МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Мартинюк Іван Юрійович

Гриф
Прим. № ____
УДК 539.3; 624.074.04

ДИСЕРТАЦІЯ
НАПІВАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМУВАННЯ, КОНТИНУАЛЬНОГО РУЙНУВАННЯ ТА ФОРМОЗМІНЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ ТА СКЛАДНОЇ СТРУКТУРИ

05.23.17 – будівельна механіка

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ___________________________ І.Ю. Мартинюк
(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий консультант Максим’юк Юрій Всеволодович докт. техн. наук, проф.

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Мартинюк І.Ю. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах деформування, континуального руйнування та формозмінення просторових тіл неканонічної форми та складної структури.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – Будівельна механіка. Київський національний університет будівництва та архітектури, м.Київ, 2025.

Зміст анотації

В першому розділі наведені отримані в результаті проведеного аналізу літературних джерел дані про підходи та методи розв'язання задач деформування, континуального і дискретного руйнування тіл обертання неканонічної форми і структури при температурному, статичному і динамічному навантаженні. Це дозволяє більш чітко сформулювати постановку зазначених фізично і геометрично нелінійних задач деформування і руйнування, визначити вихідні співвідношення та вибрати найбільш ефективні методи їх розв'язання.

В другому розділі наведені вихідні співвідношення теорії пружності, пружнопластичності та повзучості з пошкодженістю. Викладені формули для розрахунку вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченних елементів: зі змінними механічними та геометричними параметрами, усередненими механічними та геометричними параметрами.

В третьому розділі приведено алгоритм розв'язання систем лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь. Також у ньому обґрунтовано вибір оптимальної системи координатних функцій, застосованої для поліноміального розкладу переміщень.

В четвертому розділі наведені розв'язувальні рівняння напіваналітичного методу скінчених елементів для геометрично нелінійних задач. Описаний криволінійний неоднорідний призматичний скінченний елемент. Приведені розв'язувальні співвідношення з урахуванням формозмінення.

В п’ятому розділі реалізовано для сучасних персональних комп’ютерів програмне забезпечення для розрахунку призматичних тіл складної форми та структури. Викладена структура обчислювального комплексу: завдання обробка і друк вхідної та вихідної інформації, розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь.

В шостому розділі наведено дослідження ефективності напіваналітичного методу скінчених елементів у криволінійних призматичних об’єктах у пружній та пружно-пластичній постановці та описано реалізацією цього підходу на сучасному програмному забезпеченні. Також приведені особливості чисельного дослідження збіжності напіваналітичного методу скінченних елементів. Здійснено комплексне порівняння ефективності скінченних елементів, що враховують змінні та усереднені механічні й геометричні характеристики. Додатково проаналізовано збіжність розкладів у ряди Фур'є, поліноміальних апроксимацій та методу скінченних елементів. Виконано дослідження збіжності методу скінченних елементів та напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл, що враховують змінні та усереднені механічні й геометричні характеристики. Виконане обґрунтування достовірності результатів, отриманих на основі напіваналітичного методу скінчених елементів.

У сьомому розділі наведені результати аналізу напружено-деформованого стану призматичних конструкцій: Т-подібного хвостовика лопатки ротора парової турбіни, демпфуючого елемента, деталі кріплення поворотного пристрою. Також виконаний аналаз впливу товщини фланця на напружено-деформований стан корпусної деталі. Реалізоване чисельне дослідження процесу деформування та визначення ресурсу призматичних тіл при термопружно-пластичному деформуванні. Виконане моделювання процесу деформування та визначення ресурсу хвостовика лопатки газової турбіни та моделювання процесу деформування та визначення терміну служби лопатки газової турбіни.

Основні результати роботи полягають у отримані нових розв’язувальних співвідношень на основі моментної схеми скінчених елементів і розробки алгоритмів для ефективного і достовірного розв’язання задач деформування і континуального руйнування напіваналітичним методом скінчених елементів. Проведено розробку апарату чисельного розрахунку для просторових тіл неканонічної форми і структури при температурному і статичному навантаженні. Створено бібліотеку скінчених елементів для розв'язання просторових задач для масивних, тонкостінних та комбінованих тіл складної структури.

Наукова новизна результатів полягає в розв'язанні актуальної науково-технічної проблеми з розробки на основі моментної схеми скінчених елементів і напіваналітичного методу скінчених елементів ефективної чисельної методики розв'язання задач фізично- і геометрично нелінійного деформування та континуального руйнування тонкостінних, масивних просторових тіл складної структури та визначення на цій основі ресурсу і несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки, які знаходяться під впливом довільно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень.

Наведені результати були використані в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при виконанні держбюджетних науково-дослідних робіт та на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при виконанні кваліфікаційних робіт для здобуття ступенів вищої освіти бакалавр та магістр. Результати дисертаційної роботи можуть знайти застосування у різних технічних сферах для аналізу довговічності та визначення граничної несучої здатності критично важливих об'єктів сучасної інженерії та машинобудування.

Ключові слова: метод скінченних елементів, напіваналітичний метод скінчених елементів, моментна схема скінчених елементів, фізично і геометрично нелінійні задачі деформування, континуальне руйнування, формозмінення, тонкостінні, масивні просторові тіла.

ANNOTATION

Martyniuk I.Yu. Semi-analytical finite element method in problems of deformation, continuous and discrete destruction of bodies of rotation of non-canonical form and structure under temperature, static and dynamic loading.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 05.23.17 – Structural Mechanics. Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture, Kyiv, 2025.

Contents of the annotation

The first section presents the data obtained as a result of the analysis of literary sources on approaches and methods for solving problems of deformation, continuous and discrete destruction of bodies of rotation of non-canonical shape and structure under temperature, static and dynamic loading. This allows us to more clearly formulate the statement of the specified physically and geometrically nonlinear problems of deformation and destruction, determine the initial relations and choose the most effective methods for their solution.

The second section presents the initial relations of the theory of elasticity, elastoplasticity and creep with damage. Formulas for calculating nodal reactions and coefficients of the stiffness matrix of finite elements are presented: with variable mechanical and geometric parameters, averaged mechanical and geometric parameters.

The third section presents an algorithm for solving systems of linear and nonlinear algebraic equations. The choice of a system of coordinate functions during the expansion of displacements by polynomials is justified.

The fourth section presents the solution equations of the semi-analytical finite element method for geometrically nonlinear problems. A curvilinear inhomogeneous prismatic finite element is described. The solution relations are given taking into account the shape change.

In the fifth section, software for calculating prismatic bodies of complex shape and structure is implemented for modern personal computers. The structure of the computing

complex is outlined: the task of processing and printing input and output information, solving systems of linear and nonlinear equations.

In the sixth section, a study of the effectiveness of the semi-analytical finite element method in curvilinear prismatic objects in the elastic and elastic-plastic formulation is presented and the implementation of this approach on modern software is described. The features of the numerical study of the convergence of the semi-analytical finite element method are also given. The efficiency of finite elements with variable and averaged mechanical and geometric parameters was compared, and the convergence of Fourier series, polynomials and the finite element method was also investigated. The convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters was studied. The reliability of the results obtained on the basis of the semi-analytical finite element method was substantiated.

The seventh section presents the results of the analysis of the stress-strain state of prismatic structures: the T-shaped shank of the steam turbine rotor blade, the damping element, the fastening part of the rotary device. The influence of the flange thickness on the stress-strain state of the body part was also analyzed. A numerical study of the deformation process and determination of the resource of prismatic bodies during thermoelastic-plastic deformation was implemented. Modeling of the deformation process and determination of the resource of the gas turbine blade shank and modeling of the deformation process and determination of the service life of the gas turbine blade were performed.

The main results of the work are the obtained new solution relations based on the finite element moment scheme and the development of algorithms for the effective and reliable solution of deformation and continuous fracture problems by the semi-analytical finite element method. A numerical calculation apparatus for spatial bodies of non-canonical shape and structure under temperature and static loading was developed. A library of finite elements was created for solving spatial problems for massive, thin-walled and combined bodies of complex structure.

The scientific novelty of the results lies in solving the current scientific and technical problem of developing, based on the finite element moment scheme and the semi-analytical finite element method, an effective numerical method for solving problems of physically and geometrically nonlinear deformation and continuous destruction of thin-walled, massive spatial bodies of complex structure and determining on this basis the resource and bearing capacity of responsible objects of modern technology that are under the influence of force, kinematic and temperature loads arbitrarily distributed in space and time. The results presented were used at the Research Institute of Structural Mechanics of the Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture in performing state-budget scientific and research works and at the Department of Structural Mechanics of the Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture in performing qualification works for obtaining bachelor's and master's degrees of higher education. The results of the dissertation can be applied in various fields of engineering to determine the resource and load-bearing capacity of critical objects of modern technology.

Keywords: finite element method, semi-analytical finite element method, finite element moment diagram, physically and geometrically nonlinear deformation problems, continuum fracture, deformation, thin-walled, massive spatial bodies..

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові публікації, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації

а) монографія

1. Баженов В.А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк – Київ: Вид-во "Каравела", 2021. – 280с.

б) статті в наукових фахових виданнях України

2. Максим'юк Ю. Алгоритм розв'язання системи лінійних та нелінійних рівнянь напіваналітич-ним методом скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл / Ю. Максим'юк, М. Гончаренко , І. Мартинюк, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2020. – Вип. 7. – С. 101–108 https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.101-108

3. Максим'юк Ю. Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108. https://doi.org/10.32347/2522-4182.8.2021.97-108

4. Іванченко Г.М. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62. http://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.55-62

5. Максим'юк Ю. Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченого елемента на основі представлення переміщень поліномами/ Ю. Максим'юк, О. Шкриль, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 9. – С. 54–162. https://doi.org/10.32347/2522-4182.9.2021.54-62

6. Максим'юк Ю. Системи координатних функцій під час розкладання переміщень по поліномах / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2022. – Вип. 10. – С. 150–157. https://doi.org/10.32347/2522-4182.10.2022.150-157

7. Мартинюк І. Реалізація програмного забезпечення розрахунку міцності на основі напіваналітичного методу скінчених елементів / І. Мартинюк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2022. – Вип. 11. – С. 61–68. https://doi.org/10.32347/2522-4182.11.2022.61-68

8. Мартинюк І. Розв'язання фізично нелінійних задач деформування масивних і тонкостінних призматичних тіл / І. Мартинюк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2022. – Вип. 13. – С. 99–109. https://doi.org/10.32347/2522-4182.13.2023.99-109

9. Кузьмінець М.П. Ефективність скінченних елементів з перемінними та усередненими механічними та геометричними параметрами напіваналітичного метода скінченних елементів / М.П. Кузьмінець, Ю.В.Максим'юк, І.Ю.Мартинюк // Науково-технічний збірник «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2022. – Вип. 112. – С. 78-84. https://doi.org/10.33744/0365-8171-2022-112-078-084

10. Кузьмінець М. Структура обчислюваного комплексу розрахунку на міцність призматичних тіл на основі навіваналітичного методу скінченних елементів / М. Кузьмінець, Ю. Максим'юк, І. Мартинюк, Т. Степаненко // «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2023. – Вип. 113. Частина 2 – С. 45-54. https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-113.2-045-054

11. Кузьмінець М.П. Розрахункові співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів призматичних тіл для скінченого елемента на основі подання переміщень поліномами / М.П. Кузьмінець, Ю.В.Максим'юк, І.Ю.Мартинюк // Науково-технічний збірник «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2023. – Вип. 114. Частина 1 – С. 65-75. https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-114.1-065-075.

12. Кузьмінець М.П. Ефективність алгоритму розв'язання системи нелінійних рівнянь на основі екстраполяції переміщень / М.П. Кузьмінець,

Ю.В.Максим'юк, І.Ю.Мартинюк // Науково-технічний збірник «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2024. – Вип. 115. Частина 2 – С. 96-106. https://doi.org/10.33744/0365-8171-2024-115.2-096-106.

13. Кузьмінець М.П. Дослідження напружено-деформованого стану призматичного демпферуючого елемента/ М.П. Кузьмінець, Ю.В. Максим'юк, І.Ю. Мартинюк // Вісник ХНАДУ – 2023. – Вип. 102. – С. 73-77. https://doi.org/10.30977/BUL.2219-5548.2023.102.0.73

14. Андрієвський В.П. Чисельне дослідження збіжності рядів фур'є, поліномів і напіваналітичного методу скінченних елементів / Андрієвський, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк // Збірник наукових праць Національного гірничого університету – 2023. – № 74. – С. 124-132. https://doi.org/10.33271/crpnmu/74.124

15. Максим'юк Ю.В. Дослідження напружено-деформованого стану демпферуючого елемента / Ю.В. Максим'юк, Андрієвський, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк // Збірник наукових праць Національного гірничого університету – 2023. – № 75. – С. 198-205. https://doi.org/10.33271/crpnmu/76.198

16. Андрієвський В.П. Дослідження збіжності поліномів і методу скінчених елементів з урахуванням пластичних властивостей матеріалу / В.П. Андрієвський, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту – 2024. – №207. – С. 24-38. https://doi.org/10.18664/1994-7852.207.2024.301881.

в) статті, що включені до наукових періодичних видань інших держав, та у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:

17. Bazhenov V.A. Napivanalitychnyi metod skinchenykh elementiv u pruzhnii ta pruzhno-plastychnii postanovtsi dlia kryvoliniinykh pryzmatychnykh obiektiv (Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curviline prismatic objects) / V.A. Bazhenov, A.A. Shkril', Yu.V. Maksymiuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymiuk // Opir materialiv i teoriia sporud– 2020. – Vyp. 105. – P. 24–32. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2020.105.24-32

18. Bazhenov V.A. Convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters/ V.A. Bazhenov, M.V. Horbach, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymiuk // Opir materialiv i teoriia sporud– 2021. – Vyp. 106. – P. 92–104. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.106.92-104

19. Vorona Y.V. Dostovirnistʹ rezulʹtativ otrymanykh napivanalitychnym metodom skinchenykh elementiv dlya pryzmatychnykh til z pereminnymy fizychnymy i heometrychnymy parametramy (Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters) / Y.V. Vorona, Yu.V. Maksimyuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 107. – P. 184-192 https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.107.184-192

20. Maksimyuk Yu.V. Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters (Дослідження впливу товщини фланця на характер розвитку зон пластичності в корпусній деталі) /Yu.V. Maksimyuk, Yu. A. Chuprina, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 108. - P. 97-106. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.97-106

21. Maksimyuk Yu.V. Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters (Дослідження напружено-деформованого стану металевої смуги у процесі протяжки) /Yu.V. Maksimyuk, M.P. Kuzminets, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 109.– P. 97-106. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.229-238

22. Maksimyuk Yu.V. Numerical analysis of the stressed-deformed state of a tubular element under thermal loading / Yu.V. Maksimyuk, O.V. Kozak, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // Strength of Materials and Theory of Structures:

Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 199-206 https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.199-206

23. Maksimyuk Yu.V. Analysis of structures with arbitrary kinematic boundary conditions by the semi-analytical finite element method / Yu.V Maksimyuk, V.P. Andriievskyi, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk. // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 111. – P. 140-146 https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.111.140-146

24. Maksimyuk Yu.V. Analysis of the stress-strain state of the rotary device fastening part by the semi-analytical finite element method / Yu.V Maksimyuk, O.O. Shkryl, I.Yu. Martyniuk, A.A. Kozak, O.V. Maksimyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 67-74. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.67-74.

г) основні публікації по доповідям на міжнародних і вітчизняних конференціях:

25. Максим'юк Ю. Напіваналітичний метод скінчених елементів в лінійних і нелінійних задачах деформування, руйнування та формозмінення просторових тіл з урахуванням неканонічності форми та складної структури / Ю.Максим'юк, І.Мартинюк, О.Максим'юк // III Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 2021. https://www.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2023/09/konferencziya-knuba-021_prew_all_160421_compressed.pdf

26. Maksimyuk Yu.V. Solution of Systems of Linear and Nonlinear Equations of Prismatic and Circular Spatial (Розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь призматичних і кругових просторових тіл) /Yu. MaksimyukI. MartyniukM. MalykhinV. Andreychuk // News of Science and Education: Science and education LTD, Sheffield – GB, 2022. – Issue 9. ISSN: 2312-2773 (online).

27. Maksimyuk Yu.V. Software For the Calculation of the Strength of Prismatic Bodies (Програмне забезпечення розрахунку міцності призматичних тіл) /Yu.

MaksimyukI. MartyniukM. Malykhin // Středoevropský věstník pro vědu a výzkum: Publishing house Education and Science – CZ, 2022. – Issue 9. ISSN:2336-3630 (online).

28. Максим'юк Ю. Моментна схема скінчених елементів в геометрично та фізично нелінійних задачах деформування вісесиметричних тіл обертання з урахуванням континуального руйнування/ Ю.Максим'юк, І.Мартинюк, О.Максим'юк // IV Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 26 квітня 2023. https://www.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2023/05/tezy_konferencziyi-knub-2023-26-27_04_235.pdf

29. Maksimyuk Yu.V, MartyniukI.Yu. Analysis of Geometrically Nonlinear Problems of Axisymmetrical Bodies Taking Into Account the Material Deformation / Materials of the XX International scientific and practical Conference Modern scientific potential - 2023 , February 28 - March 7 ,2023: Sheffield. Pp. 119-121 Science and education LTD -130 p. / ISSN 2312-2773 (online).

