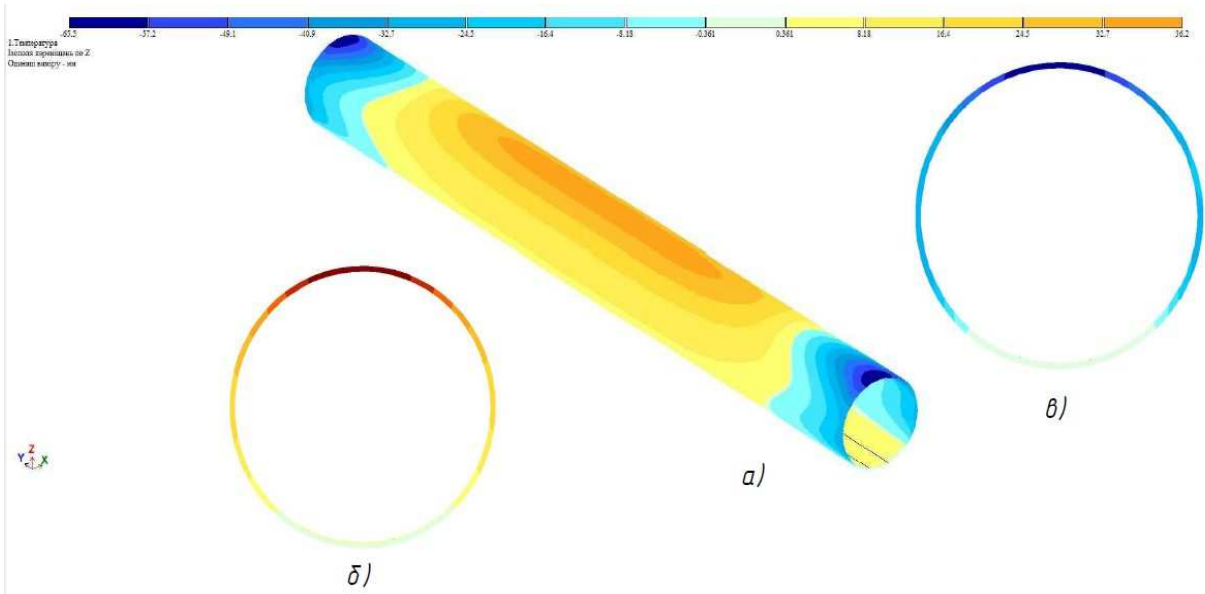


Рис.4.27 Ізополя переміщень U_z при температурному впливі

Розрахунок тунелю на температурні впливи модифікованим методом прямих дав можливість сформуванню комплексного навантаження на його конструкції від дії статичного та температурного навантаження та передати його у вигляді полів переміщень для розрахунку міцності, жорсткості та стійкості просторової чисельної моделі тунелю метрополітену в програмному комплексі LIRA SAPR. На Рис.4.28-4.30 представлені результати розрахунку тунелю метрополітену від комплексного навантаження в програмному комплексі LIRA SAPR.