30. Maksimyuk Yu.V, MartyniukI.Yu., Maksimyuk O.V. Research of Convergence, Reliability and Efficiency of the Results Obtained Using the Given Finite Elements // Materiály XX Mezinárodní vědecko - praktická konference «Věda a technologie: krok do budoucnosti», Volume 4 : Praha. 2023. Pp. 91-94. Publishing House «Education and Science» -96 s. ISSN 1561-6940 (online).

31. Maksimyuk Yu.V, MartyniukI.Yu., Maksimyuk O.V. The effectiveness of the algorithm for solving nonlinear equations in isotropic load // URL: Progressive research in the modern world. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. Bioscience Publisher. Boston, USA. 2023. Pp. 229-231. https://sci-conf.com.ua/vi-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-progressive-research-in-the-modern-world-2-4-03-2023-boston-ssha-arhiv/

32. Maksimyuk Yu. V., Martyniuk I. Yu., Maksimyuk O. V. The Effectiveness of the Algorithm For Solving Nonlinear Equations in Isotropic Load // // Scientific progress: innovations, achievements and prospects. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. MDPC Publishing. Munich, Germany. 2023. Pp. 117-120. URL: https://sci-conf.com.ua/vi-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-

scientific-progress-innovations-achievements-and-prospects-6-8-03-2023-myunhen-nimechchina-arhiv/.

33. Maksimyuk Yu. V., Martyniuk I. Yu., Maksimyuk O. V. Study of the Influence of Taking Into Account Geometric Nonlinearity on The Value of the Resource of a Christmas Tree Joint Under Creep Conditions // Modern research in science and education. Proceedings of the 2nd International scientific and practical conference. Bioscience Publisher. Chicago, USA. 2023. Pp. 148-150. URL: https://sci-conf.com.ua/ii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-modern-research-in-science-and-education-12-14-10-2023-chikago-ssha-arhiv/.

ЗМІСТ

ВСТУП

Серед різноманіття просторових конструкцій найпоширенішими в техніці є об’єкти, форма яких утворена рухом певної поверхні вздовж направляючої. Це, передусім, канонічні (вісесиметричні та прямолінійні призматичні) тіла, а також більш складні (циклічно симетричні та криволінійні призматичні) об'єкти, отримані з канонічних рівнянь шляхом тривимірних перетворень. Відмінна риса перших – незмінність форми в процесі руху утворюваної поверхні та сталість кривини направляючої, тоді як у других кривина може змінюватися, а утворювана поверхня деформуватися без розривів. За довільного характеру зовнішніх впливів точну картину напружено-деформованого стану навіть для вісесиметричних і прямолінійних призматичних тіл неможливо отримати на основі двовимірних задач. Зниження матеріаломісткості, підвищення надійності, технологічності та економічності інженерних рішень призводять до ускладнення форм і структур просторових об’єктів, які часто поєднують тривимірні й оболонкові елементи з різними механічними характеристиками. У процесі експлуатації ці конструкції зазнають впливу силових і теплових навантажень. Неоднорідні температурні поля впливають як на теплові деформації, так і на зміну властивостей матеріалів. Тенденція до інтенсифікації використання обладнання разом із зниженням матеріаломісткості обумовлює необхідність застосування конструктивних рішень, що допускають наявність незворотних деформацій, які для деяких елементів супроводжуються значною зміною початкової форми. Розвиток великих пластичних деформацій характерний для ущільнювальних кільцевих прокладок, заклепок у з’єднаннях, заготовок під час обробки металів тиском (витяжці, осадці, протяжці) тощо.

Розрахунок конструкцій із теплообміном, пластичними деформаціями, істотними змінами форми та взаємодією з іншими об’єктами потребує розв’язання складних просторових задач нестаціонарної теплопровідності, теорії пружності й пластичності для тіл неканонічної форми. Це також вимагає врахування контактної взаємодії, великих пластичних деформацій та аспектів механіки руйнування. Розробка ефективних методів розрахунку таких конструкцій із використанням методу скінченних елементів (МСЕ) є актуальною проблемою будівельної механіки, особливо в контексті комп'ютерного моделювання.

Дослідження виділеного класу об’єктів слід проводити у просторовій постановці, враховуючи їх істотно тривимірний напружено-деформований стан. Найуніверсальнішим чисельним методом, що забезпечує розрахунок конструкцій із фізичною та геометричною нелінійністю, а також з позицій континуальної механіки руйнування, є МСЕ. Проте його можливості для розв’язання просторових задач обмежені, тому зазвичай використовується вісесиметрична або плоска постановка. Підвищення ефективності МСЕ для об’єктів цього класу можливе шляхом поєднання з методом розділення змінних, що відомий як напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ).

Актуальність теми. Аналіз виявлених практичних прикладів, що наведені вище, дозволяє виділити основні завдання механіки деформівного твердого тіла, розв'язання яких необхідне для вдосконалення конструктивних рішень і технологій. Більшість проявлених об'єктів потребують розв'язання фізично нелінійних задач, пов'язаних із розвитком незворотних деформацій пластичності та повзучості. Значна частина прикладів це оболонкові і комбіновані конструкції, для яких необхідно виконати розрахунки в умовах геометричної нелінійності, враховуючи великі пластичні деформації.

Особливе значення, зокрема для елементів енергетичного обладнання, має питання продовження ресурсу експлуатації, що вимагає розв’язання задач континуального руйнування. В рамках континуального руйнування зазначені проблеми ускладнюються врахуванням таких факторів, як залежність матеріальних констант матеріалу від температури та вплив геометричної нелінійності.

У роботі запропоновано ефективний чисельний підхід до комплексного розв’язання лінійних, фізично та геометрично нелінійних задач деформування та накопичення пошкодженості матеріалу континуального руйнування й моделювання тіл складної структури на основі НМСЕ.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) і Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА (НДІБМ КНУБА).

Дослідження проведені в межах наступних науково-дослідних робіт, що виконувались за напрямком 05 – «Нові комп’ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України:

1ДБ-2019 «Створення комп’ютерних технологій дослідження несучої здатності просторових тіл складної форми з тріщинами на основі енергетичних критеріїв руйнування» (2019-2021 рр., № держ. реєстрації 0119U004841);

2ДБ-2019 «Чисельні методи дослідження та прогнозування нелінійних коливань, динамічної стійкості та кризових явищ і хаотичної поведінки пружних систем» (2019-2021 рр., № держ. реєстрації 0119U002578);

1ДБ-2020 «Теорія і методи чисельного дослідження динамічного фізично та геометрично нелінійного деформування просторових тіл» (2020-2022 рр., № держ. реєстрації 0120U001011);

5ДБ-2022 «Теорія і методи дослідження неізотермічного фізично нелінійного деформування просторових тіл обертання з урахуванням динамічного навантаження» (2022-2024 рр., № держ. реєстрації 0122U001709).

Матеріали автора були використанні при виконанні цих науково-дослідних робіт.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи полягає в розробці інноваційного чисельного методу заснованого на напіваналітичному методі скінченних елементів, для детального аналізу напружено-деформованого стану складних масивних і тонкостінних призматичних конструкцій. Розроблена методика дозволяє враховувати різні типи навантаження, особливості граничних умов на торцях, а також нелінійні деформаційні процеси, включаючи пластичність, повзучість та їхню залежність від температурних факторів. Отримані результати сприятимуть розв’язанню нових складних інженерних задач, що мають вагоме практичне значення.

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

- отриманням розв’язувальних співвідношень напіваналітичного варіанту МСЕ для масивних, тонкостінних і комбінованих пружних і пружно-пластичних призматичних тіл з довільно закріпленими торцями;

- розробка ефективних алгоритмів розв'язання задач пружного і пружно-пластичного рівноваги довільно закріплених призматичних тіл;

- створення на основі отриманих співвідношень і алгоритмів комплексу програм, що відповідають сучасним вимогам, що пред'являються до програмного забезпечення МСЕ;

- апробації особливостей процесів пружного і пружно-пластичного деформування конструкцій та континуального руйнування, що застосовуються в різних галузях техніки.

Об’єктом дослідження є процеси фізично і геометрично нелінійного деформування, континуального руйнування деталей машинобудівних конструкцій.

Предметом дослідження є величини параметрів напружено-деформованого стану континуального руйнування та перерозподіл напружень під час деформування деталей та визначення розрахункового ресурсу.

Методи дослідження. У рамках напіваналітичного підходу до методу скінченних елементів (НМСЕ) особливу увагу приділено вибору координатних функцій, що забезпечують вірне представлення переміщень уздовж довжини призматичного елемента. Під час формування математичних моделей універсального СЕ, за винятком рядів Фур’є, безпосереднє використання інших функціональних баз із задач розрахунку призматичних тіл в межах НМСЕ є малопридатним, оскільки кожна з таких функцій орієнтована переважно на часткові граничні умови, часто сформульовані в межах визначень теорії оболонок. Ряди Фур’є, на відміну від інших, забезпечують чітке розділення змінних і дозволяють звести просторову задачу до набору двовимірних задач, що відповідають окремим гармонікам. Проведений аналіз літературних джерел, присвячених методикам просторового розрахунку, свідчить, що для узагальненого опису граничних умов доцільно використовувати поліноміальні розклади переміщень як найбільш гнучкий та універсальний інструмент.

Найбільш ресурсоємною стадією у дослідженні конструкцій у пружному та пружно-пластичному моделюванні в межах МСЕ є чисельне розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь. Аналіз існуючих підходів та порівняння методів, що використовуються для обробки таких систем у класичному МСЕ, демонструє високу ефективність комбінованих алгоритмів, які інтегрують покрокові схеми з ітераційними процедурами. У цьому дослідженні для кожного кроку навантаження реалізовано блочну ітераційну процедуру з верхньою релаксацією, що особливо добре адаптована до обробки матриць блочного типу, характерних для задач у рамках НМСЕ.

У даній роботі процес пружно-пластичного деформування моделюється на основі теорії течії для матеріалу з ізотропним зміцненням. У разі виникнення деформацій повзучості рівняння стану формулюються відповідно до принципів теорії зміцнення, що залишається коректним за умови малої кривизни деформації.

За умов значних пластичних деформацій формулювання визначальних рівнянь має забезпечувати їхню об'єктивність, тобто інваріантність щодо жорстких переміщень тіла та змін системи координат. Таким чином, вибір тензорних характеристик деформацій, напружень та їхніх часових похідних повинен відповідати вимозі індиферентності. У цій роботі для опису деформацій використовується тензор Фінгера, тоді як для напруженого стану застосовується тензор істинних напружень Коші. Однак кінематичні характеристики, зокрема швидкість деформацій та темп зміни напруженого стану, не задовольняють умову індиферентності. Для корекції цієї невідповідності використовується похідна Олдроїда.

В роботі розроблено рівняння стану для ізотропного пружнопластичного середовища, що перебуває в умовах малих пружних та великих пластичних деформацій. Концептуальна відмінність між використанням теорії скінченних пружно-пластичних деформацій та підходом, заснованим на застосуванні теорії течії для малих деформацій на кожному часовому кроці, полягає у заміні матеріальних похідних у визначальних рівняннях на їхні об'єктивні аналоги, що забезпечує коректний опис напружено-деформованого стану матеріалу.

Узагальнення підходів до аналізу масивних і тонкостінних конструкцій зумовлює необхідність створення універсального скінченого елемента (СЕ), здатного забезпечити високу точність розрахунків у різних типах задач. Його ефективність визначається не лише геометричною конфігурацією, але й законом розподілу переміщень і методикою побудови матриці жорсткості.

Використання трикутних СЕ як універсального рішення є малопридатним через їхню низьку ефективність у задачах згину порівняно з чотирикутними елементами. У тонкостінних конструкціях переміщення вздовж товщини змінюється за лінійним законом, що аргументує доцільність застосування призматичного СЕ з білінійним розподілом переміщень у поперечному перерізі. Процедура формування матриці жорсткості неоднорідного криволінійного СЕ реалізується через методику моментної схеми скінчених елементів (МССЕ), що забезпечує підвищену збіжність та точність чисельного аналізу. При моделюванні тонкостінних конструкцій цей підхід демонструє рівень ефективності, еквівалентний спеціальнти оболонковим СЕ. Додатково, використання МССЕ дозволяє точно відображати жорстке переміщення елемента як єдиної цілісної структури, що є ключовим аспектом для моделювання процесів формозміни.

У випадку призматичних тіл зі змінними фізико-механічними та геометричними характеристиками матриця системи рівнянь є повністю заповненою, що унеможливлює зменшення її розмірності. Числова обумовленість цієї матриці значною мірою визначається вибором раціональної системи координатних функцій, а досягнення максимальної ефективності обчислень можливе лише за умови домінування діагональних елементів.

Успішне застосування МСЕ до розрахунку конструкцій в значній мірі обумовлено ефективністю використання сучасних персональних комп’ютерів, в зв'язку з чим підвищується роль систем програм, що реалізують процес розв’язання. Правильна організація обчислювального комплексу, вибір оптимальних алгоритмів розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь в значній мірі визначають можливості методу щодо структурної складності розглянутих об'єктів, точності одержуваних результатів і складності постановки нелінійних задач. Тому спостерігається підвищений інтерес до розробки досить універсальних обчислювальних комплексів на основі МСЕ. Одним з ефективних програмних комплексів є система «Міцність», та призначена для проведення всебічних досліджень в області механіки твердого тіла, що деформується, основні принципи побудови якої використані в даній роботі при реалізації напіваналітичного варіанту МСЕ.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в створенні високоефективного чисельного підходу на основі моментної схеми скінченних елементів у поєднанні з напіваналітичним варіантом методу МСЕ, орієнтованого на дослідження напружено-деформованого стану складних за геометрією масивних і тонкостінних конструкцій призматичної форми під дією довільних навантажень. Запропонований підхід враховує можливість виходу матеріалу за межі пружної поведінки та базується на поліноміальному поданні переміщень разом із застосуванням ітераційних методів розв’язання систем рівнянь. Це дозволило поширити сферу практичного використання НМСЕ на задачі з довільними граничними умовами на торцях. У межах дослідження вирішено ряд нових задач пружного та пружно-пластичного деформування конструкцій призматичної форми, які мають прикладну цінність і можуть використовуватись у різних галузях технологічних конструкцій.

Розроблений методологічний підхід удосконалений відповідно до дослідження напружено-деформованого стану конструкцій з урахуванням значних пластичних деформацій та деформацій повзучості. Це дозволило детально аналізувати процеси пружно-пластичного деформування неоднорідних криволінійних призматичних тіл за умов комплексного термомеханічного впливу.

Достовірність результатів, у межах розробленої методики та її програмної реалізації, здійснена шляхом розв’язання широкого спектра контрольних задач, що охоплюють пружне і пружно-пластичне деформування масивних і тонкостінних конструкцій призматичної форми за різних граничних умов і типів навантаження. Під час розв'язання нових задач збіжність результатів оцінювалася шляхом поступового збільшення дискретизації за допомогою скінченних елементів, урахування додаткових членів розкладу, підвищення точності чисельного розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь, а також контролю точності дотримання природних граничних умов.

Практична цінність дисертаційної роботи полягає у створенні результативної методики розв'язання нових складних задач пружного та пружно-пластичного деформування призматичних тіл, яка реалізована у вигляді спеціалізованого програмного забезпечення. Розроблений підхід забезпечує високий рівень універсальності та може ефективно застосовуватись у проєктно-інженерній практиці, зокрема в галузях будівництва, машинобудування та інших технічних напрямах, де необхідне моделювання деформованого стану конструкцій. Широкі можливості практичного застосування методики наочно ілюструються результатами розрахунку конкретних об'єктів, що підтверджує її прикладну значущість і потенціал широкого впровадження.

Особистий внесок здобувача. Отримані в представленій до захисту дисертаційній роботі викладено авторські підходи, розрахункові моделі, алгоритми та програмні засоби, що формують методологічну основу проведеного дослідження. Всі основні наукові результати отримано безпосередньо автором і висвітлено у його одноосібних та співавторських публікаціях [1–2, 6, 14–19, 27–30, 32, 34–39, 48–49, 79–88, 90–91, 115]. У зазначених роботах автор самостійно здійснив постановку задачі, сформулював вихідні математичні моделі та розробив підходи до чисельного аналізу просторового фізично та геометрично нелінійного напружено-деформованого стану конструкцій складної конфігурації.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень та окремі розділи роботи доповідалися на:

- III Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 2021;

- News of Science and Education: Science and education LTD, Sheffield – GB, 2022;
- Středoevropský věstník pro vědu a výzkum: Publishing house Education and Science – CZ, 2022;
- IV Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 26 квітня 2023;
- Materials of the XX International scientific and practical Conference Modern scientific potential - 2023 , February 28 - March 7 , 2023;
- Materiály XX Mezinárodní vědecko - praktická konCErence «Věda a technologie: krok do budoucnosti», Volume 4 : Praha. 2023;
- Progressive research in the modern world. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. Bioscience Publisher. Boston, USA. 2023;
- Scientific progress: innovations, achievements and prospects. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. MDPC Publishing. Munich, Germany. 2023;
- Modern research in science and education. Proceedings of the 2nd International scientific and practical conference. Bioscience Publisher. Chicago, USA. 2023.

Публікації. За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 33 наукових праць, серед яких: вісім у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії “А”, у періодичному виданні, що індексується в наукометричній базі Web of Science; п’ятнадцять статей у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії “Б”; дев’ять публікацій у збірниках матеріалів та доповідей українських та міжнародних наукових конференцій та одна монографія видана у співавторстві.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів основної частини, загальних висновків, списку використаних літературних джерел із 120 найменувань, додатків, викладена на 297 сторінках друкованого тексту, серед яких 278 сторінок основного тексту, 127 рисунків, 29 таблиць що наведені вище, дозволяє виділити основні і дві сторінки додатків.

В першому розділі наведені отримані в результаті проведеного аналізу літературних джерел дані про підходи та методи розв'язання задач деформування, континуального руйнування просторових тіл неканонічної форми і структури при температурному, статичному навантаженні. Це дозволяє більш чітко сформулювати постановку зазначених фізично і геометрично нелінійних задач деформування і руйнування, визначити вихідні співвідношення та вибрати найбільш ефективні методи їх розв'язання.

В другому розділі наведені вихідні співвідношення теорії пружності, пружнопластичності та повзучості з пошкодженістю. Викладені формули для розрахунку вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченних елементів: зі змінними механічними та геометричними параметрами, усередненими механічними та геометричними параметрами.

В третьому розділі приведено алгоритм розв'язання систем лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь. Проведено наукове обґрунтування вибору оптимальної системи координатних функцій, що використовується для поліноміального представлення компонент переміщень у рамках математичного опису деформованого стану. Такий підхід забезпечує підвищення точності та збіжності чисельного розв'язання задач механіки суцільного середовища.

В четвертому розділі наведені розв'язувальні рівняння напіваналітичного методу скінчених елементів для геометрично нелінійних задач. Описаний криволінійний неоднорідний призматичний скінченний елемент. Приведені розв'язувальні співвідношення з урахуванням формозмінення.

В п'ятому розділі реалізовано для сучасних персональних комп'ютерів програмне забезпечення для розрахунку призматичних тіл складної форми та структури. Викладена структура обчислювального комплексу: завдання обробка і друк вхідної та вихідної інформації, розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь.

В шостому розділі наведено дослідження ефективності напіваналітичного методу скінчених елементів у криволінійних призматичних об'єктах у пружній та пружно-пластичній постановці та описано реалізацією цього підходу на сучасному програмному забезпеченні. Також приведені особливості чисельного дослідження збіжності напіваналітичного методу скінченних елементів. Здійснено детальний порівняльний аналіз ефективності застосування скінченних елементів із варіативними та усередненими механічними й геометричними характеристиками. У межах дослідження проаналізовано збіжність чисельних розв’язків, отриманих на основі рядів Фур’є, поліноміальних апроксимацій, а також класичної реалізації методу скінченних елементів. Окремо досліджено збіжність результатів, отриманих за допомогою класичного та напіваналітичного варіантів МСЕ, для задач моделювання просторового напружено-деформованого стану призматичних тіл із просторово неоднорідними фізико-механічними та геометричними параметрами. Виконане обґрунтування достовірності результатів, отриманих на основі напіваналітичного методу скінчених елементів.

У сьомому розділі наведені результати аналізу напружено-деформованого стану призматичних конструкцій: Т-подібного хвостовика лопатки ротора парової турбіни, демпфуючого елемента, деталі кріплення поворотного пристрою. Також виконаний аналіз впливу товщини фланця на напружено-деформований стан корпусної деталі. Реалізоване чисельне дослідження процесу деформування та визначення ресурсу призматичних тіл при термопружно-пластичному деформуванні. Виконане моделювання процесу деформування та визначення ресурсу хвостовика лопатки газової турбіни та моделювання процесу деформування та визначення терміну служби лопатки газової турбіни.

Під час дослідження використано результати, отримані в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (НДІБМ КНУБА). Автор щиро вдячний всім співробітникам інституту та кафедри будівельної механіки, а також докторам технічних наук, професорам Петру Петровичу Лізунову, Івану Івановичу Солодею та Сергію Олеговичу Пискунову за ґрунтовні поради та зауваження, які значно підвищили якість проведених досліджень.

РОЗДІЛ 1
СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ФІЗИЧНО І ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ І РУЙНУВАННЯ ТІЛ СКЛАДНОЇ СТРУКТУРИ

Покращення машин, обладнання, конструкцій та споруд, які широко застосовуються у різних сферах сучасної техніки, неможливе без точного прогнозування їх поведінки під впливом зовнішніх навантажень. Оцінка параметрів напружено-деформованого стану об’єктів з урахуванням специфіки конфігурації, властивостей матеріалу, типу навантажень та моделювання складних процесів деформації й руйнування є важливим аспектом інженерної практики.

Розділ присвячено аналізу сучасного стану досліджень у галузі просторових задач фізично та геометрично нелінійного деформування та руйнування тіл зі складною структурою, зокрема методів моделювання, які використовуються для розв’язання цих задач.

1.1 Огляд сучасних підходів до дослідження проблем геометрично нелінійного деформування та руйнування тіл зі складною структурою у контексті методу скінченних елементів

Різні аспекти вдосконалення сучасних чисельних методів, орієнтованих на комп’ютерне застосування, висвітлені у працях [3, 5, 40, 43-46]. Наразі для розрахунку просторових конструкцій найширше використовується метод скінченних елементів (МСЕ), значний прогрес у розвитку якого досягнуто завдяки роботам як вітчизняних, так і зарубіжних учених [26, 47, 55-60, 63, 70-72, 109-112].

Українські публікації зосереджуються на теоретичному обґрунтуванні МСЕ та його зв’язках з іншими методами, а також на дослідженні конкретних типів скінченних елементів і їх застосуванні до задач механіки суцільного середовища. Особливу увагу приділено вибору оптимальної форми скінченних елементів, виду й ступеню апроксимуючих функцій, а також методикам формування матриць жорсткості [7, 8, 23, 24].

Для аналізу напружено-деформованого стану призматичних тіл, що мають сталу структуру механічних і геометричних характеристик уздовж однієї координатної осі, доцільним є використання напіваналітичного підходу в межах методу скінченних елементів (НМСЕ). Такий підхід забезпечує підвищену обчислювальну ефективність та точність розв’язання завдань, пов’язаних із просторовим деформуванням, у порівнянні з класичними чисельними методами. Цей метод передбачає поєднання дискретизації за методом скінченних елементів із розкладанням переміщень у характерному напрямі за системою тригонометричних координатних функцій.

Численні дослідження, що стосуються розробки та впровадження напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) [41-42], базуються на моделюванні тонких оболонок, зокрема з урахуванням деформацій поперечного зсуву [55]. У цих роботах проаналізовано широкий спектр задач, серед яких врахування вузько направлених впливів [61], аналіз складних і багато гілкових систем [102], оцінка напружено-деформованого стану ребристих оболонок зі змінною товщиною під дією термосилових навантажень [96], а також визначення орієнтації підкріплювальних елементів у конструктивно-анізотропних оболонках [118]. У роботі [107] запропоновано методику аналізу напружено-деформованого стану оболонок із циклічною неоднорідністю в окружному напрямку.

Дослідження, присвячені застосуванню НМСЕ для розрахунку тіл обертання [41, 42, 93], використовують різноманітні типи скінченних елементів: трикутні з лінійним [69, 73, 78, 113] і квадратичним [68] розподілом переміщень, прямокутні чотиривузлові [117] та чотирикутні криволінійні восьмивузлові [108].

Отримані результати підтверджено на основі контрольних прикладів [106, 109, 116, 119]. Зокрема, було розв’язано низку задач із врахуванням пружного [114, 116, 119] і пружно-пластичного [89, 104] деформування різних конструктивних елементів.

Окрему увагу приділено розробці та впровадженню підходу, що базується на використанні універсального скінченого елемента для дослідження в пружній і пружно-пластичній постановках масивних і тонкостінних тіл обертання, не вісесиметричних за формою, які піддаються силовим і температурним впливам. Цей підхід детально розглянуто в роботах [4, 9-12, 25, 31, 50, 54]. Концептуальні основи узагальнення зазначеної модифікації напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) для задач моделювання пружного та пластичного деформування конструкцій циклічного типу, що характеризуються змінністю механічних та геометричних параметрів уздовж окружної координати, детально викладені у джерелі [51]. Праці [53, 65, 67, 74, 77] спрямовані на практичну реалізацію цих принципів для зазначеного типу об’єктів.

Необхідно зазначити, що у всіх проаналізованих статтях, присвячених дослідженню тіл обертання на основі напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ), як систему координатних функцій використано ряди Фур’є. Серед перших публікацій, що стосуються розрахунку призматичних тіл із застосуванням НМСЕ (методом скінченних смуг, дискретно-континуальним методом), слід виділити роботи [75]. Більшість досліджень, виконаних як вітчизняними, так і зарубіжними авторами, зосереджені на розв’язанні задач пружної рівноваги оболонок і пластин у лінійній постановці [52, 62, 64, 76, 92, 95, 98-100].

Питання застосування НМСЕ до розрахунку шаруватих і коробчастих конструкцій, а також пластин на пружній основі висвітлено в роботах [41-42, 94, 103].

Розвитку напіваналітичного методу скінченних елементів для розв’язання геометрично нелінійних задач присвячено статті [90; 91; 132; 133; 240], причому в роботі [238] враховано фізичну нелінійність.

Як систему координатних функцій для дослідження призматичних тонкостінних конструкцій здебільшого використовують ряди Фур’є та блокові функції. Виняток становлять роботи [21, 33, 66, 97, 101], у яких застосовано сплайнову апроксимацію.

Аналіз літературних джерел засвідчує, що в існуючих публікаціях недостатньо висвітлено питання, пов’язані із застосуванням НМСЕ до розрахунку тонкостінних призматичних тіл у пружно-пластичній постановці, а також масивних тіл навіть у пружній постановці. Крім того, відсутні дослідження, присвячені розробці універсальних призматичних скінченних елементів, які б дозволяли проводити аналіз масивних, тонкостінних і комбінованих конструкцій.

Сучасний розвиток методу скінченних елементів (МСЕ) характеризується прагненням до універсалізації алгоритмічних схем побудови розв’язувальних співвідношень шляхом введення мінімуму вихідних припущень і гіпотез щодо реальних законів деформування. Накопичено значний досвід застосування просторових скінченних елементів, які дозволяють досліджувати масивні та тонкостінні об’єкти з єдиних позицій [105]. Як зазначено в роботах [94; 100], цей підхід охоплює ширший клас практичних задач, усуваючи необхідність використання декількох типів скінченних елементів, заснованих на різних вихідних рівняннях (теорії пружності, пластин, оболонок) [24]. Це значно ускладнює вибір розрахункової схеми, створює труднощі у формуванні умов контакту між елементами та збільшує громіздкість обчислювального комплексу. У зв’язку з цим у даній роботі акцент зроблено на використанні універсальних скінченних елементів.

До ключових факторів, що визначають ефективність універсальних скінченних елементів, належать форма елемента, закон розподілу переміщень та методика виведення матриці жорсткості.

Під час формування геометричної конфігурації скінченних елементів доцільно враховувати, що їхні геометрико-механічні характеристики мають відповідати специфічним вимогам, які обумовлені потребою чисельного моделювання напружено-деформованого стану масивних тіл зі складною геометрією контурів поперечних перерізів, а також тонкостінних конструкцій, у яких значну роль відіграють згинальні компоненти. Трикутні скінченні елементи, що вирізняються простотою реалізації аналітичних співвідношень, широко застосовуються для апроксимації криволінійних меж. Однак, як зазначено у монографії [42], їх застосування в задачах згину є менш ефективним порівняно з чотирикутними елементами. З урахуванням характеру зміни переміщень уздовж товщини пластинчастих і оболонкових структур, найбільш обґрунтованим є використання лінійного закону розподілу переміщень у межах скінченного елемента. У зв'язку з цим як універсальний СЕ використовується призматичний елемент із білінійним законом розподілу переміщень у межах чотирикутного поперечного перерізу. Формування матриці жорсткості цього елемента здійснено за методикою моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [31, 33, 41, 42, 51, 55, 66].

Як показано в роботах [71-75, 99], застосування МССЕ забезпечує значне покращення збіжності результатів порівняно з іншими схемами МСЕ, що базуються на співвідношеннях теорії пружності. Ця методика дозволяє з високою точністю моделювати як масивні, так і тонкостінні тіла, не поступаючись за ефективністю оболонковим варіантам МСЕ.

Використання моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) забезпечує унеможливлення явища «некоректного зсуву», яке виникає під час розрахунку тонкостінних конструкцій із використанням просторових скінченних елементів [31, 51]. Крім того, МССЕ задовольняє вимогам до переміщень елемента як жорсткого цілого, що є важливим аспектом, відзначеним у численних дослідженнях [3-5, 11-13, 20, 22, 89, 120].

У рамках напіваналітичного підходу до МСЕ особливого значення набуває вибір системи координатних функцій для подання переміщень уздовж довжини елемента призматичної форми. У процесі побудови математичних співвідношень для універсального скінченного елемента встановлено, що застосування функціональних форм, які використовувалися в попередніх дослідженнях для аналізу призматичних тіл у межах напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ), за винятком рядів Фур'є, не є доцільним з позицій ефективності та універсальності. Такий підхід обмежує узагальнення моделі та знижує точність відтворення просторового характеру деформування. Це зумовлено тим, що такі функції задовольняють лише окремі випадки граничних умов, сформульованих переважно з позицій теорії оболонок. До того ж тільки ряди Фур'є забезпечують суворий поділ змінних, що дозволяє звести просторову задачу до низки двовимірних задач для кожної гармоніки.

Наприклад, у роботі C. V. Frontin та співавторів [61] розглянуто різні методи розрахунку просторових конструкцій. Аналіз цих підходів свідчить, що для загального випадку граничних умов найбільш перспективним є розкладання переміщень за поліномами.

Найбільш трудомістким етапом моделювання конструкцій у пружній та пружно-пластичній постановках є алгебраїчне розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь. Огляд літературних джерел, порівняння та зіставлення методів розв'язання систем нелінійних рівнянь у межах МСЕ представлені в роботах [70, 71, 110, 116,]. Аналіз цих досліджень свідчить, що комбіновані алгоритми, які поєднують крокові й ітераційні методи, є найбільш ефективними. У межах цього дослідження на кожному кроці за навантаженням розв'язання системи лінійних і нелінійних рівнянь здійснюється методом блочних ітерацій із верхньою релаксацією. Цей підхід є природним для матриць блочної структури, що характерні для НМСЕ.

Ефективність застосування МСЕ до розрахунків конструкцій значною мірою залежить від можливостей сучасних обчислювальних засобів. У зв'язку з цим зростає роль програмних комплексів, які забезпечують реалізацію процесу розв'язання задач.

Ефективність методу скінченних елементів (МСЕ) значною мірою залежить від правильної організації обчислювального комплексу, а також від вибору оптимальних алгоритмів розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь. Це впливає на здатність методу працювати з об'єктами високої структурної складності, забезпечувати необхідну точність результатів і розв'язувати задачі з нелінійною постановкою. У зв'язку з цим зростає інтерес до розробки універсальних обчислювальних комплексів на основі МСЕ, здатних ефективно вирішувати широкий спектр задач.

Дослідження напружено-деформованого стану криволінійних призматичних тіл неоднорідної структури потребує розв'язання тривимірних задач термопружності та термопластичності підвищеної складності. Такі задачі враховують взаємодію температурних полів із матеріальною та геометричною неоднорідністю, що обумовлює необхідність застосування удосконалених чисельних підходів для вірного опису просторового деформування. Ці задачі охоплюють як малі, так і великі пластичні деформації. Значний внесок у розвиток теорії пластичності й термопластичності зроблено в роботах [29-31, 43, 116].

Розширення теорії пластичності на випадки великих деформацій і успіхи у вивченні процесів пластичного формозмінення пов'язані з дослідженнями [4-5, 11-12, 20-22, 26, 24, 25, 40, 77]. У більшості практичних випадків дослідження процесів пружно-пластичного деформування просторових конструкцій, незалежно від величини пластичних деформацій, супроводжується суттєвими аналітичними та експериментальними складнощами. Це зумовлено як високою складністю математичного опису відповідних моделей, так і труднощами у відтворенні та вимірюванні реальних напружено-деформованих станів, що обґрунтовує необхідність удосконалення існуючих методів дослідження.

Проблеми, пов'язані з розв'язанням задач термопластичності, стають актуальними, коли необхідно враховувати пластичні деформації та залежність фізико-механічних властивостей матеріалів від температури. Незважаючи на значну кількість наукових праць, присвячених розв'язанню просторових задач термопластичності на основі методу скінченних елементів (МСЕ) [68, 102, 108], більшість досліджень обмежується аналізом призматичних тіл простої геометрії.

Дослідження процесів формозмінення, що супроводжуються великими пластичними деформаціями, зазвичай виконуються у вісесиметричній постановці [20-22, 76-77, 95, 112-114]. Водночас лише обмежена кількість робіт [72] присвячена застосуванню МСЕ для моделювання формозмінення тривимірних об'єктів.

Пружно-пластичному деформуванню тіл обертання присвячено низку досліджень [109]. Зокрема, у роботі [113] розглянуто задачу термопластичності з урахуванням температурної залежності фізико-механічних характеристик матеріалу.

Незважаючи на значний розвиток напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) у розв'язанні задач пружного деформування призматичних оболонок і пластин [63, 107], його застосування до складніших класів призматичних об'єктів залишається обмеженим.

Питання, пов'язані із застосуванням НМСЕ для розрахунку складних конструкцій і пластин на пружній основі, висвітлено в роботах [67, 71]. Геометрично нелінійний підхід до дослідження оболонкових і пластинчастих конструкцій детально розглянуто в працях [78, 93]. Водночас питання врахування фізичної нелінійності, що спричиняє неоднорідність матеріальних характеристик, ґрунтовно опрацьовано в дослідженні [63].