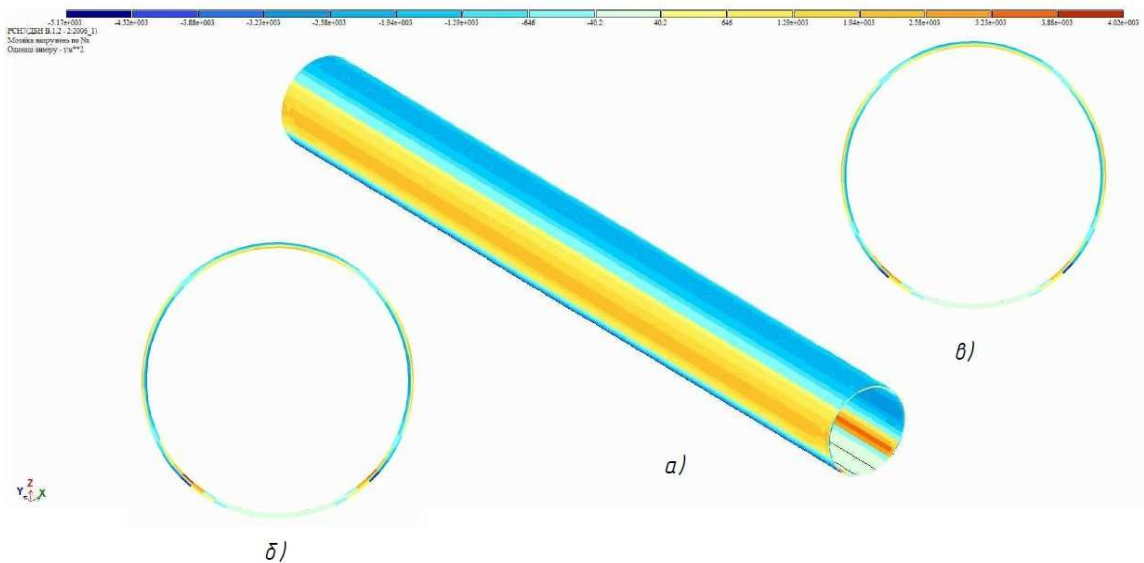


Рис.4.28 Ізополя нормальних напружень σ_{xx} при комбінації навантажень

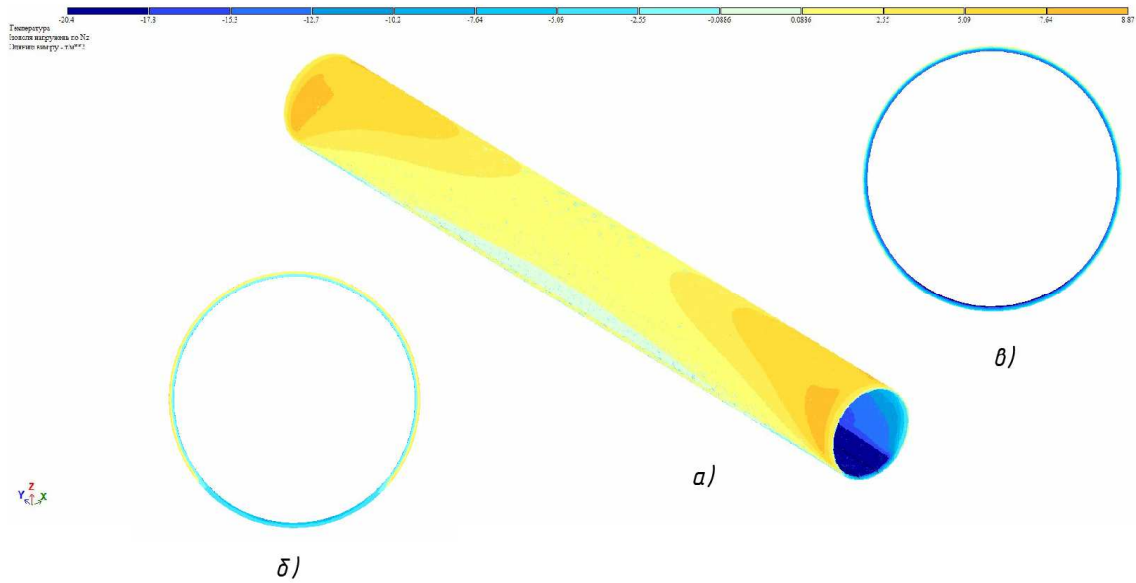


Рис.4.29 Ізополя нормальних напружень σ_{zz} при комбінації навантажень

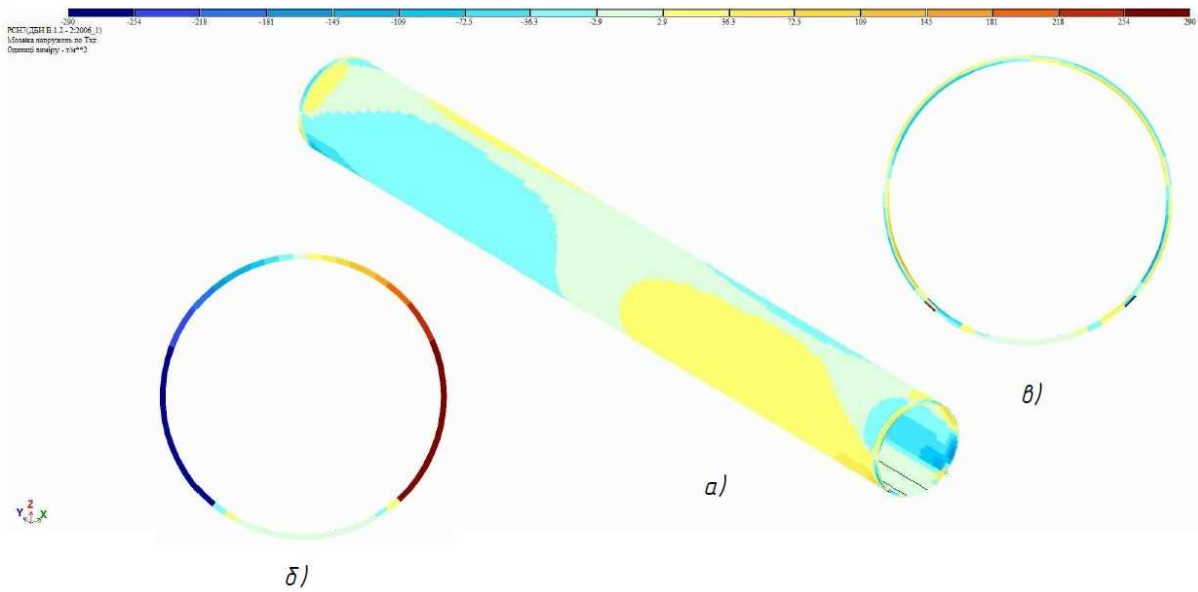


Рис.4.30 Ізополя дотичних напружень τ_{xz} при комбінації навантажень

На Рис.4.28 представлені ізополя нормальних напружень σ_{xx} – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю

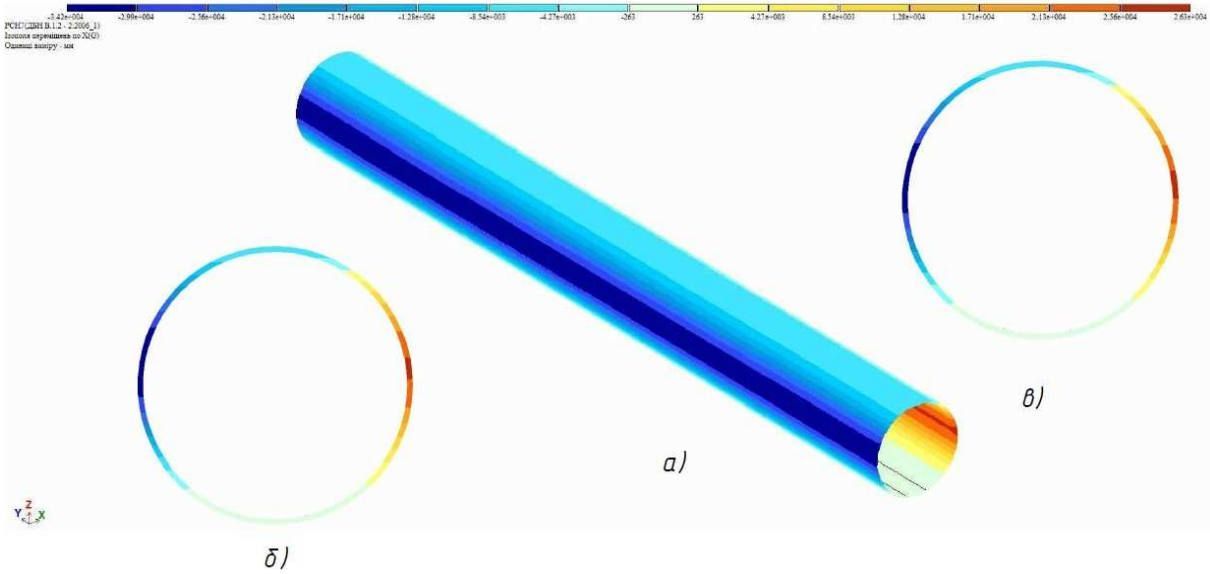


Рис.4.31 Ізополя переміщень U_x при комбінації навантажень

На Рис.4.29 представлені ізополя нормальних напружень σ_{zz} – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю. На Рис.4.30 представлені ізополя дотичних напружень τ_{xz} – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю.

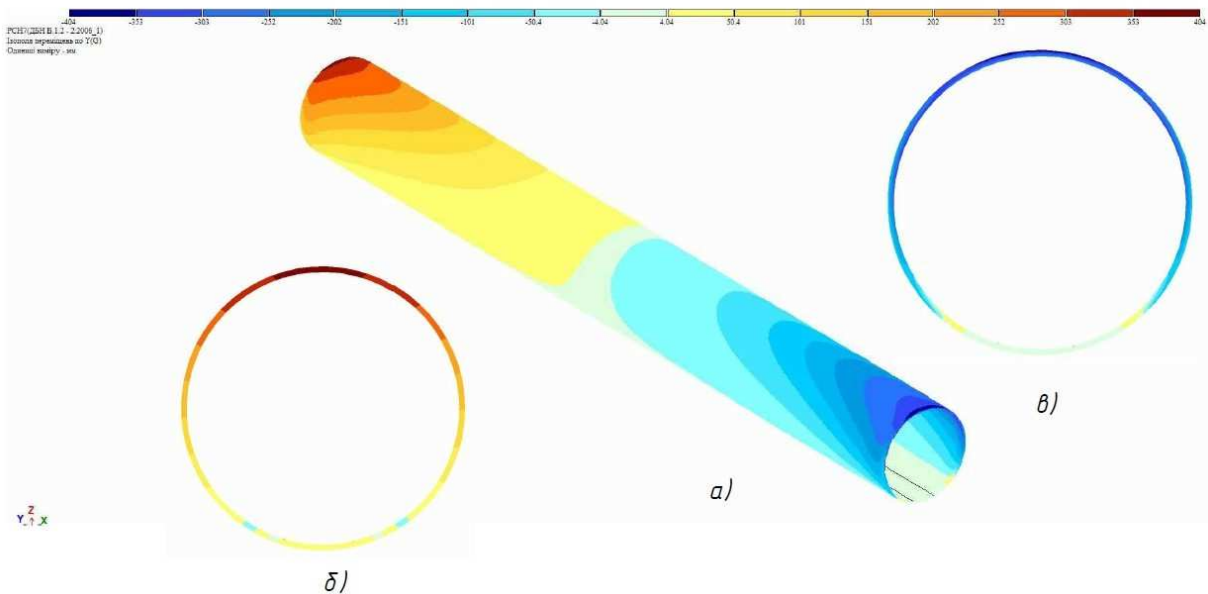


Рис.4.32 Ізополя переміщень U_y при комбінації навантажень

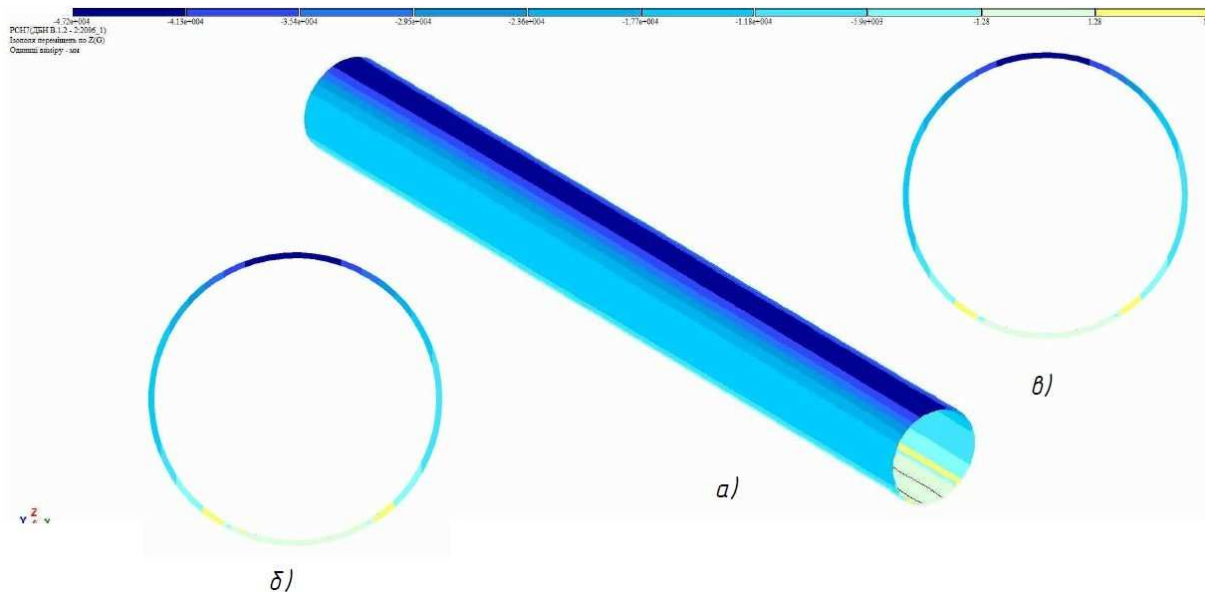


Рис.4.33 Ізополя переміщень U_z при комбінації навантажень

На Рис.4.31 представлені ізополя переміщень U_x – а) розподілення переміщень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю. На Рис.4.32 представлені ізополя переміщень U_y – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю. На Рис.4.33 представлені ізополя переміщень U_z – а) розподілення напружень по розрахунковій частині тунелю; б) в крайньому поперечному перерізі тунелю; в) в середньому поперечному перерізі тунелю.

Аналіз результатів чисельного моделювання просторової моделі тунелю метрополітену від дії комплексного навантаження (статичного та температурного) показав значний вплив температурного навантаження, що призводить до збільшення напружень та переміщень на величину до 40-50% та може привести до втрати міцності та жорсткості окремих конструкцій тунелю та втрати загальної несучої спроможності тунелю в цілому. Створена методика чисельного моделювання просторових моделей та комплексне програмне забезпечення значно прискорює прийняття оптимальних проєктних рішень.

Методика чисельного моделювання просторової моделі тунелю метрополітену за допомогою програмного забезпечення, що використовує напіваналітичний модифікований метод прямих в комплексі з розрахунковим комплексом LIRA SAPR, дає можливість визначення напружено-деформованого стану, міцності та жорсткості конструкцій тунелю і зробити висновки про загальний стан його конструкції. В процесі моделювання були враховані всі можливі статичні та температурні навантаження на тунель а також враховані екстремальні умови, у вигляді виникнення пожегу в середині тунелю.

4.5 Результати впровадження роботи та перспективи розвитку

Методика чисельного моделювання НДС, міцності і жорсткості тіл з використанням напіваналітичних методів будівельної механіки, поряд з сучасними чисельними методами, дає можливість вирішувати задачі, з урахуванням складних зовнішніх навантажень та їх комбінацій, і є актуальною задачею прикладної механіки, що значно прискорює прийняття оптимальних проектних рішень по зменшенню матеріаломісткості конструктивних елементів будівель, споруд, машин та механізмів.

Одним з основних напрямків вирішення складної проблеми щодо розв'язку просторових задач розрахунки НДС, міцності та жорсткості, в рамках просторових співвідношень теорії пружності, є створення комплексних методик розрахунку вісесиметричних тіл, що паралельно використовують чисельні та аналітичні методи для підвищення точності розрахунків та швидкості прийняття оптимальних проектних рішень.

Як правило сучасні методики розрахунків використовують чисельні методи, в зв'язку з простотою їх застосування та все збільшуваними можливостями комп'ютерної техніки. Можливість побудови комплексних методик з використанням аналітичних та чисельних методів чисельного моделювання НДС, міцності і жорсткості конструктивних елементів та деталей значно підвищує ефективність цих розрахунків.

Особливістю даного підходу є швидкість здійснення розрахункових операцій, наочність процесів оптимального проєктування та їх графічна інтерпретація, комплексний підхід і об'єднання етапів розрахунку та аналізу для прийняття оптимальних рішень.

Запропонований підхід викладений в даній роботі може знайти подальше застосування шляхом інтеграції в комплексні пакети програмного забезпечення для подальшої автоматизації процесів чисельного моделювання на всіх етапах створення проєктів будівель, споруд, машин та механізмів. При інтерактивній реалізації в середовищі програмного комплексу доцільно передбачити можливість їх коригування.

Впроваджені результати дисертаційної роботи в ТОВ «ІТЦ», «ІВІК». Засвідчують, що розроблений програмний комплекс на основі використання напіваналітичного методу прямих поряд з програмним комплексом LIRA SAPR є дієвим інструментом для розрахунку вісесиметричних тіл та значно пришвидшує прийняття оптимальних та ефективних проєктних рішень.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Розроблена функціональна схема та програмне забезпечення для чисельного дослідження НДС, міцності і жорсткості вісесиметричних тіл з застосуванням модифікованого методу прямих в комплексі з програмним комплексом LIRA SAPR.

2. Проведено чисельне моделювання основних положень розробленої методики і програмного забезпечення на прикладі задачі про теплопровідність циліндру, що демонструють можливості розробленого програмного забезпечення.

3. Проведено дослідження НДС магістральних трубопроводів в місцях переходів через перешкоди та компенсатори від комплексного навантаження, що дало можливість виявити значні величини напружень в місцях поворотів та закріплень, нерівномірність їх розподілення по товщині та значний вплив на НДС температурних навантажень і навантажень від внутрішнього тиску теплоносія.

4. Проведено чисельне моделювання тунелю метрополітену. Завдяки створеній чисельній моделі тунелю метрополітену та врахуванню всіх зовнішніх навантажень виявляються найбільш не вигідні місця концентрації впливів (силових, температурних) на конструкції тунелю, що може привести до його руйнування, розкриття тріщин в бетоні, оголення та корозії робочої арматури, зміни механічних характеристик конструктивних матеріалів та загального зниження несучої спроможності. Результати чисельного моделювання температурних впливів на конструкції тунелю метрополітену, за рахунок вирішення задачі термопружності, показали значне зростання величини нормальних та дотичних напружень і деформацій при виникненні пожегу в середині тунелю.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 4:

1. Янсонс М.О. Моделювання температурних впливів в масивних тілах за допомогою модифікованого метода прямих. / Марчук О.С., Кошевий О.П., Чубарев

А.Г.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 82. – Київ, КНУБА, 2023. – С. 185-197.

2. Янсонс М.О. Побудова комплексної моделі реконструкції шляхопроводу на основі обстеження з використанням BIM-технологій /Кошевий О.П., Кошева В.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 83. - Київ, КНУБА, 2023. – С. 143-155.

3. Янсонс М.О. Чисельне моделювання просторової моделі шляхопроводу для оцінки міцності та жорсткості на основі обстеження з використанням розрахункового комплексу Lira. /Кошевий О.П, Кошева В.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 84. – Київ, КНУБА, 2023. – С. 171-180.

4. Янсонс М.О. Чисельне моделювання напружено деформованого стану магістральних трубопроводів в місцях переходів та компенсаторів при комплексному навантаженні. /Кошевий О.П., Кошева В.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 85. – Київ, КНУБА, 2024. – С. 257-267.

5. Янсонс М.О. Чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач нестационарної теплопровідності не тонкої кільцевої пластини. /Кошевий О.П., Левківський Д.В., Сович Ю.В., Пошивач Д.В.// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вип.112 – Київ, КНУБА, 2024. - С. 185-194.

6. Янсонс М.О. Чисельне моделювання температурних впливів на шляхопровід для створення просторової комп'ютерної моделі реконструкції. / Кошевий О.П., Кошева В.О., Чубарев А.Г., Марчук О.С.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 112. – Київ, КНУБА, 2024. – С.161-169.

7. Янсонс М.О. Чисельне моделювання просторової моделі стану пошкодженого дев'ятиповерхового будинку для оцінки міцності та жорсткості на основі результатів обстеження. /Кошевий О.П., Лазарева М.В., Чубарев А.Г., Смоленский А.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип. 86. – Київ, КНУБА, 2024. – С. 314-328.

ВИСНОВКИ

В дисертаційному дослідженні на основі модифікованого методу прямих було вирішено ряд важливих задач:

1. Модифіковано варіаційний принцип, який ґрунтується на використанні методу Гамільтона в аналітичній механіці, стосовно виведення тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності тіла описують деформування нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних.

2. Приведені тривимірні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних до одновимірних з використанням процедури методу Бубнова-Гальоркіна, за якою всі функції напружень і переміщень розкладені у подвійні тригонометричні ряди за коловим напрямком і вздовж твірної циліндра так, щоб вони задовольняли крайовим умовам.

3. Розроблені алгоритми використання модифікованого методу прямих та комп'ютерне програмного забезпечення, в якому в єдиному обчислювальному процесі поєднуються з розрахунковим комплексом LIRA SAPR процедури для встановлення параметрів напружено-деформованого стану та розрахунку конструкцій нетонких пластин та циліндричних оболонок, в тому числі товстостінних, при термосиловому навантаженні.