Публікацій, присвячених застосуванню НМСЕ до масивних призматичних об'єктів, ще менше. У роботах [3-6] представлено уніфікований підхід до розв'язання задач пружного та пружно-пластичного деформування прямолінійних призматичних тіл, незалежно від їхньої конструктивної форми.

Слід зазначити, що у всіх розглянутих публікаціях як координатні функції використовуються системи, які дозволяють моделювати часткові види граничних умов на торцях конструкцій. Подальший розвиток НМСЕ для розрахунку масивних і тонкостінних призматичних тіл з постійними фізичними умовами вздовж координати розкладання на торцях висвітлено в роботах [41-42].

Аналіз літературних джерел свідчить про відсутність ефективних чисельних методик для розв'язання задач термопружнопластичності та формозмінення криволінійних неоднорідних призматичних тіл. Використання існуючих методик НМСЕ для розрахунків таких об'єктів є неможливим через необхідність врахування зміни геометрії та фізико-механічних властивостей матеріалу, що значно ускладнює структуру розв'язувальних рівнянь.

Методики, розроблені для задач із однорідними призматичними тілами, не адаптовані до розгляду термопружнопластичних процесів і процесів формозмінення, які супроводжуються великими пластичними деформаціями. До теперішнього часу дослідження цих аспектів у межах НМСЕ не проводилися.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі виконано огляд сучасного стану досліджень у галузі геометрично та фізично нелінійного деформування і руйнування тіл зі складною структурою. На основі аналізу наукових джерел встановлено, що метод скінченних елементів (МСЕ) залишається основним інструментом для розв’язання просторових задач деформування тіл складної структури. Особливу увагу приділено напіваналітичному методу скінченних елементів (НМСЕ), який забезпечує ефективне моделювання призматичних тіл із специфічними геометричними та механічними характеристиками.

Аналіз літератури показав, що ключовим напрямом розвитку МСЕ є універсалізація його застосування для моделювання масивних і тонкостінних конструкцій, а також зменшення обчислювальної складності завдяки оптимізації алгоритмів розв’язання нелінійних рівнянь. Незважаючи на суттєві наукові досягнення у сфері чисельного моделювання, питання ефективного застосування напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) до задач термопружнопластичного аналізу, зокрема щодо об'єктів із криволінійною геометрією та просторовою неоднорідністю матеріалу, залишаються недостатньо опрацьованими. Це зумовлює необхідність подальшого розвитку теоретичних основ і вдосконалення обчислювальних алгоритмів для розв’язання відповідного класу задач. Зміна геометрії та фізико-механічних властивостей матеріалу в таких задачах суттєво ускладнює математичну модель.

Таким чином, подальші дослідження мають бути спрямовані на розробку універсальних скінченних елементів і методик, які забезпечуватимуть ефективне моделювання термопластичних процесів для об’єктів зі складною структурою та різноманітними граничними умовами.

РОЗДІЛ 2
РОЗВ’ЯЗУВАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ЧЕРЕЗ РЯД ФУР’Є

Напіваналітичний метод скінченних елементів, що використовує тригонометричні ряди, зокрема ряди Фур’є, широко застосовується як система координатних функцій. Цей підхід перетворює початкову просторову крайову задачу на набір двовимірних задач, кожна з яких відповідає окремій гармоніці ряду Фур’є. Така трансформація суттєво зменшує обсяг обчислювальних ресурсів, часто на кілька порядків, порівняно з традиційними методами скінченних елементів (СЕ). Розклад у ряд Фур’є дозволяє врахувати основні характеристики розв’язку, забезпечуючи високу точність аналізу складних проблем. У цьому розділі описано напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) на основі розкладу в ряд Фур’є, з опорою на добре зарекомендовану та високо ефективну методичну схему моментів скінченних елементів.

2.1 Основні співвідношення теорії пружності і пластичності у криволінійній системі координат

Розглянемо декартову систему координат $Z^{i'}$ де i позначає розмірність системи, яка пізніше буде визначена як базова система відліку.

Система описує довільно навантажене призматичне тіло (як показано на рис. 2.1), що утворюється внаслідок руху нормальної площини складної форми $Z^{3'}$. Особливістю, що виділяє серед інших, такі тіла є вільний характер розподілу механічних і геометричних параметрів у поперечному перерізі, тоді як ці параметри залишаються постійними вздовж напрямку $Z^{3'}$. Опорна система координат слугує засобом для точного визначення зовнішніх впливів, формулювання граничних умов, а також деталізації механічних і геометричних характеристик досліджуваного об’єкта.

Однак часто зручніше зображувати напружено-деформований стан тіла складної форми в локальній системі координат, зазвичай пов'язаній з його геометрією. Для цього введемо локальну криволінійну систему координат X^I (див. Рис. 2.1), де і позначає розмірність системи, яка пізніше буде визначена як базова система відліку, з осями X^1 та X^2, розташованими в площині, а вісь, X^3 збігається з $Z^{3'}$, яка є сталою.

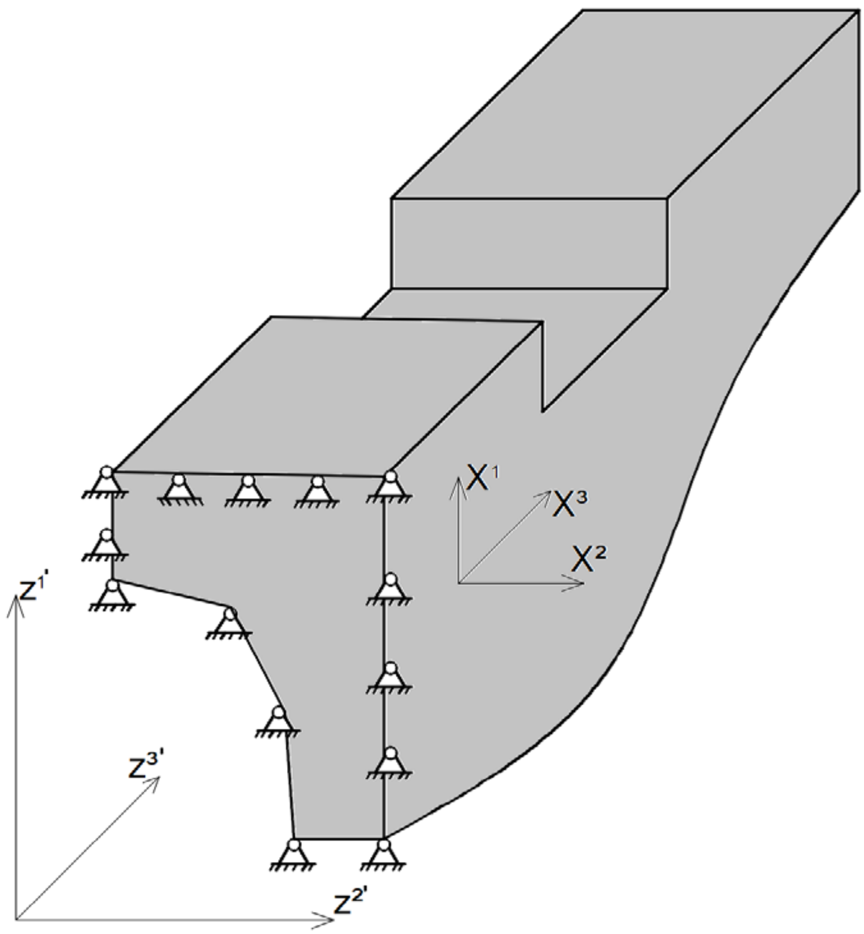


Рис. 2.1. Довільно навантажене призматичне тіло

Припустимо, що в довільній точці тіла співвідношення між основною декартовою системою координат $Z^{i'}$, та локальної криволінійної системи X^j визначається тензором перетворення $Z_{,j}^{i'}$, компоненти якого задаються наступними виразами:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X^{\beta}}, \quad Z_{,3}^{3'} = \frac{\partial Z^{3'}}{\partial X^{3}}, \quad Z_{,\alpha}^{3'} = Z_{,3}^{\alpha'} = 0 \tag{2.1}$$

Відтепер індекси, позначені грецькими літерами, набувають значень 1 і 2, тоді як індекси, позначені латинськими літерами, набувають значень 1, 2 та 3. Більше того, індекси, взяті в дужки, не сумуються. Коваріантні компоненти метричного тензора в локальній системі координат можна виразити через коваріантні компоненти базисної системи координат наступним чином:

$$q_{\alpha\beta} = q_{\gamma'\mu'} Z_{,\alpha}^{\gamma'} Z_{,\beta}^{\mu'} , \ q_{33} = q_{3'3'} Z_{,3}^{3'} Z_{,3}^{3'} \tag{2.2}$$

Оскільки розглядається декартова система координат, дотримуються наступні результати:

$$q_{i'(i')} = 1, q_{\gamma'\mu'} = 0, (\gamma' \neq \mu') \tag{2.3}$$

Використовуючи результати виразу (2.3), вираз (2.2) можна спростити до вигляду

$$q_{\alpha\beta} = Z_{,\alpha}^{\gamma'} Z_{,\beta}^{\gamma'} , q_{33} = Z_{,3}^{3'} Z_{,3}^{3'} \tag{2.4}$$

Контрваріантні компоненти метричного тензора описуються в контексті коваріантних компонент за допомогою наступних формул:

$$q^{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{A}(q_{\alpha\beta})}{q}, \ q^{33} = \frac{1}{q_{33}} , \tag{2.5}$$

Тут q представляє визначник матриці, утвореної коваріантними компонентами метричного тензора, тоді як $\mathrm{A}(q_{\alpha\beta})$ позначає алгебраїчне доповнення компоненти $q_{\alpha\beta}$ з цієї матриці.

Наступне співвідношення використовується для визначення компонент тензора деформацій у локальній системі координат [30]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X^j} + \frac{\partial U_j}{\partial X^i}\right) - U_k \Gamma_{ij}^k \tag{2.6}$$

Тут Γ_{ij}^k – це символи Крістоффеля другого роду, а U_i представляє рух у локальній системі координат. У подальшому переміщення та символи Крістофеля будуть виражені відносно їхніх значень у базовій системі координат.

$$U_k = U_{s'} Z_{,k}^{s'} \tag{2.7}$$

$$\Gamma_{ij}^k = X_{,\ell}^{k}\, Z_{,i}^{m'}\, Z_{,j}^{n'}\, \Gamma_{m'n'}^{\ell'} + X_{\ell'}^{k} Z_{,i}^{m'} \frac{\partial Z_{,j}^{\ell'}}{\partial Z^{m'}}, \tag{2.8}$$

де,

$$X_{\ell'}^{k} = \frac{\partial X^k}{\partial Z^\ell},\ Z_{,k}^{s'} \cdot x_{e'}^{k} = \delta_{e'}^{s'}\ .$$

Тепер, підставляючи значення з рівнянь (2.7) та (2.8) у рівняння, ми отримуємо наступний вираз:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{s',i} Z_{,j}^{s'} + U_{s',j} Z_{,i}^{s'}\right) - U_{s'} Z_{,i}^{m'}\, Z_{,j}^{n'}\, \Gamma_{m'n'}^{s'} \tag{2.9}$$

Як відомо, у декартовій системі координат всі символи Крістофеля дорівнюють нулю, тому вираз (2.9) перетворюється наступним чином:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{s',i} Z_{,j}^{s'} + U_{s',j} Z_{,i}^{s'}\right) \tag{2.10}$$

На основі узагальненої версії закону Гука взаємозв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій виражається наступним чином:

$$\sigma^{ij} = C^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \tag{2.11}$$

Тут і далі $C^{ijk\ell}$ - елементи тензора пружних сталих.

У випадку ізотропного тіла частини тензора пружних постійних подаються через коефіцієнти Ламе як:

$$C^{ijk\ell} = \lambda g^{ij} g^{k\ell} + \mu\left(g^{j\ell} g^{ik} + g^{i\ell} g^{jk}\right). \tag{2.12}$$

Ці компоненти можна легко обчислити, використовуючи модуль пружності матеріалу (μ) і коефіцієнт Пуассона (λ):

$$\lambda = \frac{E_v}{(1-2v)(1+v)},\ \mu = \frac{E}{2(1+v)}, \tag{2.13}$$

Згідно з дослідженням Daikh A.A. та ін. [56], ключові аспекти пластичної деформації пояснюються за допомогою співвідношень теорії пластичного плину для ізотропно зміцнених матеріалів, які характеризуються рівномірним збільшенням опору подальшій пластичній деформації в усіх напрямках.

Сума пружних ε_{ij}^{e} і пластичної ε_{ij}^{ρ} складових дають спільний приріст деформації $d\varepsilon_{ij}$ який визначається як:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{\rho} \tag{2.14}$$

Отже, матеріал є пластично нестисливим, а зміна його об'єму відбувається лінійно-пружно. Спочатку матеріал характеризується ізотропністю та однорідністю. Таким чином, використовуючи цей факт і вираз (2.14), отримуємо:

$$d\varepsilon^{\rho}_{i(i)} = 0, d\varepsilon_{i(i)} = d\varepsilon^{e}_{i(i)} \tag{2.15}$$

Також, відповідно до закону Гука (2.11), пружні деформації прямо пропорційно пов'язані з напруженнями.

Поверхня плинності охоплює область пружної деформації, вираз якої в просторі напружень та текучості Мізеса набуває вигляду, що наведений нижче:

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_s^2 = 0 \quad . \tag{2.16}$$

Тут τ_S слугує границею текучості під час чистого зсуву та залежить від параметра збільшення міцності Одквіста (χ), який виражається наступним чином:

$$\tau_s = \tau_s(\chi),\ \chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon^{\rho}_{ij} d\varepsilon^{ij}_{\rho}} \tag{2.17}$$

Отже, на основі асоційованого закону зв'язок між приростом пластичної деформації та девіатором напружень обчислюється за наступним співвідношенням:

$$d\varepsilon^{\rho}_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = d\lambda S_{ij}\ , \tag{2.18}$$

де S_{ij} девіатор тензора напружень, що визначається за формулою:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_{ij} \tag{2.19}$$

Рівняння стану для $d\varepsilon^{c}_{ij}$ прийнято з урахуванням спінової теорії за наявності деформацій повзучості. Як для деформацій пластичності, так і для деформацій повзучості приріст повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$ дорівнює сумі приросту пружних деформацій і приросту деформацій повзучості, тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{c} \tag{2.20}$$

Тепер рівняння поверхні повзучості має вигляд, як показано нижче:

$$f_c = \frac{3}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_c^2(\psi, T, \varepsilon_i) = 0 \tag{2.21}$$

Тут τ_c межа повзучості, яка обчислюється наступним чином:

$$\tau_c^2 = \left[\varepsilon_i^c (\psi)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \tag{2.22}$$

У рівнянні (2.22) β, γ є температурно-залежними константами матеріалу, а ψ представляє параметр зміцнення, який визначається:

$$\psi = \int_{\delta_{ij}^{c}} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{c} d\varepsilon_{c}^{ij}} \tag{2.23}$$

Далі, використовуючи компоненти девіатора напружень (S_{ij}) обчислюється приріст деформацій повзучості як:

$$d\varepsilon_{ij}^{c} = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij} \tag{2.24}$$

Наступне рівняння описує деформацію в умовах повзучості шляхом фокусування накопичення пошкоджень згідно з концепціями теорії Работнова [102]:

$$\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = D\left(\frac{\sigma_i}{1-\omega}\right)^m \tag{2.25}$$

де ε_i^c інтенсивність швидкості деформації повзучості, ω параметр пошкодження матеріалу, який знаходиться в діапазоні від 0 до 1, $D = D(T)$, і $m = m(T)$ температурно-залежні константи матеріалу, які обчислюються за допомогою базових випробувань на повзучість.

Під час деформування матеріалу значення параметра пошкоджуваності $\omega = \omega(T)$ змінюється від $\omega_0 = 0$ (початковий стан матеріалу) до $\omega *= 1$, що збігається з обмеженням локальної втрати несучої здатності.

Компоненти напружень і тензор швидкості деформації повзучості $\left(\varepsilon_{ij}^c\right)$ асоційовані, а їхній зв'язок представлено у вигляді:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2}\xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i} \tag{2.26}$$

Тепер наведене вище співвідношення доповнено рівнянням, яке демонструє зміну параметра пошкодження з часом для пояснення деформації матеріалу в умовах повзучості:

$$d\omega = \frac{d\omega}{dt} = C\left[\frac{\sigma_e}{1-\omega}\right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q}\,\omega^\beta \tag{2.27}$$

де $C = \mathrm{C(T)}$, $m = m(\mathrm{T})$, $q = q(\mathrm{T})$, $\beta = \beta(T)$ температурно-залежні константи матеріалу, які можна легко визначити за допомогою базових випробувань на повзучість, σ_e позначає еквівалентне напруження.

На основі роботи [64] найбільш узагальнений вигляд еквівалентного напруження (σ_e) при ізотропному накопиченні пошкоджень має такий вигляд:

$$\sigma_e = \alpha\sigma_1 + \beta I_1\left(\sigma_{ij}\right) + \gamma I_2\left(s_{ij}\right) \tag{2.28}$$

де α, β і γ – константи матеріалу, які задовольняють умові $\alpha+\beta+\gamma = 1$. До того ж, у рівнянні (2.28) $I_1(\sigma_{ij})$ і $I_2(s_{ij})$ є відповідно першим і другим інваріантами тензора σ_{ij} та девіатор напружень s_{ij}.