4. Для тестування методики проведено чисельне моделювання задачі про теплопровідність циліндру та продемонстровані можливості роботи програмного забезпечення при різних комбінаціях дії зовнішніх силових та температурних факторів, що не викликають сумнівів стосовно їх достовірності.

5. Проведено чисельне моделювання реальних конструкцій на основі розробленого комп'ютерного програмного забезпечення, щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану трубопроводів в місцях компенсаторів та переходів через перешкоди і тунелю метрополітену при екстремальних умовах експлуатації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамян Б.Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. // Докл. АН Арм. ССР. – Т.19 - №3 – 1954.– С. 3 - 12.
2. *Абрамян Б.Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. // Докл. АН Арм. ССР. – Т.26. – №2. – 1958. – С. 65 - 72.
3. *Абрамян Б.Л. Александров А.Я.* Осесимметричные задачи теории упругости. // Тр.2 Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике 1964 г. - №3. – М., Наука, 1966. – С. 7 - 37.
4. *Абрамян Б.Л., Бабляян А.А.* Об одной задаче осесимметричной деформации полого цилиндра конечной длины. // Изв. АН Арм. ССР. – Т.15 - №2 - Сер. физ.-мфт. наук., 1968. – С. 87-99.
5. *Алихашкин Я. И.* Решение задачи о несовершенной скважине методом прямых. // Вычислит, матем., сб. - Вып.1. – 1957. - С. 136 - 152.
6. *Александров А.Я., Соловьев Ю.И.* Пространственные задачи теории упругости. // – М., Наука, 1978. – 462 с.
7. *Атавин А.А., Тарасевич В.В.* Описание переходных процессов в сложных трубопроводных системах моделями с сосредоточенными параметрами. // Труды международной конференции RDAMM - 2001 – Т. 6, ч. 2. – Специальный выпуск. 2001. - С. 70-75.
8. *Ахиезер В.Г.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней. // - М., Физматгиз, 1961. – 310 с.
9. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Напіваналітичний кільцевий скінченний елемент для моделювання просторового напруженого стану армованих тіл з тріщинами. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вип.91. – Київ, КНУБА, 2013. - С. 147 - 156.
10. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних

- тіл обертання з довільними граничними умовами. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. - Вип.77. – Київ, КНУБА, 2005. – С. 3 - 29.
11. *Баженов В.А., Гуляев В.И., Гоцуляк Е.А., Ермишев В.Н., Мельниченко Г.И., Оглобля А.И.* Расчет на устойчивость оболочек сложной формы. // - К., КИСИ, 1987. – 134 с.
12. *Баженов В.А., Сахаров О.С., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.* Особливості використання моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вип.92. Київ, КНУБА, 2014. - С. 3 - 15.
13. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. // - 2 изд. - М., 1975. – С.361-580.
14. *Безверхий О.И., Григор'єва Л.О.* Варіаційно-сплайновий метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. - Вип.98. – Київ, КНУБА, 2017. - С. 149 - 161.
15. *Безверхий О.И., Григор'єва Л.О.* Електромеханічна чутливість круглих та кільцевих п'єзоелектричних тонких пластин при механічному збуренні. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. - Вип.77. – Київ, КНУБА, 2005. - С. 3 - 29.
16. *Белоус В.А.* Способы аппроксимации упругой поверхности крыла при расчете на прочность его методом прямых. // Ученые записки ЦАГИ. - Т.10, №4. – 1979. – С.90-97
17. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. // пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; под ред. Э.И. Гриролюка.// - М., Мир, 1984. – С. 494.
18. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. // - 2 изд., т.2 - М.,Наука 1962. С. 254-340.
19. *Блейха Ф. и Мелана Е.* Уравнения в конечных разностях статике сооружений. // ОНТИ ДНТВУ НКТП. – Харьков, ГНТИ України, 1936. – 380 с.

20. *Блохін А.М., Ибрагімова А.С., Красніков Н.Ю.* Об одном варианте метода прямых для уравнения Пуассона. // Вычислительные технологии. - Т.12, №2. - 2007, С. 33 - 42.
21. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. // - М., Мир, 1982. – 248 с.
22. *Бурбаки Н.* Алгебра: Алгебраические структуры. // Линейная и полилинейная алгебра. - М., Физматлит, 1962. – 516 с.
23. *Буледза А.В.* О применении метода прямых к решению некоторых задач для уравнения Пуассона. // Доклады и сообщения УжГУ. - №5. - Серия физ.-мат.наук., 1962 – С. 92 - 97.
24. *Буледза А.В., Король І.Ю.* Про один варіант методу прямих у проблемі власних коливань прямокутних пластин. // ДАН УРСР. - №7. - Сер. А., 1970. - С. 624 - 627.
25. *Бухаринов Г.Н.* К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра // Вестн. Лен. гос. университета. – Т.2. – Сер. мат., физ. и хим. 1952. – С. 3 - 23.
26. *Бухаринов Г.Н.* Осесимметричная деформация цилиндра конечной длины. // Вестн. Лен. гос. университета. – Т.7. – Сер. мат., физ. и хим. 1956 – С. 77 - 86.
27. *Вайнберг Д.В., Синявский А.Л.* Расчет оболочек. // - Киев, Госстройиздат УССР, 1961. – 199 с.
28. *Варвак П.М.* Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. // ч. 1, ч. 2. – Киев, изд. АН УССР, 1949(ч. 1). – 252 с. - 1952(ч. 2). – 275 с.
29. *Васильев В.З.* Осесимметричная деформация упругого изотропного полупространства с бесконечной цилиндрической выемкой. // Инж. жур. Механ. твер. тела. – Т.5 - 1968 – С. 124 - 129.
30. *Васильев В.З.* Осесимметричная деформация полупространства с жестким полубесконечным цилиндрическим включением. // Изв. выс. учеб. завед. Сер. стр-во и архитектура. - №6 – 1969 – С. 26 - 28.
31. *Васильев В.З.* Концентрация напряжений около торца полубесконечного кругового цилиндра при осесимметричном нагружении. // Изв. выс. учеб. завед. - №12. – М., Машиностроение, 1972 - С. 29 - 31.

32. *Васильев Ф.П.* Метод прямых для решения однофазной задачи типа Стефана. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Вып.8, 1968. - С. 81 - 101.
33. *Вахитов М.Б., Сафариев М.С.* К применению метода прямых для расчета пластин. - Вып.143. - Труды КАИ, 1972. - С. 59 - 67.
34. *Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Халилулин В.И.* Расчет консольных пластин методом прямых. // Труды КАИ, - Вып.166. - Казань, 1974. - С. 52 - 61.
35. *Вейль Г.* Математика. Теоритическая физика. // - М., Наука, 1984. – 510 с.
36. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. // Тр. Тбилисского мат. Ин-та. Т. 30. – Тбилиси, Мецниереба, 1965. – 103 с.
37. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. // - М., Наука, 1982. – 288 с.
38. *Вержбицкий В.М.* //Основы численных методов. // - М., Высшая школа, 2002. – 840 с.
39. *Верюжский Ю.В.* Метод потенциала в статических задачах строительной механики. // дисс. д-ра техн. наук. - Киев, 1980. – 431 с.
40. *Верюжский Ю.В.* Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. //- Киев, Вища школа, 1978. – 183 с.
41. *Винокуров Л.П.* Решение пространственной задачи теории упругости в перемещениях. // Бюллетень Харьковского инженерно-строительного института. - №18. - 1940. С. 59 - 73.
42. *Винокуров Л.П.* Метод приближенного расчета на устойчивость пластин, нагруженных силами в срединной плоскости. /// Тр. Харьковск. авиац. ин-та. - Вып.18. – 1954. - С. 3 - 18.
43. *Винокуров Л.П.* Приближенный метод решения плоских задач теории упругости. // Тр. Харьковск. инж.-стр. ин-та. - Вып. 2, - 1949. – С. 47 - 123.
44. *Винокуров Л.П.* Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. // - Харьков, ХГУ, 1956. – 280 с.

45. *Винокуров Л.П.* Расчет плит на упругом полупространстве с применением инженерно-дискретного метода. // *Вестник инженеров и техников.* - №4. – 1951. - С. 166 - 171.
46. *Винокуров Л.П.* Приближенные методы решения дифференциальных уравнений строительной механики. // *Труды ХИСИ.* - Вып. 3. – Харьков, 1951. – С. 10 - 17.
47. *Винокуров Л.П.* Расчет колодца на упругом основании, нагруженного силами, не лежащими в плоскости кривизны колодца. / *Вестник инженеров и техников.* - № 1. - 1938. – С. 102 - 109.
48. *Винокуров Л.П.* Приближенный метод решения плоских задач теории упругости. // *Труды ХИСИ.* - Т. II. – Харьков, 1949. – С. 75 - 80.
49. *Влайков Г.Г., Григоренко А.Я., Шевченко С.Н.* Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением. // - К., 2001. – 143 с.
50. *Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Некоторые осесимметричные задачи статики и динамики анизотропных тел цилиндрической формы. // - К., 1998. – 58 с.
51. *Власов В.З.* Метод начальных функций в задачах теории упругости. // *Изв. АН СССР, ОТН.* - №7 - 1955. - С. 49 - 69.
52. *Власов В.В.* Применение метода начальных функций к расчету толстых плит. // *Исследования по теории сооружений: сб.* - Вып. 10. - М., Госстройиздат, 1961. - С. 189 - 207.
53. *Власов В.В.* Метод начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости. // *Расчет пластин и оболочек.* - Вып. 34. - 1963. - С. 31 - 45.
54. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. // - М., Физматгиз, 1960. – 491 с.
55. *Войцеховский С.А.* Сходимость метода прямых для обобщенных решений параболических уравнений в произвольной области. // *Выс. прикл. мат.* - №50. – Киев, 1983. С. 3 - 10.

56. *Ворович И.И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. // Тр. Второго Всесоюз. Съезда по теор. И прикл. Мех. - Вып.3. - М.: Наука, 1966. - С 116 - 136.
57. *Ворович И.И., Малкина О.С.* Напряженное состояние толстой плиты. // Прикладная математика и механика. - Т.31. Вып.2. – 1967 - С. 230 - 241.
58. *Ворович И.И., Прокопов В.К.* Некоторые вопросы трехмерной теории упругости. // III Всесоюз. съезд по теории и прикл. мех.: аннотация докл. - М., Наука, 1968. – 81 с.
59. *Гашко А.Л., Майза В.П., Приварников А.К.* Приложение метода прямых к решению задач фотоупругости. // В кн.: «Гидроаэромеханика и теория упругости» - Вып 8, – Харьков, Издательство ХГУ, 1958. - С. 41 - 48.
60. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. // пер. с англ. С.В. Фоминой// - М., Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.
61. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук. - Т. 16. Вып. 3(99). - 1961. - С. 171 - 174.
62. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. // 3-е изд., перераб. и доп. - М., «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 392 с.
63. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. // Прикладная математика и механика - Вып. 4., Т.26. - 1962. - С. 668 - 686.
64. *Гольденвейзер А.Л.* Асимптотический метод построения теории оболочек. // Материалы I Всесоюз. Школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. – Тбилиси, Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. - С. 151 - 213.
65. *Григоренко А.Я., Трегубенко Т.В.* Анализ свободных колебаний прямоугольных пластин переменной толщины на основе численного и экспериментального исследований. // Приклад. механика - 36, №2. - 2000. - С. 131 - 134.

66. Григоренко Я.М. Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. О решении задач статики слоистых оболочек в трехмерной постановке. // Вычислительная и прикл. математика. - Вып.43. - 1981. С. – 123 - 132.
67. Гринченко В.Т. Напряженное состояние круглого толстого диска в поле центробежных сил. // Теория оболочек и пластин. АН Арм ССР. – Ереван, 1964 – С. 423 - 429.
68. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жестко защемленной плиты. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ. мат. Наук – Т.16 - №5 – 1963. – С. 125 - 132.
69. Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П., Шкриль О.О. Розв'язання просторової задачі нестационарної теплопровідності на основі напіваналітичного методу скінченних елементів. // Наук.-техн. Збірник. Технологічний аудит та резерви виробництва №3/2(23) - Харків, 2015 – С. 61 - 67.
70. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.// Численные методы анализа. // - М., Наука, 1967. – 368 с.
71. Ейлер Л. Интегральное исчисление. // - т.1 - М.,ГИТТЛ, 1956. – С. 141 - 303.
72. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. // 2-е изд., перераб. - М., 1957. – 250 с.
73. Жупаненко І.В., Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. Частоти вільних коливань товстої шарнірно-опертої пластини. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вип.85. – Київ, КНУБА, 2010. - С. 109 - 117.
74. Задорин А.И. Численный метод для параболического уравнения с малым параметром на полубесконечном интервале. // Международная конференция «Вычислительные технологии и математические модели в науке, технике и образовании»: тезисы докладов - Алма-Ата, Казахстан, 18-20 сентября 2002 года. - С. 9 - 16.
75. Исаханов Г.В., Чибиряков В.К., Смоляр А.М. Численно-аналитический метод решения задач статики толстых неоднородных пластин. // Тр. 13-й Всесоюз. Конф. По теории пластин и оболочек Ч. 2. - Таллин, 1983. - С. 130 - 135.

76. *Исаханов Г.В., Чибиряков В.К.* Развитие метода Векуа И.Н. в статике и динамике толстых пластин. // тез. докл. 2-й Всесоюзн. конф. по теории упругости. - Тбилиси, 1984. – 122 с.
77. *Канторович Л.В.* Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. // Известия АН СССР. Серия 7. Отделение математических и естественных наук. - Вып.5. - 1933. - С. 647 - 652.
78. *Канторович Л.В., Фрумкин П.В.* Применение одного метода приближенного решения уравнений в частных производных к решению задачи о кручении призматических стержней. // Труды Лен. ин-та инженер. пром. стр-ва. - Вып. 4. - 1937. - С. 111 - 112.
79. *Канторович Л.В.* Об одном методе приближенного дифференциальных уравнений в частных производных. // Докл. АН СССР, - Т.2, №9. - 1934. – С. 532 - 536.
80. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. // Л., Физматгиз, 1962. – 708 с.
81. *Карчевский М.М.* О сходимости метода прямых для эллиптических уравнений четвертого порядка. // Известия высших учебных заведений. Математика, - №4(83), - 1969. - С. 24 - 27.
82. *Кильчевский Н.А.* Обобщение современной теории оболочек. // Прикладная математика и механика. - Т.2. Вып. 4. - 1939. - С. 427 - 438.
83. *Корбаков А.Ф.* Развитие и применение метода прямых к исследованию сложного напряженного и деформированного состояния пластин и пластинчатых систем: // дисс. д-ра техн. наук. - Киев, 1985.
84. *Корбач В.Г.* Алгоритм численного решения многоточечных краевых задач механики деформированного твердого тела. // Прочность конструкции летательных аппаратов: сб. науч. тр./ редкол.: Львов М.П. и др./ - Харьков, Харьк. Авиаци. ин-т, 1990. - С. 88 - 95.
85. *Коробов А.П.* Деформации, имеющие ось симметрии. // Изв. – Киев, Политех. ин-т., 1913. – С. 267 - 338.

86. Колтунов М.А., Васильев Ю.В., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. // – М., Высшая школа, 1975. – 526 с.
87. Костюкович Е.Х. О сходимости метода прямых при различных схемах его применения к решению 1-й краевой задачи для дифференциальных уравнений эллиптического типа. // Учен. зап. Гродненск. пед. ин-та, сер. матем, Вып. 2. - 1957 - С. 60 - 78.
88. Костюкович Е.Х. О сходимости метода прямых при различных схемах его применения к решению некоторых краевых задач. // ДАН СССР, 118, - № 3, - 1958. - С. 433 - 435.
89. Костюкович Е.Х. О сходимости метода прямых при различных схемах его применения к решению краевых задач математической физики на плоскости. // Канд. дисс., БГУ. - Минск, 1958.
90. Костюкович Е.Х. Исследование не прямоугольных контуров в связи с применением метода прямых к решению 1-й краевой задачи. // Учен. зап. Гродненск. пед. ин-та, - Вып.5, - 1961. - С. 31 - 41.
91. Круз Т., Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений. // Вычислительные аспекты и приложения в механике: сб. тр.//под ред. Т. Круз, Ф. Риццо; пер. с англ. В.М. Вайншельбаума.// (Новое в зарубежной науке. Механика) - М., Мир, 1978. – Вып.15. – 210 с.
92. Кудряшов Н.А., Кучеренко С.С., Сыцько Ю.И. Применение метода прямых при решении задач теории полупроводников приборов. // Автометрия, - №3, - 1990, - С. 80 - 86.
93. Купрадзе В.Д. О приближенном решении задач математической физики. // Успехи математических наук. - Т.22 Вып.2 (134) - 1967. - С. 59 - 107.
94. Курант Р. Фридрихс К. и Леви Г. О разностных уравнениях математической физики. // Усп. Матем. Наук. - Вып. VIII. - 1940, - С. 125 - 160.
95. Ладыженская О.А. Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей. // Уч. зап. ЛГУ 23. - Вып.144. - 1952, - С. 192 - 246.