Отже, представлення пошкодженості у вигляді скалярної величини є найбільш поширеним методом у розрахунках [16, 30]. Таким чином, це дозволяє спростити аналіз та зосередитися на кількісному вираженні пошкоджень. Зауважимо, що використання наведених експериментальних даних про властивості матеріалів розширює можливості застосування скалярного параметра пошкоджуваності для чисельних досліджень.

Момент часу t*, в який рівняння (2.24) перевіряється в конкретній точці тіла, наведено нижче:

$$t^* = t(\omega = \omega^*),$$

Наприкінці кожного кроку розрахунку для всіх розглядуваних точок тіла проводиться оцінка виконання умови локального вичерпання несучої здатності:

$$\omega > \omega *, \tag{2.29}$$

де $\omega *$ – граничне значення основного параметра пошкодженості, яке фіксує стан при якому настає момент руйнування матеріалу,

$$\omega^* = 12$$

Отже, момент локальної втрати несучої здатності обчислює розрахунковий термін служби тіла за умов континуального руйнування. Таким чином, ці фізичні співвідношення дають змогу проілюструвати метод континуального руйнування та розрахувати термін служби просторових тіл за умов деформації повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу.

2.2 Виведення формул для розрахунку вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента зі змінними механічними та геометричними параметрами (СЕ1)

У цьому підрозділі буде розглянуто призматичний скінченний елемент з чотирикутним поперечним перерізом довільної форми для апроксимації відповідного класу об'єктів (як показано на рис. 2.2).

Центр елемента розміщується в початку координатної системи, а сторони чотирикутника орієнтуються вздовж осей X^1 і X^2 у свою чергу вісь X^3 перпендикулярна до площини перерізу. Таким чином, площа об'єкта в локальній системі координат можна інтерпретувати як паралелепіпед із одиничними розмірами поперечного перерізу та довжиною, що дорівнює двом одиницям.

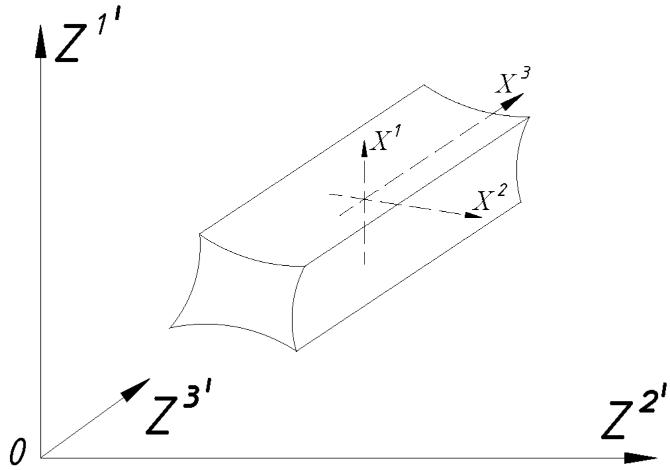


Рис. 2.2. Призматичний скінченний елемент із чотирикутним поперечним перерізом

Отже, не накладається жодних обмежень на розподіл як механічних, так і геометричних параметрів по площині поперечного перерізу наявного скінченного елемента. Таким чином, ці параметри обчислюються в певній кількості точок інтегрування X^i, розташованих у площині, де X^3 є постійною величиною, як показано на рис. 2.3.

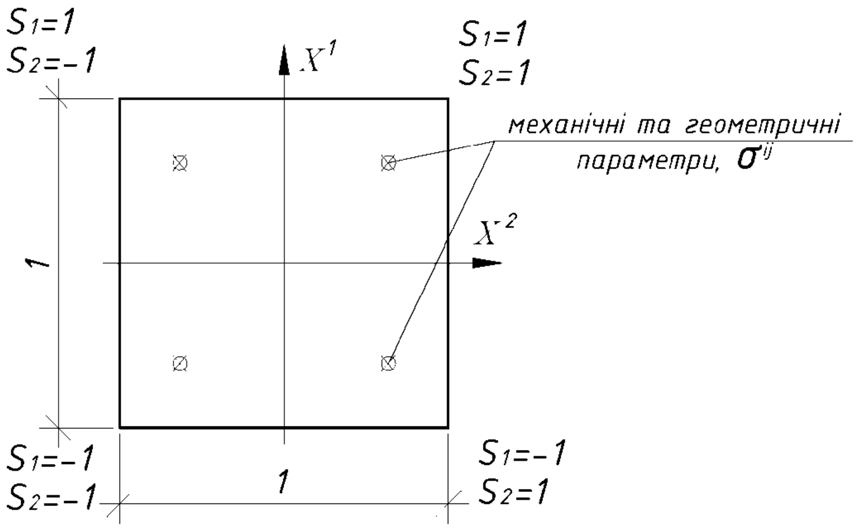


Рис. 2.3. Скінченний елемент, заданий у локальній системі координат по осях X^1 та X^2

Крім того, в цих точках обчислюються компоненти тензора напружень, які також обчислюються в точках інтегрування по осі X^3 (як показано на рис. 2.4).

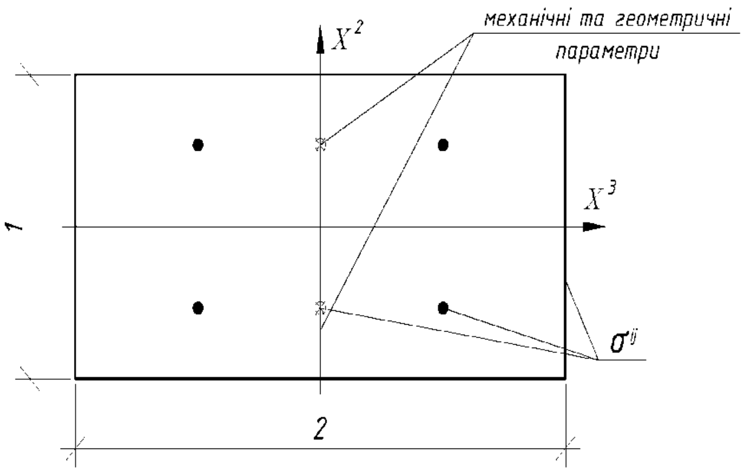


Рис. 2.4. Призматичний скінченний елемент у локальній системі координат X^2 та X^3

Далі переміщення виражається через компоненти ряду Фур'є в напрямку осі X^3:

$$U_{\alpha'} = \sum_{\ell=1}^{L} U_{\alpha'}^{\ell} \sin\frac{\ell\pi}{2}(X^3+1)$$

$$U_{3'} = \sum_{\ell=1}^{L} U_{3'}^{\ell} \cos\frac{\ell\pi}{2}(X^3+1)$$

і підпорядковуються білінійному закону розподілу в площині поперечного перерізу елемента, як показано нижче:

$$U_{n'} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} U_{n'(S_1,S_2)} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}S_1X^1 + \frac{1}{2}S_2X^2 + S_1S_2X^1X^2\right) \qquad (2.30)$$

де $U_{n'(S_1,S_2)}$ вузлові значення переміщень, які зображені в базовій системі координат $Z^{n'}$за їх компонентами, S_1 та S_2 подвоєні координати вузлів відносно осей X^1 та X^2за якими обчислюється їхнє положення в системі координат.

Використовуючи прийнятий закон розподілу переміщень стосовно методології скінченно-елементної моментної схеми [89-90], представимо деформації відрізками ряду Маклорена, як показано нижче:

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} X^{(3-\alpha)}$$

$$\varepsilon_{12} = \overset{0}{\varepsilon}_{12},$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \overset{0}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{0}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} X^{(3-\alpha)}, \qquad (2.31)$$

$$\varepsilon_{33} = \overset{0}{\varepsilon}_{33} + \overset{0}{\varepsilon}_{33,\alpha} X^{\alpha},$$

де ε_{ij}^{0} позначає коефіцієнти розкладання деформації в ряд Маклорена, які обчислюються за наступними формулами:

$$\overset{0}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\Big|_{x^{\alpha}=0},\ \overset{0}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial X^{\alpha}}\Big|_{x^{\alpha}=0}, (\alpha \neq i, j) \tag{2.32}$$

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\overset{0}{U}_{\gamma',\alpha} + \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}\overset{0}{U}_{\gamma',\alpha} + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\overset{0}{U}_{\gamma',12}\right)X^{(3-\alpha)},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1}\overset{0}{U}_{\gamma',2} + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2}\overset{0}{U}_{\gamma',1}\right) \tag{2.33}$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\overset{0}{U}_{\gamma',3} + \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\overset{0}{U}_{3',\alpha} + \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}\overset{0}{U}_{\gamma',3} + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\overset{0}{U}_{\gamma',3(3-\alpha)} + \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\overset{0}{U}_{3',12}\right)X^{(3-\alpha)}\right]$$

$$\varepsilon_{33} = \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(\overset{0}{U}_{3',3} + \overset{0}{U}_{3',3\alpha}X^{\alpha}\right),$$

де,

$$\overset{0}{Z}{}^{i'}_{,j} = \overset{0}{Z}{}^{i'}_{,j}\Big|_{X^{\alpha}=0},\ \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} = \frac{\partial Z^{\gamma'}_{,1}}{\partial X^{2}}\Big|_{X^{\alpha}=0} \tag{2.34}$$

$$\overset{0}{U}_{i',j} = U_{i',j}\big|_{X^{\alpha}=0}, \quad \overset{0}{U}_{i',j^{\alpha}} = \frac{\partial U_{i',j}}{\partial X^{\alpha}}\Big|_{X^{\alpha}=0} \tag{2.35}$$

На основі прийнятого закону розподілу переміщень (2.21) обчислимо їхні похідні в центрі елемента (2.26), як показано нижче:

$$\overset{0}{U}_{i',\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm 1}\sum_{S_2=\pm 1} U_{i'(S_1,S_2)}S_{\alpha}$$

$$\overset{0}{U}_{i',3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm 1}\sum_{S_2=\pm 1} U_{i'(S_1,S_2)}S_{3} \tag{2.36}$$

Отже, для компонент тензора деформації рівняння (2.24) набуває наступного вигляду:

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1}\sum_{S_2=\pm 1}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(\alpha)} + \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}S_{\alpha} + 2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_1S_2\right)X^{(3-\alpha)}.\,U_{\gamma'(S_1,S_2)}\right]$$

$$\varepsilon_{12}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2}S_1\right)U_{\gamma'(S_1,S_2)}$$

(2.37)

$$\varepsilon_{\alpha3}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left\{\frac{1}{8}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}+\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}+2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(3-\alpha)}\right)X^{(3-\alpha)}\right].U_{\gamma'(S_1,S_2),3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}+\left(S_\alpha+2S_1S_2X^{(3-\alpha)}\right)\right].U_{3'(S_1S_2)}\right\}$$
$$\varepsilon_{33}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}(1+2S_\alpha X^\alpha)U_{3'(S_1S_2),3}$$

(2.38)

Далі відрізки ряду Фур'є (2.20) використовуються для подання переміщень, а потім, виконавши необхідне диференціювання відносно осі X^3отримуємо:

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(\alpha)}+\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}S_\alpha+2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_1S_2\right)X^{(3-\alpha)}\right].$$
$$\mathrm{Sin}\frac{\ell\pi(X^3+1)}{2}U^{\ell}_{3'(S_1S_2)}$$
$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\ell=1}^{L}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2}S_1\right).\sin\frac{\ell\pi(X^3+1)}{2}U^{\ell}_{\gamma'(S_1S_2)}$$

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\ell=1}^{L}\left\{\frac{\ell\pi}{16}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}+\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}+2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(3-\alpha)}\right)X^{(3-\alpha)}\right].U^{\ell}_{\gamma'(S_1,S_2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(S_2+2S_1S_2X^{(3-\alpha)}\right)U^{\ell}_{3'(S_1,S_2)}\right\}\cdot\cos\frac{\ell\pi(X^3+1)}{2}$$
$$\varepsilon_{33}=\textstyle\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\ell=1}^{L}-\frac{\ell\pi}{8}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}(1+2S_\alpha X^\alpha)\sin\frac{\ell\pi(X^3+1)}{2}U^{\ell}_{3'(S_1,S_2)}x^3$$

(2.39)

Далі використовуємо вираз варіації енергії скінченного елемента для виведення формул для визначення коефіцієнтів матриці жорсткості та вузлових реакцій, як показано нижче:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta^{ij} \sigma \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \qquad (2.40)$$

У матричній формі рівняння (2.40) можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left(\sigma\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3\right) \qquad (2.41)$$

де,

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}2\varepsilon_{12}2\varepsilon_{13}2\varepsilon_{23}\} \\ \{\sigma\}^T &= \{\sigma^{11}\sigma^{22}\sigma^{33}\sigma^{12}\sigma^{13}\sigma^{23}\} \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Зв’язок між деформаціями та коефіцієнтами розкладання переміщень у ряд Фур’є наведено нижче:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{\ell=1}^{L} \left([B_1]_\ell \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} + [B_2]_\ell \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \{U\}_\ell \right) \qquad (2.43)$$

де,

$$[B_1]_\ell = \left[[B_1]_\ell^{(-1,-1)}[B_1]_\ell^{(+1,-1)}[B_1]_\ell^{(-1,+1)}[B_1]_\ell^{(+1,+1)}\right],$$

$$[B_2]_\ell = \left[[B_2]_\ell^{(-1,-1)}[B_2]_\ell^{(+1,-1)}[B_2]_\ell^{(-1,+1)}[B_2]_\ell^{(+1,+1)}\right],$$

$$\left\{\{U\}^T_{\ell(-1,-1)}\{U\}^T_{\ell(+1,-1)}\{U\}^T_{\ell(-1,+1)}\{U\}^T_{\ell(+1,+1)}\right\}$$

$$\{U\}^T_{\ell(S_1,S_2)}=\left\{U^T_{1'(S_1,S_2)}U^T_{2'(S_1,S_2)}U^T_{3'(S_1,S_2)}\right\}$$

Елементи підматриць $[B_1]_\ell^{(S_1,S_2)}$та $[B_2]_\ell^{(S_1,S_2)}$ визначаються за допомогою рівняння (2.39), які відповідно наведені нижче:

$$[B_1]_\ell^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_1+\\2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1S_2\end{pmatrix}x^2\right] & \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_1+\\2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1S_2\end{pmatrix}x^2\right] & 0\\
\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_2+\\2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1S_2\end{pmatrix}x^1\right] & \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_2+\\2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1S_2\end{pmatrix}x^1\right] & 0\\
0 & 0 & -\frac{\ell\pi}{8}\left[1+2\begin{pmatrix}2S_1X^1+\\S_2X^2\end{pmatrix}\right]\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\\
\frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\right) & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$[B_2]_\ell^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
-\frac{\ell\pi}{8}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}\ +\\2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2\end{pmatrix}x^2\right] & -\frac{\ell\pi}{8}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}\ +\\2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2\end{pmatrix}x^2\right] & \frac{1}{2}S_1\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\\
-\frac{\ell\pi}{8}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}\ +\\2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\end{pmatrix}x^1\right] & -\frac{\ell\pi}{8}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}\ +\\2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\end{pmatrix}x^1\right] & \frac{1}{2}S_2\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}
\end{bmatrix}$$

(2.44)

Запишемо варіаційний вираз енергії у формі, що включає коефіцієнти розкладу переміщень у ряди Фур'є $\{U\}_\ell$ та відповідні вузлові реакції $\{r\}_\ell$ для призматичного скінченого елемента:

$$\delta W = \sum_{\ell=1}^{L} \left(\delta \{U\}_\ell^T \right) \{r\}_\ell \tag{2.45}$$

де

$$\{r\}_\ell = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([B_1]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 + \right.$$

$$\left. + [B_2]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 \tag{2.46}$$

Отже, тепер рівняння (2.46) можна спростити, застосувавши чисельне інтегрування для отримання формули, яка дозволяє обчислити відповідні вузлові реакції для скінченного елемента призматичної форми зі змінними механіко геометричними параметрами (CE1) в поперечному перерізі, де $x^3 = const$ обумовлені напруженнями, таким чином, після спрощення отримуємо:

$$\{r\}_\ell = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \left[\left([B_1]_\ell^T \{\sigma_1\}_\ell + [B_2]_\ell^T \{\sigma_2\}_\ell \right) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)} \tag{2.47}$$

де *I, J* та M – кількість точок інтегрування відносно x^1, x^2 та x^3 відповідно. Крім того, у виразі (2.47) H_i та H_j є ваговими функціями, x_i^1 та x_j^2 координати точок інтегрування, що визначаються на основі формул гармонійного аналізу. Таким чином, ці координати дозволяють точніше виконати обчислення, забезпечуючи узгодженість з параметрами елемента.

$$\{\sigma_1\}_\ell = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(\{\sigma\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \right)_m$$

$$\{\sigma_2\}_\ell = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(\{\sigma\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \right)_m \tag{2.48}$$

Значення фізичного напруження $\{\sigma_1\}$ та $\{\sigma_2\}$ визначаються в M рівномірно розташованих точках елемента по його довжині. У свою чергу не накладається жодних обмежень на характер їх розподілу в напрямку x^3 , що дозволяє використовувати рівняння (2.47) для розрахунку вузлових реакцій не тільки під час пружної фази поведінки матеріалу, але й за межею пружності, враховуючи зменшення напружень при прийнятій умові текучості.