96. *Лангенбах А.* Приближенное решение бигармонического уравнения в случае трапециевидной области. // Вести. Ленингр. ун-та, сер. матем., мех., астр. - № 13, Вып. 3, - 1956. – С. 119 - 123.
97. *Лебедев В.И.* Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода (метода прямых). // Вести. Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. наук, - № 10. - 1955. – С. 47 - 57.
98. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. // – М., Гостехиздат, 1947. – 464 с.
99. *Лизунов П.П., Криксунов Е.З., Фесан О.М.* Напряжено-деформований стан замкнених конічних оболонок при складному обертанні. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вип.102. – Київ, КНУБА, 2019. - С. 191 - 196.
100. *Липин Е.К.* О расчете пластин и оболочек с дискретными граничными условиями. // «Ученые записки ЦАГИ», - Т.3 №5, - 1972. – С. 54 - 59.
101. *Лисковец О.А.* Метод прямых. // Дифференциальные уравнения, - Т.1, №12, - 1965. С. 1662 - 1678.
102. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. // - М.: ГИТТЛ, 1955. – 491 с.
103. *Лурье А.И.* К теории толстых плит. // Прикладная математика и механика. - Т. 6. Вып. 2-3. - 1942. - С. 151 - 168.
104. *Люстерник Л.А.* Проблема Дирихле. // УМН, - Вып. VIII. - 1940, С. 115- 124.
105. *Люстерник Л.А.* Замечания к численному решению краевых задач. // Труды. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова – Вып.20 – 1947. – С. 49 - 64.
106. *Ляв А.* Математическая теория упругости. // пер. с англ./ - М., Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
107. *Маркус Г.* Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий. // ДНТВУ, - Киев, Гостехиздат, 1936. – 285 с.
108. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. // - М., Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.

109. *Матвеев В.П., Шардаков И.Н., Кузнецов Г.Б.* Расчет напряженно-деформированного состояния тяжелой пластины с криволинейным сводом методом прямых. // Научные труды ПНИ, 185; 108, - Пермь, 1972. - С. 86 - 95.
110. *Мейман Н.Н.* К теории уравнений в частных производных. // ДАН 97 - Вип.4 – 1954. - С. 209 - 212.
111. *Меламед В.Г.* О решении задачи Стефана сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР, сер. Математическая физика, - т.116, №4, - 1957. - С. 577 - 580.
112. *Михлин С.Г.* Прямые методы в математической физике. // ГИТТЛ, - гл. 7, 1950. – 432 с.
113. *Михлин С.М.* Вариационные методы в математической физике. // Гос-ное из-во технико-теоритической л-ры. - М., 1957. – 476 с.
114. *Морсков Ю.А.* Расчет изгибаемых пластин произвольной формы. // Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах УССР, строительная механика и расчет сооружений: сб. - Вып. 9. - Киев, 1977. – С. 79 - 88.
115. *Морсков Ю.А.* Решение некоторых задач изгиба двухсвязных пластин произвольного очертания. // Сопротивление материалов и теория сооружений: сб. - Вып.31. – Киев, Будівельник, 1977. - С. 78 - 89.
116. *Морсков Ю.А.* Применение метода прямых в полярных координатах к решению задач изгиба пластин произвольной формы. // Сопротивление материалов и теория сооружений: сб. - Вып. 34. – Киев, Будівельник, 1979. – С. 12 - 23.
117. *Морсков Ю.А.* Приближенный метод расчета на прочность пластин и пластинчатых систем (на основе метода прямых). // дисс. канд. техн. наук. - Киев, 1979. – 157 с.
118. *Немчинов С.В.* О решении безытерационным методом сеток краевых задач для уравнений в частных производных с периодическими краевыми условиями. // ДАН СССР. - 146, № 6, - 1962. – С. 1263 - 1266.

119. *Новацкий В.* Динамические задачи теормоупругости. // пер. с польс. Под ред. Г.С. Шапиро.// - М., Мир, 1970. – 256 с.
120. *Новацкий В.* Теория упругости. // Перевод с польского Б.Е. Победри. // - М., Мир, 1975. – 256 с.
121. *Одинец Е.А.* Определение напряженного и деформированного состояния многослойных пластин методом прямых. // дисс. канд. техн. наук. - Киев, 1988.
122. *Омаров Е.О.* Вопросы дифференциальных уравнений и механики горных пород. // Тр. сект, матем. и мех. - АН КазССР, 1963. - Вып.2, - С. 45 - 48.
123. *Омаров Е.О.* Приложение (метода прямых к решению краевых задач для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. // Автореф. канд. Дисс. - Казань, КГУ, 1963. – С. 106 - 109.
124. *Омаров Е.О.* Решение уравнения изгиба прямоугольной пластинки с 4 заделанными сторонами. // Доклады 2-й Сибирской конф. по матем. и мех., ТГУ. - Томск, 1962. - С. 42 - 44.
125. *Омаров Е.О.* Приближенное решение методом прямых одного дифференциального уравнения в частных производных 4-го порядка эллиптического типа в случае трапециевидной области. // Итог, научн. аспиранток, конфер:тезисы, доклады за 1962 г. - Казань, 1962, - С. 153 - 158.
126. *Омаров Е.О.* Приближенное решение дифференциального уравнения в частных производных вида $d^4 u/dx^4 - a d^4 u/dx^2 dy^2 + b d^4 u/dy^4 = -f(x, y)$ в случае трапециевидной области методом прямых. // ИАН УзССР, сер. физ.-матем. наук, - № 4. – 1963. – С. 33 - 38.
127. *Омаров Е.О.* Приближенное решение методом прямых одного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа. // ИАН УзССР, сер. физ.-матем. наук, - № 3. - С. 585 - 592.
128. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. // - М., Наука, 1986. – 288 с.
129. *Панов Д.Ю.* Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. // - изд. 3-е, Гостехиздат, 1949. – 182 с.

130. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. // - М., Наука, 1977. – 312 с.
131. *Петров Ю.П.* Расчет на изгиб упругих прямоугольных пластин дискретным методом. // Труды Харьковского Авиационного института. - Вып.18. - 1961. - С. 86 - 99.
132. *Петров Ю.П.* Основы расчета на изгиб пластин дискретным методом. // Труды Харьковского Авиационного института. - Вып.18. - 1961. - С. 67 - 83.
133. *Петров Ю.П.* Расчет на изгиб косоугольной консольной пластины переменной толщины. // Труды Харьковского Авиационного института. - Вып.22. - 1963. - С. 62 - 78.
134. *Петров Ю.П.* Расчет на изгиб дискретным методом ортотропных упругих пластин. // Труды Харьковского Авиационного института. - Вып.22. – 1963. - С. 79 - 86.
135. *Петров Ю.П.* Расчет на изгиб пластин с линейным изменением толщины дискретным методом. // Труды Харьковского Авиационного института. - Вып.18. - 1961. - С. 79 - 86.
136. *Петровский И.Г.* Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей. // УМН - Вып. VIII. – 1940. - С. 161 - 170.
137. *Плиев С.Б.* О равновесии упругого цилиндра конечных размеров. // Докл. Ан Азерб. – Т.13 - №8 – ССР, 1957 – С. 832 - 842.
138. *Положий Г.Н.* Теория и применение p - аналитических и (p, q) - аналитических функций. // – 2-е изд. – Киев, Наукова думка, 1973. – 424 с.
139. *Попович В.Е.* Об оценке погрешности в методе последовательных приближений. // Дифференц. уравнения, - том 4, номер 4. – 1968. - С. 668 – 674.
140. *Прокопов В.К.* Равновесие упругого осесимметричного нагруженного толстостенного цилиндра. // Прикл. матем. и мех. – Т.13 - №2 – 1949. - С. 134 - 144.
141. *Прокопов В.К.* Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой. // Прикл. матем. и мех. – Т.14 - №5 – 1950. – С. 527 - 536.