Далі формули для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості виводяться з урахуванням взаємозв'язку між напруженнями і деформаціями, що базується на узагальненому законі Гука. Таким чином, отримані співвідношення дозволяють врахувати вплив матеріальних властивостей на деформований стан елемента.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \qquad (2.49)$$

Тут елементи матриці $[D]$ визначаються за допомогою рівняння (2.12).

$$[D] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & 0 & 0 \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & 0 & 0 \\ C^{3311} & C^{3322} & C^{3333} & C^{3312} & 0 & 0 \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1233} & C^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1313} & C^{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2313} & C^{2323} \end{bmatrix}$$

Тепер, підставивши значення з рівняння (2.49) у вираз (2.31), отримаємо:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3 \qquad (2.50)$$

Отже, відповідно до співвідношення в рівнянні (2.43), зміна енергії скінченного елемента через коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є за переміщеннями виражається таким чином:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{\ell=1}^{L} \left(\delta\{U\}^T\right)[B_1]_\ell^T \sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} +.$$

$$+[B_2]_\ell^T \cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}[D]\sum_{n=1}^{L}\left([B_1]_{(n)}\sin\frac{n\pi(x^3+1)}{2}+\right.$$

$$\left.+[B]_{(n)}\cos\frac{n\pi(x^3+1)}{2}\right)\{U\}_n\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3$$

(2.51)

З огляду на наступне:

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\sin\frac{n\pi(x^3+1)}{2}dx^3 = \begin{cases}0\text{при} & \ell \neq n\\ 1\text{при} & \ell = n\end{cases}$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\cos\frac{n\pi(x^3+1)}{2}dx^3 = \begin{cases}0\text{при} & \ell \neq n\\ 1\text{при} & \ell = n\end{cases}$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\cos\frac{n\pi(x^3+1)}{2}dx^3 = 0 \qquad (2.52)$$

і, спростивши інтегрування в рівняння (2.51), отримаємо:

$$\delta W = \sum_{\ell=1}^{L}\left(\delta\{U\}_\ell^T\right)[K]_{\ell(\ell)}\{U\}_\ell$$

де $[K]_{\ell(\ell)}$ - матриця жорсткості :

$$[K]_{\ell(\ell)} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\left([B_1]_\ell^T + [B_2]_\ell^T\right)[D]([B_1]_\ell + [B_2]_\ell)\sqrt{g}dx^1dx^2$$

(2.53)

Аналогічно, шляхом чисельного інтегрування x^1 та x^2отримано:

$$[K]_{\ell(\ell)} = \int_{i=1}^{I} \int_{j=1}^{J} \Big[\big([B_1]_\ell^T + [B_2]_\ell^T\big)[D]([B_1]_\ell + [B_2]_\ell)\sqrt{g} H_i H_j\Big]_{x_i^1 x_j^2} \tag{2.54}$$

формулу для визначення коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента складної призматичної форми зі змінними механічними та геометричними характеристиками (СЕ1).

2.3 Виведення формул для розрахунку вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента з усередненими механічними та геометричними параметрами (СЕ2)

У цьому розділі висунуте припущення, що компоненти тензора пружних сталих і визначника матриці, складеної з компоне нтів метричного тензора, змінюються незначно в межах поперечного перерізу скінченного елемента компоненти тензора пружних сталих і визначника матриці зазнають незначних варіацій, тоді як у центрі вони набувають номінальних значень (як показано на рис. 2.5). Відтак, отримуємо наступний вираз:

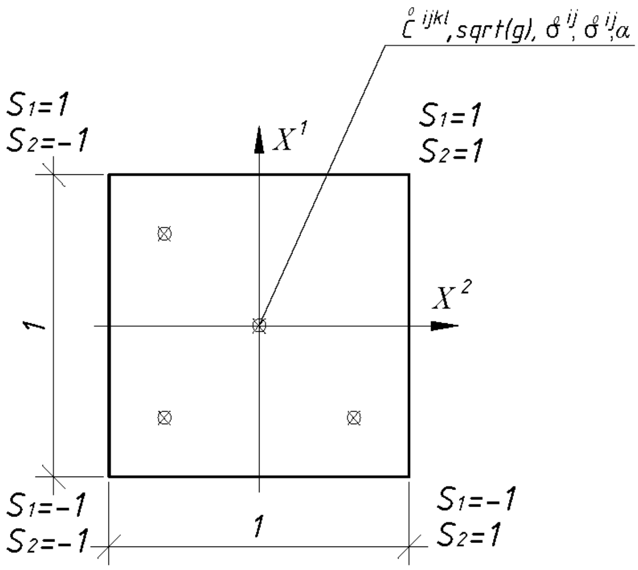


Рис. 2.5. Поперечний переріз скінченного елемента

$$C^{ijk\ell} = C^{ijk\ell} = C^{ijk\ell}\big|_{x^{\alpha}=0}, g = \overset{0}{g} = g|_{x^{\alpha}=0} \qquad (2.55)$$

Тепер візьмемо наступні рівняння як вихідні дані:

$$\overset{0}{\sigma}{}^{11} = \overset{0}{C}{}^{11ij} g \overset{0}{\varepsilon}_{i,j}$$

$$\overset{0}{\sigma}{}^{11}_{,2} = \overset{0}{C}{}^{1111}\ \varepsilon^{0}_{11,2} + \overset{0}{C}{}^{1113}\ \varepsilon^{0}_{13,2} + \overset{0}{C}{}^{1133}\ \varepsilon^{0}_{33,2} \qquad (2.56)$$

$$\overset{0}{\sigma}{}^{11}_{,1} = \overset{0}{C}{}^{1122}\ \varepsilon^{0}_{22,1} + \overset{0}{C}{}^{1123}\ \varepsilon^{0}_{23,1} + \overset{0}{C}{}^{1133}\ \varepsilon^{0}_{33,1}$$

Потім, отримуємо

$$\sigma^{11} = \overset{0}{\sigma}{}^{11} + \overset{0}{\sigma}{}^{11}_{,2} X^{2} + \overset{0}{\sigma}{}^{11}_{,1} X^{1} \qquad (2.57)$$

Далі, застосовуючи аналогічний процес для обчислення інших компонент і нехтуючи членами $\sigma^{i\alpha}_{,\alpha}$ які не змінюють енергію деформації елемента, описуємо напруження як компонент ряду Маклорена, як зазначено в рівнянні (2.22):

$$\begin{gathered}
\sigma^{\alpha(\alpha)} = \overset{0}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{0}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} X^{(3-\alpha)} \\
\sigma^{12} = \overset{0}{\sigma}{}^{12} \\
\sigma^{\alpha 3} = \overset{0}{\sigma}{}^{\alpha 3} + \overset{0}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} X^{(3-\alpha)} \\
\sigma^{33} = \overset{0}{\sigma}{}^{33} + \overset{0}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha} X^{\alpha}
\end{gathered} \qquad (2.58)$$

де коефіцієнти розкладу $\overset{0}{\sigma}{}^{ij}$ та $\overset{0}{\sigma}{}^{ij}_{,\alpha}$ обчислюються у певній кількості точок інтегрування вздовж осі $Z^{3'}$ (Рис. 2.6).

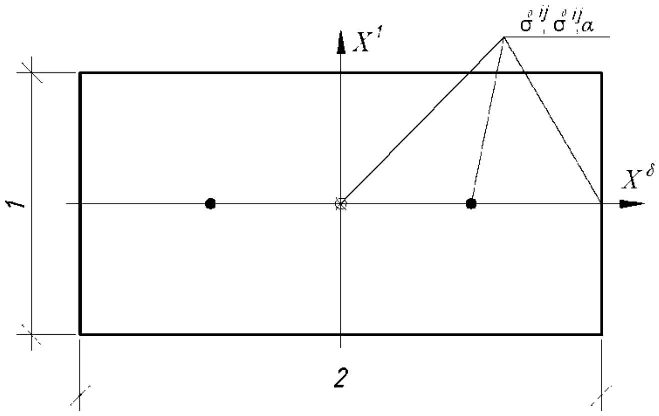


Рис. 2.6. Точки інтегрування вздовж осі $Z^{3'}$

Виразимо коефіцієнти розкладу деформацій, зазначені в рівнянні (2.23), через переміщення відповідно до формули (2.10):

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} U^{0}_{\gamma',\alpha} \;, \overset{0}{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1} U^{0}_{\gamma',2} + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2} U^{0}_{\gamma',1} \right)$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} U^{0}_{\gamma',3} + \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} U^{0}_{3',\alpha} \right), \;\; \overset{0}{\varepsilon}_{33} = \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} U^{0}_{3',3}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} U^{0}_{\gamma',\alpha} + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} U^{0}_{\gamma',12}, \tag{2.59}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} U^{0}_{\gamma',3} + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} U^{0}_{\gamma',3(3-\alpha)} + \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} U^{0}_{3',12} \right)$$

$$\varepsilon^{0}_{33,\alpha} = \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} U^{0}_{3',3\alpha}$$

У наступному рівнянні переміщення виражаються у вигляді їхніх вузлових значень на основі співвідношень у рівнянні (2.59):

$$\varepsilon^{0}_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{2} \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} S_{(\alpha)} U_{\gamma'(S_1,S_2)}$$

$$\varepsilon^{0}_{12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1} S_2 \quad + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2} S_1 \right) U_{\gamma'(S_1,S_2)}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{8}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} U_{\gamma'(S_1,S_2),3} + 2\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} S_2 U_{3'(S_1,S_2)} \right)$$

$$\varepsilon^{0}_{33} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{4} \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} U_{3'(S_1,S_2),3}$$

$$\tag{2.60}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} S_2 + 2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} S_1 S_2 \right) U_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\varepsilon^{0}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left\{ \frac{1}{8} \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} \right) U_{\gamma'(S_1,S_2),3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} Z^{3'}_{,3} S_1 S_2 U_{3'(S_1,S_2)} \right\}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{2} \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} S_\alpha U_{3'(S_1,S_2),3}$$

Змінюючи амплітудні значення вузлових зміщень, отримаємо:

$$\varepsilon^{0}_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2} \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} S_{(\alpha)} \sin \frac{i\pi (X^3+1)}{2} U^{l}{}_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\varepsilon^{0}_{12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{4} \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1} \; S_2 + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2} \; S_1 \right) \sin \frac{i\pi (X^3+1)}{2} U^{l}{}_{\gamma'(S_1,S_2)}$$

$$\varepsilon^{0}_{\alpha 3} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=1}^{L} \left(\frac{\iota\pi}{16} \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} U^{l}{}_{\gamma'(S_1,S_2)} + \frac{1}{4} Z^{3'}_{,3} S_\alpha U^{l}{}_{3'(S_1,S_2)} \right) \cos \frac{\iota\pi (X^3+1)}{2}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=1}^{L} -\frac{i\pi}{8} \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} \sin \frac{i\pi (X^3+1)}{2} U^{l}{}_{3'(S_1,S_2)} \qquad (2.61)$$

$$\varepsilon^{0}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2} \left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} S_\alpha + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} S_1 S_2 . \sin \frac{i\pi (X^3+1)}{2} U^{l}_{\gamma'(S_1,S_2)} \right]$$

$$\varepsilon^{0}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\iota\pi}{16} \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} \right) U^{l}_{\gamma'(S_1,S_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} S_1 S_2 U^{l}_{3'(S_1,S_2)} \right] \cos \frac{\iota\pi (X^3+1)}{2}$$

$$\varepsilon^{0}_{33,\alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=1}^{L} -\frac{\iota\pi}{4} \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} S_2 U^{l}_{3'(S_1,S_2)} \sin \frac{\iota\pi (X^3+1)}{2}$$

Тепер опишемо напруження та деформації відрізками ряду Маклорена у виразі варіацій енергії скінченного елемента (див. рівняння 2.30):

$$\delta W=\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left(\left(\overset{0}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}+\overset{0}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}X^{(3-\alpha)}\right)\sigma.\left(\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}+\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}X^{(3-\alpha)}\right)\right.$$
$$+2\sigma^{12}\delta\overset{0}{\varepsilon}_{12}+\left(\overset{0}{\sigma}{}^{\alpha3}+\overset{0}{\sigma}{}^{\alpha3}_{,(3-\alpha)}X^{(3-\alpha)}\right)\sigma.\left(\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha3}+\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha3,(3-\alpha)}X^{(3-\alpha)}\right)$$
$$\left.+\left(\overset{0}{\sigma}{}^{33}+\overset{0}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha}X^{\alpha}\right)\delta.\left(\overset{0}{\varepsilon}_{33}+\overset{0}{\varepsilon}_{33,\beta}X^{\beta}\right)\right)\sqrt{\overset{0}{g}}dx^1dx^2dx^3$$

(2.62)

У рівнянні (2.62) спростимо інтегрування за допомогою X^1 і X^2 у замкненій формі, як показано нижче:

$$\int_{X^1=-\frac{1}{2}}^{X^1=\frac{1}{2}}\int_{X^2=-\frac{1}{2}}^{X^2=\frac{1}{2}}dx^1dx^2=1\,,$$
$$\int_{X^1=-\frac{1}{2}}^{X^1=\frac{1}{2}}\int_{X^2=-\frac{1}{2}}^{X^2=\frac{1}{2}}x^{\alpha}dx^1dx^2=0\,,$$
$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}x^{\alpha}x^{\beta}dx^1dx^2=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta\\ \frac{1}{12}, & \alpha=\beta\end{cases} \qquad (2.63)$$

яка забезпечує наступну варіацію скінченно-елементних коефіцієнтів розкладу за енергією, напруженням та деформацією, як показано нижче:

$$\delta W=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}[\overset{0}{\sigma}{}^{iI}\delta\overset{0}{\varepsilon}_{iI}+\frac{1}{12}\left(\overset{0}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\delta\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}+\right.$$
$$\left.+\overset{0}{\sigma}{}^{\alpha3}_{,(3-\alpha)}\delta\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha3,(3-\alpha)}+\overset{0}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha}\delta\overset{0}{\varepsilon}_{33,\alpha}\right)]\sqrt{\overset{0}{g}}dx^3 \qquad (2.64)$$

Матрична форма наведеного вище рівняння (2.64) має вигляд:

$$\delta W=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\}^T\right)\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}+\frac{1}{12}\left[\left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\}\right)\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\}\right)\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\right\}\sqrt{\overset{0}{g}}dx^3 \qquad (2.65)$$

де

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\}^T=\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{11}\ \overset{0}{\varepsilon}_{22}\ \overset{0}{\varepsilon}_{33}\ 2\overset{0}{\varepsilon}_{12}\ 2\overset{0}{\varepsilon}_{13}\ \ 2\overset{0}{\varepsilon}_{23}\right\},$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\}^T=\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{22,1}\ \ \overset{0}{\varepsilon}_{33,1}\ \ 2\overset{0}{\varepsilon}_{23,1}\right\},$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\}^T=\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{11,2}\ \ \overset{0}{\varepsilon}_{33,2}\ \ 2\overset{0}{\varepsilon}_{13,2}\right\},$$

$$\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}^T=\left\{\overset{0}{\sigma}{}^{11}\ \overset{0}{\sigma}{}^{22}\ \overset{0}{\sigma}{}^{33}\ \overset{0}{\sigma}{}^{12}\ \overset{0}{\sigma}{}^{13}\ \overset{0}{\sigma}{}^{23}\right\},$$

$$\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}=\left\{\overset{0}{\sigma}{}^{22}_{,1}\ \ \overset{0}{\sigma}{}^{33}_{,1}\ \ \overset{0}{\sigma}{}^{23}_{,1}\right\},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{,2}=\left\{\overset{0}{\sigma}{}^{11}_{,2}\ \ \overset{0}{\sigma}{}^{33}_{,2}\ \ \overset{0}{\sigma}{}^{13}_{,2}\right\}. \qquad (2.66)$$

Взаємозв’язок між коефіцієнтами розкладу зсувів у ряд Фур’є та коефіцієнтами розкладу деформацій у ряд Маклорена обчислюється за наступними виразами:

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\}=\sum_{\ell=1}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_1\right]_\ell\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}+\left[\overset{0}{B}_2\right]_\ell\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)\{U\}_\ell$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\}=\sum_{\ell=1}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]_\ell\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}+\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]_\ell\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)\{U\}_\ell$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\}=\sum_{\ell=1}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]_\ell\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}+\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]_\ell\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)\{U\}_\ell \qquad (2.67)$$

де

$$\begin{bmatrix}0\\B_1\end{bmatrix}_\ell=\left[\left[\begin{bmatrix}0\\B_1\end{bmatrix}_\ell^{(-1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_1\end{bmatrix}_\ell^{(+1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_1\end{bmatrix}_\ell^{(-1,+1)}\begin{bmatrix}0\\B_1\end{bmatrix}_\ell^{(+1,+1)}\right]\right],$$
$$\begin{bmatrix}0\\B_2\end{bmatrix}_\ell=\left[\begin{bmatrix}0\\B_2\end{bmatrix}_\ell^{(-1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_2\end{bmatrix}_\ell^{(+1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_2\end{bmatrix}_\ell^{(-1,+1)}\begin{bmatrix}0\\B_2\end{bmatrix}_\ell^{(+1,+1)}\right],$$
$$\begin{bmatrix}0\\B_{1,1}\end{bmatrix}_\ell=\left[\begin{bmatrix}0\\B_{1,1}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{1,1}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{1,1}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,+1)}\begin{bmatrix}0\\B_{1,1}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,+1)}\right],$$
$$\begin{bmatrix}0\\B_{2,1}\end{bmatrix}_\ell=\left[\begin{bmatrix}0\\B_{2,1}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{2,1}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{2,1}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,+1)}\begin{bmatrix}0\\B_{2,1}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,+1)}\right],$$
$$\begin{bmatrix}0\\B_{1,2}\end{bmatrix}_\ell=\left[\begin{bmatrix}0\\B_{1,2}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{1,2}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{1,2}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,+1)}\begin{bmatrix}0\\B_{1,2}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,+1)}\right],$$
$$\begin{bmatrix}0\\B_{2,2}\end{bmatrix}_\ell=\left[\begin{bmatrix}0\\B_{2,2}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{2,2}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,-1)}\begin{bmatrix}0\\B_{2,2}\end{bmatrix}_\ell^{(-1,+1)}\begin{bmatrix}0\\B_{2,2}\end{bmatrix}_\ell^{(+1,+1)}\right].$$
(2.68)

Елементи підматриць $\left[\overset{0}{B_1}\right]_\ell^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{0}{B_2}\right]_\ell^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]_\ell^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]_\ell^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]_\ell^{(S_1,S_2)}$, та $\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]_\ell^{(S_1,S_2)}$ обчислюються відносно виразів (2.52) і відповідно представлені нижче:

$$\begin{bmatrix}0\\B_1\end{bmatrix}_\ell^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}\;S_1 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}\;S_1 & 0\\ \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}\;S_2 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}\;S_2 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{8}\ell\pi\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\\ \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}\;S_2+\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}\;S_1\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}\;S_2+\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}\;S_1\right) & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}_{\ell}^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8}\ell\pi \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1} & \frac{1}{8}\ell\pi \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1} & \frac{1}{2} S_1 \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,1} \\ \frac{1}{8}\ell\pi \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2} & \frac{1}{8}\ell\pi \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2} & \frac{1}{2} S_2 \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_{1,1} \end{bmatrix}^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12} S_2 \ + \\ 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2} \ S_1 S_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12} S_2 \ + \\ 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2} \ S_1 S_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\ell\pi \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} S_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_{2,1} \end{bmatrix}^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8}\ell\pi\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2} \ S_1\right) & \frac{1}{8}\ell\pi\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2} \ S_1\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_{1,2} \end{bmatrix}^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12} S_1 \ + \\ 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1} \ S_1 S_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12} S_1 \ + \\ 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1} \ S_1 S_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\ell\pi \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} S_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_{2,2} \end{bmatrix}^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8}\ell\pi\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1} \ S_2\right) & \frac{1}{8}\ell\pi\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1} \ S_2\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Тепер зміна енергії буде переписана з використанням коефіцієнтів розкладу за переміщеннями в ряд Фур’є та вузлових реакцій скінченного елемента$\left\{\overset{0}{r}\right\}$, що має наступний вигляд:

$$\delta W = \sum_{\ell=1}^{L} \left(\delta \{U\}_\ell^T \left\{ \overset{0}{r} \right\}_\ell \right) \tag{2.70}$$

де

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{0}{r} \right\}_\ell = & \left[\left[\overset{0}{B_1} \right]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{0}{\sigma} \right\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 + \right. \\
& + \left[\overset{0}{B_2} \right]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{0}{\sigma} \right\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 \\
& + \frac{1}{12} \left(\left[\overset{0}{B_{1,1}} \right]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{0}{\sigma_{,1}} \right\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 + \right. \\
& + \left[\overset{0}{B_{2,1}} \right]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \sigma_{,1} \right\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 + \\
& + \left[\overset{0}{B_{1,2}} \right]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{0}{\sigma_{,2}} \right\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 + \\
& \left. \left. + \left[\overset{0}{B_{2,2}} \right]_\ell^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \sigma_{,2} \right\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 \right) \right] \sqrt{\overset{0}{g}}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Використовуючи формули гармонічного аналізу, застосуємо інтегрування за x^3 чисельно в рівняння (2.70), і отримаємо наступні вирази:

$$\left\{ \overset{0}{\sigma_1} \right\}_\ell = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(\left(\left\{ \overset{0}{\sigma} \right\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \right) \right)_m,$$

$$\left\{ \overset{0}{\sigma_2} \right\}_\ell = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(\left\{ \overset{0}{\sigma} \right\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \right)_m,$$

$$\left\{ \overset{0}{\sigma_{1,1}} \right\}_\ell = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(\left\{ \overset{0}{\sigma_{,1}} \right\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \right)_m,$$

$$\left\{\overset{0}{\sigma}_{2,1}\right\}_{\ell} = \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)_m,$$

$$\left\{\overset{0}{\sigma}_{1,2}\right\}_{\ell} = \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)_m,$$

$$\left\{\overset{0}{\sigma}_{2,2}\right\}_{\ell} = \tfrac{2}{M}\textstyle\sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\cos\tfrac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)_m, \tag{2.71}$$

Далі наводиться формула для розрахунку вузлових реакцій призматичного скінченного елемента з усередненими механічними та геометричними параметрами (СЕ2) за допомогою коефіцієнтів розкладання напружень в ряд Маклорена:

$$\left\{\overset{0}{r}\right\}_{\ell} = \left[\left[\overset{0}{B}_1\right]_{\ell}^{T}\left\{\overset{0}{\sigma}_1\right\}_{\ell} + \left[\overset{0}{B}_2\right]_{\ell}^{T}\left\{\overset{0}{\sigma}_2\right\}_{\ell} + \frac{1}{12}\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]_{\ell}^{T}\left\{\overset{0}{\sigma}_{1,1}\right\}_{\ell} + \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]_{\ell}^{T}\left\{\overset{0}{\sigma}_{2,1}\right\}_{\ell} + \right.$$
$$\left. + \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]_{\ell}^{T}\left\{\overset{0}{\sigma}_{1,2}\right\}_{\ell}\left(+ \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]_{\ell}^{T}\left\{\overset{0}{\sigma}_{2,2}\right\}_{\ell}\right)\right]\sqrt{\overset{0}{g}} \tag{2.72}$$

Закон Гука для коефіцієнтів розкладання напружень у матричній формі має наступний вигляд:

$$\left\{\overset{0}{\sigma}\right\} = \left[\overset{0}{D}\right]\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\},$$

$$\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\} = \left[\overset{0}{D}_1\right]\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\}, \tag{2.73}$$

$$\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\} = \left[\overset{0}{D}_2\right]\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\}$$

де матриці $\left[\overset{0}{D}\right]$, $\left[\overset{0}{D}_1\right]$, та $\left[\overset{0}{D}_2\right]$ надаються наступним чином:

$$\left[\overset{0}{D}\right] = \begin{bmatrix} \overset{0}{C}{}^{1111} & \overset{0}{C}{}^{1122} & \overset{0}{C}{}^{1133} & \overset{0}{C}{}^{1112} & 0 & 0 \\ \overset{0}{C}{}^{2211} & \overset{0}{C}{}^{2222} & \overset{0}{C}{}^{2233} & \overset{0}{C}{}^{2212} & 0 & 0 \\ \overset{0}{C}{}^{3311} & \overset{0}{C}{}^{3322} & \overset{0}{C}{}^{3333} & \overset{0}{C}{}^{3312} & 0 & 0 \\ \overset{0}{C}{}^{1211} & \overset{0}{C}{}^{1222} & \overset{0}{C}{}^{1233} & \overset{0}{C}{}^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{0}{C}{}^{1313} & \overset{0}{C}{}^{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{0}{C}{}^{2313} & \overset{0}{C}{}^{2323} \end{bmatrix}$$

$$\left[\overset{0}{D}_1\right] = \begin{bmatrix} \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{2222} & \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{2233} & 0 \\ \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{3322} & \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{3333} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{2323} \end{bmatrix}$$

$$\left[\overset{0}{D}_2\right] = \begin{bmatrix} \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{1111} & \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{1133} & 0 \\ \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{3311} & \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{3333} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{\mathrm{C}}{}^{1313} \end{bmatrix}$$

Напруження в термінах деформацій виражаються за допомогою рівняння (2.65), як показано нижче:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{0}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left[\overset{0}{D} \right] \left\{ \overset{0}{\varepsilon} \right\} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{0}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right) \left[\overset{0}{D}_1 \right] \left\{ \overset{0}{\varepsilon}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{0}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right) \left[\overset{0}{D}_1 \right] \left\{ \overset{0}{\varepsilon}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{\overset{0}{g}}\, dx^3$$

(2.73)

і деформації, зумовлені переміщеннями, описуються формулами (2.67) наступним чином:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \sum_{\ell=1}^{L} \left(\delta \{U\}_\ell^T \right) \left(\left[\overset{0}{B}_1 \right]_{(\ell)}^T \sin \frac{\ell \pi (x^3 + 1)}{2} + \right. \right.$$

$$+\left[\overset{0}{B}_2\right]^T_{(\ell)}\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\left[\overset{0}{D}\right]\sum_{n=1}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_1\right]_{(n)}\sin\frac{\eta\pi(x^3+1)}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[\overset{0}{B}_2\right]_{(n)}\cos\frac{\eta\pi(x^3+1)}{2}\right)\{U\}_n+$$

$$+\frac{1}{12}\left[\sum_{\ell=1}^{L}\left(\delta\{U\}^T_\ell\right)\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^T_{(\ell)}\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}+\right.\right.$$

$$\left.+\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^T_{(\ell)}\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)\left[\overset{0}{D}_1\right]\sum_{n=1}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]_{(n)}\sin\frac{\eta\pi(x^3+1)}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]_{(n)}\cos\frac{\eta\pi(x^3+1)}{2}\right)\{U\}_n+\sum_{\ell=1}^{L}\left(\delta\{U\}^T_\ell\right)\left(\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^T_{(\ell)}\sin\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T_{(\ell)}\cos\frac{\ell\pi(x^3+1)}{2}\right)\left[\overset{0}{D}_2\right]\sum_{n=1}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]_{(n)}\sin\frac{\eta\pi(x^3+1)}{2}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T_{(n)}\cos\frac{\eta\pi(x^3+1)}{2}\{U\}_n\right]\right\}\sqrt{\overset{0}{g}}\,dx^3 \qquad (2.74)$$

Розглядаючи вираз (2.52) та інтегруючи його по x^3 у замкненій формі, отримаємо наступне рівняння для варіації енергії:

$$\delta W=\sum_{\ell=1}^{L}\left(\delta\{U\}^T_\ell\left[\overset{0}{K}\right]_{\ell(\ell)}\{U\}_\ell\right) \qquad (2.75)$$

звідси

$$\left[\overset{0}{K}\right]_{\ell(\ell)}=\left\{\left(\left[\overset{0}{B}_1\right]^T_\ell+\left[\overset{0}{B}_2\right]^T_\ell\right)[D]\left(\left[\overset{0}{B}_1\right]_\ell+\left[\overset{0}{B}_2\right]_\ell\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{12}\left[\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^T_\ell+\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^T_\ell\right)\left[\overset{0}{D}_1\right]\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]_\ell+\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]_\ell\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^T_\ell+\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T_\ell\right)\left[\overset{0}{D}_2\right]\left(\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]_\ell+\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]_\ell\right)\right]\right\}\int\sqrt{\overset{0}{g}} \qquad (2.76)$$

тут коефіцієнти матриці жорсткості $\left[\overset{0}{K}\right]_{\ell(\ell)}$ - призматичного скінченного елемента з усередненими механічними та геометричними параметрами (СЕ2).

Висновки розділу 2

Використання НМСЕ із застосуванням рядів Фур’є та поліномів є ключовим інструментом для оцінювання ефективності методу скінченних елементів (МСЕ) у розрахунках із змінними та усередненими параметрами, а також для аналізу збіжності отриманих результатів. У цьому розділі представлені універсальні рівняння скінченних елементів, які спрощують розрахунки масивних і тонкостінних призматичних тіл складних форм із довільним навантаженням, враховуючи пластичні властивості матеріалів. Запропоновані модифікації для призматичних скінченних елементів значно підвищують здатність алгоритмів аналізувати напружено-деформований стан об’ємних тіл зі змінними та усередненими параметрами, забезпечуючи досягнення оптимальних результатів із мінімальною кількістю обчислень.

У розділі також проаналізовано проблеми, пов’язані з інтегруванням для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості. Варіант НМСЕ, який використовує ряди Фур’є, демонструє високу ефективність, проте має обмеження у застосуванні до граничних умов, що залежать від конкретного типу опор. Натомість представлення переміщень на основі поліномів значно розширює спектр можливих граничних умов, підвищуючи універсальність методу.

Отримані результати для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості та вузлових реакцій скінченних елементів підтверджують можливість розв’язання широкого спектру задач. Загалом, представлена методика робить вагомий внесок у створення надійної основи для розрахунку напружено-деформованого стану просторових конструктивних елементів, підданих довільно розподіленим навантаженням.

.

РОЗДІЛ 3
ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПОЛІНОМАМИ

У попередньому розділі представлено удосконалену реалізацію напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ), призначену для моделювання напружено-деформованого стану призматичних тіл із використанням тригонометричних рядів Фур'є як системи координатних функцій. Застосування тригонометричних рядів забезпечує високу ефективність НМСЕ, проте на торцях тіла можна задовольнити лише граничні умови, що відповідають опорам на абсолютно жорстку в своїй площині та гнучку діафрагму (рис.3.1.). У цьому розділі сформульовано розв'язувальні співвідношення, що ґрунтуються на поліноміальному представленні функцій переміщень. Такий підхід дозволяє значно розширити спектр граничних умов, які можна задати на торцях тіла. За таких умов не вбачається можливим звести розв'язання початкової просторової крайової задачі до системи незалежних двовимірних задач, що зумовлює особливу важливість обґрунтованого вибору системи поліноміальних функцій, які використовуються для апроксимації переміщень у напрямку довжини призматичного тіла. Раціональний вибір поліномів визначає обумовленість матриці рівнянь, що впливає на збіжність чисельного розв'язання, а також забезпечує гнучкість методу щодо задання різноманітних граничних умов на торцевих поверхнях тіла.

3.1. Виведення формул для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента зі змінними механічними і геометричними параметрами

Представимо переміщення у вигляді розкладання по поліномах

$$U_{n'} = \sum_{\iota=0}^{L} \bar{U}_{n'}^{\iota}\, \varphi^{(\iota)}, \tag{3.1}$$

де $\varphi^{(\iota)}$ – поліноми степені ι; $\bar{U}^{\iota}_{n'}$ – коефіцієнти розкладання переміщень по $\varphi^{(\iota)}$.

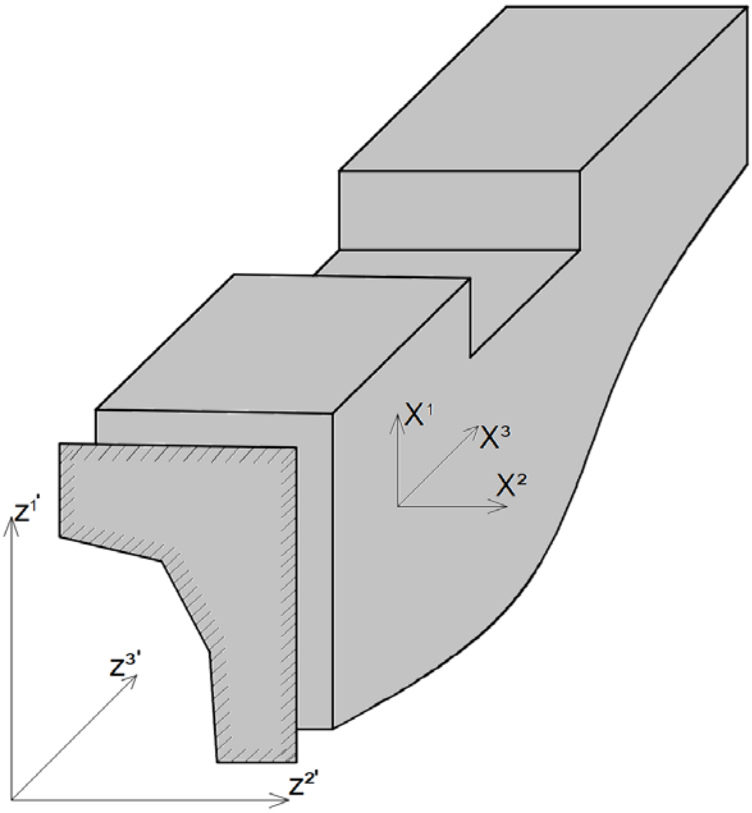


Рис. 2.1. Призматичне тіло складної форми

Представимо у формулі (2.39) переміщення у вигляді поліноміального розкладу відповідно до виразу (3.1):

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(\alpha)} + \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}S_{(\alpha)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. +2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_1S_2\right)x^{(3-\alpha)}\right]\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)},$$
$$\varepsilon_{12} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1}S_2 + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2}S_1\right)\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)}, \qquad (3.2)$$
$$\varepsilon_{\alpha3} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\left\{\frac{1}{8}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(3-\alpha)}\right)x^{(3-\alpha)}\right]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\varphi^{(\iota)}_{,3}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)} + \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(S_\alpha + 2S_1S_2x^{(3-\alpha)}\right)\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{3'(S_1,S_2)}\right\},$$

$$\varepsilon_{33} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{4} \overset{0}{Z}{}_{,3}^{3'} (1 + 2S_\alpha x^\alpha) \varphi_{,3}^{(\iota)} \bar{U}_{3'(S_1,S_2)}^{\iota},$$

де

$$\varphi_{,3}^{(\iota)} = \frac{d\varphi^{(\iota)}}{dx^3} \tag{3.3}$$

Деформації подамо через коефіцієнти поліноміального розкладу переміщень, що забезпечує представлення для подальшого формування розв'язувальних співвідношень:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{\iota=0}^{L} \left(\left[\bar{B}_1\right] \varphi^{(\iota)} + \left[\bar{B}_2\right] \varphi_{,3}^{(\iota)} \right) \left\{\bar{U}\right\}_\iota \tag{3.4}$$

де

$$\left[\bar{B}_1\right] = \left[\left[\bar{B}_1\right]^{(-1,-1)} \left[\bar{B}_1\right]^{(+1,-1)} \left[\bar{B}_1\right]^{(-1,+1)} \left[\bar{B}_1\right]^{(+1,+1)} \right],$$

$$\left[\bar{B}_2\right] = \left[\left[\bar{B}_2\right]^{(-1,-1)} \left[\bar{B}_2\right]^{(+1,-1)} \left[\bar{B}_2\right]^{(-1,+1)} \left[\bar{B}_2\right]^{(+1,+1)} \right] \tag{3.5}$$

Елементи підматриць $\left[\bar{B}_1\right]^{(S_1,S_2)}$ і $\left[\bar{B}_2\right]^{(S_1,S_2)}$ обчислюються згідно (3.2) та наведені у таблицях 3.1 та 3.2. відповідно.