142. *Прокопов В.К.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. // Тр. Ленингр. политехн. ин-т - №2 – 1950. – С. 286 - 303.
143. *Прокопов В.К.* О равновесии полого цилиндра конечной длины, нагруженного осесимметричной нагрузкой. // Тр. Ленингр. политехн. ин-т - №192 – 1958. – С. 43 - 59.
144. *Прокопов В.К.* Изгиб тяжелой круглой плиты. // Тр. Ленингр. политехн. ин-т – №226 – 1963. – С. 103 - 108.
145. *Рихтмайер Р.Д.* Разностные методы решения краевых задач. // - М., ИЛ, 1960. – 264 с.
146. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. // Перевод со второго английского издания // - М., 1972. – 380 с.
147. *Рябенский В.С.* Об устойчивости конечно разностных схем. // кандидат. диссертация, - МГУ, 1962.
148. *Селезов И.Т.* Дослідження поперечних коливань пластин. // Прикладна механіка. - Т.6. Вип. 5. - 1960. - С. 319 - 326.
149. *Селезов И.Т., Кильчицкая Г.А.* Приведение трехмерной динамической задачи термоупругости для слоя постоянной толщины. // Тепловые напряжения в элементах конструкций: доклады научного совещания. - Вып. 4. – Киев, Наукова думка, 1964. - С. 172 - 179.
150. *Слободянский М.Г.* Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. // Прикладная математика и механика. - Т.3 Вып.1. - 1939. - С. 75 - 82.
151. *Слободянский М.Г.* Пространственные задачи теории упругости для призматических тел. // Уч. зап. Моск. гос. ун-та. Механика. - Вып.39. - 1940.
152. *Слободянский М.Г.* Оценка погрешности искомой величины при решении линейных задач вариационным методом/ ДАН СССР. - Т. 86. №2. - 1952. - С. 243 - 246.
153. *Слободянский М.Г.* Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящаяся к вариационным, и их применение к определению

- двухсторонних приближений в статических задачах теории упругости. // Прикладная математика и механика. - Т. 16. Вып. 4. - 1952. - С. 449 - 464.
154. *Слободянский М.Г.* Оценка погрешностей приближенных решений линейных задач. // Прикладная математика и механика. - Т. 17. Вып. 2. - 1953. - С. 229 - 244.
155. *Слободянский М.Г.* О приближенном решении линейных задач, сводящихся к вариационным. // Прикладная математика и механика. - Т. 17. Вып. 5. - 1953. - С. 623 - 626.
156. *Слободянский М.Г.* Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. // Прикладная математика и механика. - Т. 18, Вып.1 (22 листопада). - 1954. - С. 55 - 74.
157. *Слободянский М.Г.* О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. // ДАН СССР. - Т.91. №4. - 1953. - С. 733 - 736.
158. *Слободянский М.Г.* О построении приближенного решения в линейных задачах. // Прикладная математика и механика. - Т. 19. Вып.3. - 1955. - С. 295 - 314.
159. *Соляник-Красса К.В.* Осесимметричная задача теории упругости. // - М., Стройиздат, 1987. - 330 с.
160. *Сретенский О.Н.* Теория Ньютоновского потенциала. // - М., Гос. изд-во технико-теоритической литературы, 1946 - 318 с.
161. *Станкевич А.Н.* Развитие метода прямых к расчету составных цилиндрических оболочек. // дисс. канд. техн. наук. - Киев, 1996.
162. *Станкевич А.Н.* История и перспективы развития одного из методов решения многомерных задач строительной механики. // Весник МГСУ Вып.12, - 2015, - С. 76 - 91.
163. *Станкеви А.М., Чибіряков В.К., Л.Т. Шкельов.* Метод прямих у просторовій задачі теорії пружності. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. - Вып.88. - Київ, КНУБА, 2011. - С. 24 - 36.
164. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих. // Містобудування

та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип.36. Київ, КНУБА, 2010. - С. 413 - 423.

165. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.* Один варіант методу прямих в задачах динаміки товстих пластин. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип.38. – Київ, КНУБА, 2010. - С. 399 - 407.

166. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Левківський Д.В.* Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип.36. – Київ, КНУБА, 2010. - С. 413 - 423.

167. *Станкевич А.М., Левківський Д.В.* Три варіанти редукції рівнянь пласкої задачі теорії пружності методом «прямих». // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип.49. - Київ, КНУБА, 2013. - С. 509 - 521.

168. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. // - М., Мир, 1998р. – С. 453.

169. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х. Уивер У.* Колебания в инженерном деле. // перевод с английского Корнейчука Л.Г.// - М., «Машиностроение», 1985. – 470 с.

170. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.*, Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. // - Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1986. – 295 с.

171. *Устинова Н. Н.* Об одном видоизменении, метода прямих. // Учен. зап. Казанск. ун-та, 115. - кн. 14 (Математика), 1955. – С. 159 - 167.

172. *Фаддеева В.Н.* Метод прямих в применении к некоторым краевым задачам. // Труды математического института имени В.А. Стрелкова. - Т. XXVIII - 1949. С. 73 - 103.

173. *Федоров Ю.П.* Расчет пологой оболочки с шарнирными кромками методом прямих. // Труды МАДИ, - Вип.107. - М., 1975. - С. 113 - 121.

174. *Филиппов А.Ф.* Об устойчивости разностных решений уравнений. // ДАН 100: - Вип.6. - 1956, - С. 1045 - 1048.

175. *Чеботарева Л.М.* Метод прямих приближенного решения гиперболических уравнений. // Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ-мат наук: 01.01.02. – Воронеж: Воронеж. гос ун-т им. Ленинского комсомола, - 1988. – 15с.

176. *Чернин К.Е.* Решение одной осесимметричной задачи методом прямых. // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, - Вып.53. 1959. - С. 302 - 306.
177. *Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.* Власні коливання товстостінної оболонки обертання змінної товщини. // Промислове будівництво та інженерні споруди. Наук.-техн. Збірник. – Вып.2. 2010. - С. 5 - 9.
178. *Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.* Власні коливання товстої циліндричної оболонки/ Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вып.84. – Київ, КНУБА, 2009. - С. 127 - 133.
179. *Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.* Методика розв'язання задачі про власні коливання пластин обертання змінної товщини. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вып.86. – Київ, КНУБА, 2010. - С. 30 - 46.
180. *Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.* Про один алгоритм розрахунку вісесиметричних коливань круглої пластини. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – Вып.81. – Київ, КНУБА, 2007. - С. 43 - 50.
181. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В., Мельничук В.Ф.* Про підвищення точності узагальненого метода прямих/ Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вып.53. - Київ, КНУБА, 2014. - С. 565 - 573.
182. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В., Мельничук В.Ф.* Модифікований метод прямих в задачах статички та динаміки масивних конструкцій. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. - Вып. 61. 2016 - С. 412 - 423.
183. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В.* Нестационарна динаміка товстої пластини. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вып.43. Київ, КНУБА, 2012. - С. 497 - 509.
184. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонок. // - Черкаси, ЧДТУ, 2002. – 160 с.

185. *Чиби́ряков В.К.* Обобщенный метод конечных интегральных преобразований в статике и динамике нетонких пластин/ Сопротивление материалов и теория сооружений: респ. межвезд. науч. сб. Киев: Будівельник, 1982. Вып. 40. С. 90 - 95.
186. *Чиби́ряков В.К., Смоля́р А.М.* Об одном обобщении метода конечных интегральных преобразований в теории толстых пластин. // Сопротивление материалов и теория сооружений: респ. межвезд. науч. сб. – Киев, Будівельник, 1983. - Вып.42. - С. 80 - 86.
187. *Чиби́ряков В.К.* Об одном варианте уравнений цилиндрического изгиба нетонких пластин. // Сопротивление материалов и теория сооружений: респ. межвезд. науч. сб. – Киев, Будівельник, 1977. - Вып.31. - С. 59 - 67.
188. *Чиби́ряков В.К.* Численное решение задач статики и динамики толстых пластин. // Численные методы решения задач строительной механики: сб. науч. ст. – Киев, КИСИ, 1978. - С. 153 - 157.
189. *Чиби́ряков В.К., Бойко К.Е.* Определение частот и форм собственных колебаний по уточненным теориям пластин. // Сопротивление материалов и теория сооружений: респ. межвезд. науч. сб. Вып.49. – Киев, Будівельник, 1986. - С. 54 - 58.
190. *Чиби́ряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О., Сович Ю.В.* Модифікований метод прямих, алгоритм його застосування, можливості та перспективи. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип.70. - Київ, КНУБА, 2019. – С. 595 - 616.
191. *Чиби́ряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О., Сович Ю.В.* Чисельна реалізація модифікованого методу прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. - Вип.74. – Київ, КНУБА, 2020. – С. 341 - 359.
192. *Чиби́ряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В.* Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. Вип.46. – Київ, КНУБА, 2012. – С. 613 - 624.

193. *Шамин В.Т.* Регуляция метода прямых в условиях машинной точности с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью. // Вычислительные технологии, т.13, 2008, №5. - С. 113 - 124.
194. *Шкелев Л.Т.* Использование метода прямых для решения бигармонического уравнения. // Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в ВУЗах УССР. Строительная механика, расчет сооружений: сб. - Вып. 2. - Киев, Вища школа, 1971. - С. 54 - 66.
195. *Шкелев Л.Т.* Расчет пластин произвольной формы в полярных координатах. Плоское изгибное напряженное состояние / Реферативная информация: сб. - Вып.2. - 1971. - С. 49 - 56.
196. *Шкелев Л.Т.* Решение краевой задачи для бигармонического уравнения методом прямых в полярных координатах. // Реферативная информация: сб. - Вып.3. - 1972. - С. 29 - 37.
197. *Шкелев Л.Т., Морсков Ю.А., Романова Т.А., Станкевич А.Н.* Метод прямых и его использование при определении напряженного и деформированного состояний пластин и оболочек. // Киев, 2002. - 177 с.
198. *Шкелев Л.Т., Станкевич А.Н., Пошивач Д.В., Морсков Ю.А., Корбаков А.Ф.* Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов. // - К., КНУСА, 2004. - 136 с.
199. *Clebsch A.* Theorie I' de élasticité des corps solides. Traduite par MM. // Barre de Saint - Venant et Flamant. Avec des notes etendues de M. de Saint - Venant. - Paris., 1881. - 932 p.
200. *Horvay G., Mirabal J.A.* The end problem of cylinders. // Paper Amer. Soc. Mech. Engrs., Journ. Appl. Mech. - N 4. - 1958. - P. 561-570.
201. *Iyengar K.T.S. R., Yogananda C.V.* The end problem of hallow cylinders. // Trans. ASME. - E33, N 3. - 1966. - P. 685-686.

202. *Lamé G., Clapeyron B.P.E.* Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. Jour. für die reine und angew. // Mat-hem. Vol.7, H. 2, №.19. -1831. – P. 145-169. Mémoires présentés par divers Savants. Vol.4. – 1833. – P. 465-562.
203. *Martinez V., Marquina A., Danat R.* Shooting methods for one dimensional diffusion absorption problems. // SIAM J. Numer. Anal. Vol.31. – 1994. P. 572-589.
204. *Michell J.H.* On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. // Proc. London Math. Soc. Vol.31. - 1900. – P. 100-124.
205. *Rothe E.* Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. // Math. Ann. – Vol.102. – 1930. – P. 650—670.
206. *Rothe E.* Über die Wärmeleitungsgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten im räumlichen Falle. // Math. Ann. – Vol.104, H. 3, - 1931 – P. 340—362.
207. *Sadskul M.N.O., Obiozor C.N.* A simple introduction to the method of lines. // International Journal of Electrical Engineering Education. – Vol. 37/3. - 2000. - P. 282-296.
208. *Schiff M.* Sur l'équilibre d'un cylindre élastique. // Journ. de Math. - Ser.3., №9 - Pures et appliq., 1883. – P. 407-419.
209. *Torres G., Turner C.* Method of straight lines for a Bingham problem.// Electronic Journal of Differential Equations. - Vol.№60. – 2002. - P. 1-13.
210. *Xiao J.R., Batra R.C., Gilhoole D.F.* Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG Methods. // Appl. Mech. Engrg. - Vol.196. – 2007. - P. 979-987.

ДОДАТОК А
ДОВІДКИ ПРО ВПРОВАДЖУННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ
просп. Повітряних Сил, 31, м. Київ, 03037, тел. (044)241-55-80,
e-mail: knuba_admin@ukr.net, web: http://www.knuba.edu.ua, код ЄДРПОУ 02070909

№ _____

На № _____

від _____

Довідка

про впровадження результатів дисертаційної роботи
Янсонс Марини Оскарівни на тему:
**«Модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при
термосиловому навантаженні»**
у навчальному процесі Київського національного університету будівництва і
архітектури

Результати дисертаційної роботи Янсонс М.О. на тему: «модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні» використані у навчальному процесі на кафедрі опору матеріалів Київського національного університету будівництва і архітектури при викладанні курсу «Комп'ютерні технології опору матеріалів» для спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія».

Науковий внесок Янсонс М.О. полягає у створенні методики розрахунку, за якою, отримані результати напружено-деформованого стану захисних споруд значно прискорюють прийняття оптимальних проектних рішень та показали можливість зменшення матеріалоємності деяких конструктивних елементів до 12%

Проректор з наукової роботи
к.т.н., с.н.с.



Ковальчук О.Ю.



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ
просп. Повітряних Сил, 31, м. Київ, 03037, тел. (044)241-55-80,
e-mail: knuba_admin@ukr.net, web: http://www.knuba.edu.ua, код ЄДРПОУ 02070909

№ _____ На № _____ від _____

Довідка

Про впровадження результатів дисертаційної роботи
Янсонс Марини Оскарівни на тему:
«Узагальнений метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні»

Результати дисертаційної роботи Янсонс М.О. на тему: «Узагальнений метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні» використані при розробці та вдосконаленні методів розрахунку металевих та залізобетонних конструкцій будівель і споруд для прийняття оптимальних проектних рішень.

Дисертаційні дослідження використовувалися, зокрема, для чисельного моделювання задач, що враховують температурні навантаження в екстремальних умовах експлуатації металевих та залізобетонних конструкцій при проектуванні захисних споруд вісесиметричної форми з урахуванням всіх видів навантажень. Отримані результати розрахунку та дослідження напружено-деформованого стану захисних споруд значно прискорили прийняття оптимальних проектних рішень та показали можливість зменшення матеріалоємності деяких конструктивних елементів до 12%.

Зав.каф. будівельної механіки,
директор НДІ Будівельної
механіки КНУБА д.т.н., проф.

Лізунов П.П.

Підпис зав.каф. будівельної механіки,
директор НДІ Будівельної,
механіки КНУБА д.т.н., проф. Лізунова П.П.
засвідчую
Вчений секретар Вченої ради
КНУБА, к.т.н., доц.



Микола КЛИМЕНКО

ДОВІДКА

Про впровадження результатів дисертаційної роботи Янсонс Марини Оскарівни на тему:

«Модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні»

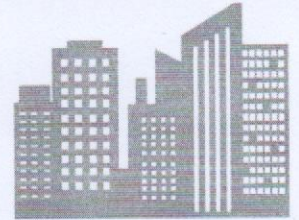
Результати дисертаційної роботи Янсонс Марини Оскарівни на тему: «Модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні» використані при реконструкції та підсилення конструкцій торговельного центру в м. Коломиї Івано-Франківської області, а також спорудження прибудови до існуючого промислового комплексу.

Використання методики, яка досліджувалась в дисертаційній роботі була використана при розрахунках конструкцій для реконструкції об'єкту, що дало змогу зменшити матеріалоемність елементів підсилення. Авторка приймала безпосередню участь у проектуванні та розробці варіантів рішень для виконання реконструкцій і підсилення даного об'єкту, прийняття оптимального варіанту.

Генеральний директор ТОВ «ІТЦ ІВІК»



Машина П.В.



ДОВІДКА

Про впровадження результатів дисертаційної роботи

Янсонс Марини Оскарівни на тему:

«Модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні»

Результати дисертаційної роботи Янсонс Марини Оскарівни на тему: «Модифікований метод прямих в задачах вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні» використані при проектуванні конструкцій багатоповерхових житлових будинків в м. Києві по проспекту Науки, а також для житлового комплексу в м. Вишгороді Київської області.

Методика чисельного дослідження, яка розроблена в дисертаційній роботі, використовувалась при розрахунку поперечних перерізів покриття, елементів вхідних груп та огорожувальних конструкцій будівель, що дало змогу зменшити вагу елементів на 8%. Авторка приймала безпосередню участь у проектуванні та авторському нагляді за будівництвом.

Генеральний директор



Владислав ГОЦ