Підставляючи (3.4) в (2.31), подамо вираз варіації повної енергії системи через коефіцієнти поліноміального розкладу переміщень та відповідні вузлові реакції у вигляді: $\{\bar{r}\}$ скінченого елемента:

$$\delta W = \sum_{\iota=0}^{L} \left(\delta \left\{\bar{U}\right\}_\iota^T \right) \left\{\bar{r}\right\}_\iota \tag{3.6}$$

де

$$\left\{\bar{r}\right\}_{\iota} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\left(\left[\bar{B_1}\right]^T\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\{\sigma\}\varphi^{(\iota)}dx^3 + \right.$$

$$\left. + \left[\bar{B_2}\right]^T\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\{\sigma\}\varphi_{,3}^{(\iota)}dx^3\right)\sqrt{g}dx^1dx^2 \qquad (3.7)$$

Чисельне інтегрування за координатою x^3, дозволяє отримати вираз для розрахунку вузлових реакцій скінченого елемента призматичної форми зі змінними у перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами (СЕ1) через компоненти напружень у вигляді:

$$\left\{\bar{r}\right\}_{\iota} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{I=1}^{I}\left[\left(\left[\bar{B_1}\right]^T\left\{\bar{\sigma_1}\right\}_{\iota} + \left[\bar{B_2}\right]^T\left\{\bar{\sigma_2}\right\}_{\iota}\right)\sqrt{g}H_iH_I\right]_{(x_i^1,x_I^2)} \qquad (3.8)$$

$$\left[\bar{B_1}\right]^{(S_1,S_2)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1 + \begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_1 + \\ +2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1S_2 \end{pmatrix}x^2\right] & \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1 + \begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_1 + \\ +2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1S_2 \end{pmatrix}x^2\right] & 0 \\ \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_2 + \begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_2 + \\ +2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1S_2 \end{pmatrix}x^1\right] & \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_2 + \begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_2 + \\ +2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1S_2 \end{pmatrix}x^1\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2 + \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2 + \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\begin{pmatrix} S_1 + \\ +2S_1S_2x^2 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\begin{pmatrix} S_2 + \\ +2S_1S_2x^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Представимо у виразі (2.40) за допомогою коефіцієнта поліноміального розкладу переміщень:

$$\left\{\bar{\sigma_1}\right\}_{\iota} = \sum_{m=1}^{M}\left(\{\sigma\}\varphi^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)}, \qquad (3.9)$$

$$\left\{\bar{\sigma_2}\right\}_\iota = \sum_{m=1}^{M}\left(\{\sigma\}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)}$$

$$\left[\bar{B_2}\right]^{(S_1,S_2)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}_{,3}^{3'}\begin{pmatrix}1+2S_1x^1+\\+2S_2x^2\end{pmatrix} \\ \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}_{,1}^{1'}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}_{,12}^{1'}+\\+2\overset{0}{Z}{}_{,1}^{1'}S_2\end{pmatrix}x^2\right] & \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}_{,1}^{2'}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}_{,12}^{2'}+\\+2\overset{0}{Z}{}_{,1}^{2'}S_2\end{pmatrix}x^2\right] & 0 \\ \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}_{,2}^{1'}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}_{,12}^{1'}+\\+2\overset{0}{Z}{}_{,2}^{1'}S_1\end{pmatrix}x^1\right] & \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}_{,2}^{2'}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}_{,12}^{2'}+\\+2\overset{0}{Z}{}_{,2}^{2'}S_1\end{pmatrix}x^1\right] & 0 \end{bmatrix}$$

Виразимо в (2.40) деформації за допомогою коефіцієнта поліноміального розкладу переміщень:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_\iota^T\right)\left(\left[\bar{B_1}\right]^T\varphi^{(\iota)} +\right.$$

$$\left.+\left[\bar{B_2}\right]^T\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)[D]\sum_{n=0}^{L}\left(\left[\bar{B_1}\right]\varphi^{(n)}+\left[\bar{B_2}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)$$

$$\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3 \tag{3.10}$$

Інтегруючи в (3.10) по x^3 чисельно, і позначивши:

$$G_1^{\iota n} = \sum_{m=1}^{M}\left(\varphi^{(\iota)}\varphi^{(n)}H_m\right)_{(x_m^3)},$$

$$G_2^{\iota n} = \sum_{m=1}^{M}\left(\varphi_{,3}^{(\iota)}\varphi^{(n)}H_m\right)_{(x_m^3)},$$

$$G_3^{\iota n} = \sum_{m=1}^{M} \left(\varphi^{(n)} \varphi_{,3}^{(\iota)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \tag{3.11}$$

$$G_4^{\iota n} = \sum_{m=1}^{M} \left(\varphi_{,3}^{(\iota)} \varphi_{,3}^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}$$

Представио формулу для варіації енергії деформації в узагальненому вигляді:

$$\delta W = \sum_{\iota=0}^{L} \left(\delta \left\{ \bar{U} \right\}_{\iota}^{T} \right) \left[\bar{K} \right]_{(\iota n)} \left\{ \bar{U} \right\}_{n}, \tag{3.12}$$

де

$$\left[\bar{K}\right]_{\iota n} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left(\left[\bar{B}_1\right]^T [D] \left[\bar{B}_1\right] G_1^{\iota n} + \left[\bar{B}_2\right]^T [D] \left[\bar{B}_1\right] G_2^{\iota n} + \right.$$

$$\left. + \left[\bar{B}_1\right]^T [D] \left[\bar{B}_2\right] G_3^{\iota n} + \left[\bar{B}_2\right]^T [D] \left[\bar{B}_2\right] G_4^{\iota n} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2$$

Після інтегрування по x^1 і x^2,

$$\left[\bar{K}\right]_{\iota n} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \left[\left(\left[\bar{B}_1\right]^T [D] \left[\bar{B}_1\right] G_1^{\iota n} + \left[\bar{B}_2\right]^T [D] \left[\bar{B}_1\right] G_2^{\iota n} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left[\bar{B}_1\right]^T [D] \left[\bar{B}_2\right] G_3^{\iota n} + \left[\bar{B}_2\right]^T [D] \left[\bar{B}_2\right] G_4^{\iota n} \right) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_{i,}^1 x_j^2)} \tag{3.13}$$

отримуємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного скінченого елемента зі змінними в перерізі $x^3 = const$ механічними і геометричними параметрами (СЕ1)

3.2 Виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами

Виразивши у співвідношеннях (2.51) переміщення відповідно до (3.1), отримуємо:

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(\alpha)}\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{12} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1}S_2 + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2}S_1\right)\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha3} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{8}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\varphi^{(\iota)}_{,3}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)} + 2\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_\alpha\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{3'(S_1,S_2)}\right),$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\varphi^{(\iota)}_{,3}\bar{U}^{\iota}_{3'(S_1,S_2)}, \tag{3.14}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}S_\alpha + 2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_1S_2\right)\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha3,(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12} + \overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(3-\alpha)}\varphi^{(\iota)}_{,3}\right)\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)} + \right.$$
$$\left. + 2\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1S_2\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{3'(S_1,S_2)}\right],$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{3}S_\alpha\varphi^{(\iota)}_{,3}\bar{U}^{\iota}_{3'(S_1,S_2)},$$

Взаємозалежність коефіцієнтів розкладу деформацій згідно ряду Маклорена та коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами в матричній формі можна представити так:

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\} = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\left[\overset{0}{\bar{B}}_1\right]\varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{\bar{B}}_2\right]\varphi^{(\iota)}_{,3}\right)\left\{\bar{U}\right\}_{\iota},$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\} = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right]\varphi^{(\iota)} + \left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right]\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_{\iota}, \tag{3.15}$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\} = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,2}\right]\varphi^{(\iota)} + \left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,2}\right]\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_{\iota},$$

де

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_1\right] = \left[\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_1\right]^{(-1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_1\right]^{(+1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_1\right]^{(-1,+1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_1\right]^{(+1,+1)}\right],$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_2\right] = \left[\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_2\right]^{(-1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_2\right]^{(+1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_2\right]^{(-1,+1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_2\right]^{(+1,+1)}\right],$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right] = \left[\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right]^{(-1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right]^{(+1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right]^{(-1,+1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right]^{(+1,+1)}\right], \tag{3.16}$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right] = \left[\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right]^{(-1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right]^{(+1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right]^{(-1,+1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right]^{(+1,+1)}\right],$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,2}\right] = \left[\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,2}\right]^{(-1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,2}\right]^{(+1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,2}\right]^{(-1,+1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,2}\right]^{(+1,+1)}\right],$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,2}\right] = \left[\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,2}\right]^{(-1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,2}\right]^{(+1,-1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,2}\right]^{(-1,+1)}\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,2}\right]^{(+1,+1)}\right]$$

Елементи підматриць $\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_1\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_2\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,2}\right]^{(S_1,S_2)}$ и $\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,2}\right]^{(S_1,S_2)}$ і обчислюються згідно (3.14) і представлені у виразах (3.17-3.22) відповідно.

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_1\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_2 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2 + \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2 + \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_2 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_2\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1} & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1} & 0 \\ \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2} & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{1,1}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_2 + 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1S_2\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_2 + 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1S_2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1S_2 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\left[\overset{\underset{-}{0}}{B}_{2,1}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1 \\ \frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\right) & \frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\left[\overset{\underline{0}}{B}_{1,2}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_1 + 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1S_2\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_1 + 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1S_2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1S_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\left[\overset{\underline{0}}{B}_{2,2}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_2 \\ \frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2\right) & \frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12} + 2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Виразимо співвідношення (2.56) коефіцієнти розкладання деформацій до ряду Маклорена відповідно до (3.15). Тоді варіацію енергії можна надати через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах та вузлові реакції $\left\{\overset{\underline{0}}{r}\right\}$ скінченого елемента:

$$\delta W = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_{\iota}^{T}\right)\left\{\overset{\underline{0}}{r}\right\}_{\iota}, \quad (3.23)$$

де

$$\left\{\overset{\underline{0}}{r}\right\}_{\iota} = \left[\left[\overset{\underline{0}}{B}_1\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi^{(\iota)}dx^3 + \left[\overset{\underline{0}}{B}_2\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi^{(\iota)}_{,3}dx^3 + \right.$$
$$+\frac{1}{12}\left(\left[\overset{\underline{0}}{B}_{1,1}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi^{(\iota)}dx^3 + \left[\overset{\underline{0}}{B}_{2,1}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi^{(\iota)}_{,3}dx^3 + \right.$$
$$\left.\left.+\left[\overset{\underline{0}}{B}_{1,2}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi^{(\iota)}dx^3 + \left[\overset{\underline{0}}{B}_{2,2}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi^{(\iota)}_{,3}dx^3\right)\right]\sqrt{\overset{0}{g}}$$

(3.24)

Виконуючи в (3.24) інтегрування по x^3 чисельно відповідно до формули Гауса

$$\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_1\right\}_\iota = \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)},$$

$$\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_2\right\}_\iota = \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)},$$

$$\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{1,1}\right\}_\iota = \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)},$$

$$\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{2,1}\right\}_\iota = \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)},$$

$$\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{1,2}\right\}_\iota = \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)},$$

$$\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{2,2}\right\}_\iota = \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{(x_m^3)}, \qquad (3.25)$$

отримуємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченого елемента з усередненими в перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами (СЕ2) через коефіцієнти розкладання напруження в ряд Маклорена:

$$\left\{\overset{0}{\underline{r}}\right\}_\iota = \left[\left[\overset{0}{\underline{B}}_1\right]^T\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_1\right\}_\iota + \left[\overset{0}{\underline{B}}_2\right]^T\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_2\right\}_\iota + \frac{1}{12}\left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,1}\right]^T\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{1,1}\right\}_\iota + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,1}\right]^T\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{2,1}\right\}_\iota + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,2}\right]^T\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{1,2}\right\}_\iota +_\iota \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,2}\right]^T\left\{\overset{0}{\underline{\sigma}}_{2,2}\right\}\right]\right)\sqrt{\overset{0}{g}} \qquad (3.26)$$

У співвідношенні (2.65) коефіцієнти розкладання деформацій у ряд Маклорена представимо через коефіцієнти розкладання переміщень за поліномами:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=+1}\left\{\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_\iota^T\right)\left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_1\right]^T\varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_2\right]^T\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot \left[\overset{0}{D}\right] \sum_{n=0}^{L} \left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_1\right] \varphi^{(n)} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_2\right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \left\{\bar{U}\right\}_n +$$

$$+\frac{1}{12}\left[\sum_{\iota=0}^{L} \left(\delta \left\{\bar{U}\right\}_{\iota}^{T}\right) \left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,1}\right]^T \varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,1}\right]^T \varphi_{,3}^{(\iota)} \right) \cdot\right.$$

$$\cdot \left[\overset{0}{D}_1\right] \sum_{n=0}^{L} \left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,1}\right] \varphi^{(n)} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,1}\right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \left\{\bar{U}\right\}_n +$$

$$+\sum_{\iota=0}^{L} \left(\delta \left\{\bar{U}\right\}_{\iota}^{T}\right) \left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,2}\right]^T \varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,2}\right]^T \varphi_{,3}^{(\iota)} \right) \cdot$$

$$\left.\left.\cdot \left[\overset{0}{D}_2\right] \sum_{n=0}^{L} \left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,2}\right] \varphi^{(n)} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,2}\right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \left\{\bar{U}\right\}_n \right]\right\} \sqrt{\overset{0}{g}} dx^3 \tag{3.27}$$

Перепишемо вираз варіації у вигляді:

$$\delta W = \sum_{\iota=0}^{L} \sum_{n=0}^{L} \left(\delta \left\{\bar{U}\right\}_{\iota}^{T}\right) \left[\overset{0}{\underline{K}}\right]_{(\iota n)} \left\{\bar{U}\right\}_n \tag{3.28}$$

отже

$$\left[\overset{0}{\underline{K}}\right]_{\iota n} = \left[\left[\overset{0}{\underline{B}}_1\right]^T \left[\overset{0}{D}\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_1\right] G_1^{\iota n} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_2\right]^T \left[\overset{0}{D}\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_1\right] G_2^{\iota n} + \right.$$

$$+ \left[\overset{0}{\underline{B}}_1\right]^T \left[\overset{0}{D}\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_2\right] G_3^{\iota n} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_2\right]^T \left[\overset{0}{D}\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_2\right] G_4^{\iota n} +$$

$$+\frac{1}{12}\left(\left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,1}\right]^T \left[\overset{0}{D}_1\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,1}\right] G_1^{\iota n} \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,1}\right]^T \left[\overset{0}{D}_1\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,1}\right] G_2^{\iota n} + \right.$$

$$+ \left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,1}\right]^T \left[\overset{0}{D}_1\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,1}\right] G_3^{\iota n} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,1}\right]^T \left[\overset{0}{D}_1\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,1}\right] G_4^{\iota n} +$$

$$+ \left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,2}\right]^T \left[\overset{0}{D}_2\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,2}\right] G_1^{\iota n} + \left[\overset{0}{\underline{B}}_{2,2}\right]^T \left[\overset{0}{D}_2\right] \left[\overset{0}{\underline{B}}_{1,2}\right] G_2^{\iota n} +$$

$$+\left[\overset{0}{\underset{-}{B}}_{1,2}\right]^{T}\left[\overset{0}{D}_{2}\right]\left[\overset{0}{\underset{-}{B}}_{2,2}\right]G_{3}^{\iota n}+\left[\overset{0}{\underset{-}{B}}_{2,2}\right]^{T}\left[\overset{0}{D}_{2}\right]\left[\overset{0}{\underset{-}{B}}_{2,2}\right]C_{4}^{\iota n}\sqrt{\overset{0}{g}} \qquad (3.29)$$

де коефіцієнти матиці жорсткості $\left[\overset{0}{\underset{-}{K}}\right]_{(\iota n)}$ призматичного скінченого елемента із усередненими у перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами (СЕ2) .

3.3 Обґрунтування вибору системи координатних функцій під час розкладання переміщень по поліномах

Формули, наведені в підрозділах 3.1 та 3.2 для обчислення вузлових реакцій і елементів матриці жорсткості, дають змогу реалізувати різні системи координатних функцій, сформованих на основі поліноміального подання переміщень. Відмінною рисою зазначених співвідношень, порівняно з аналогами, що базуються на тригонометричних розкладах Фур’є, є наявність ненульових коефіцієнтів не лише в діагональних, а й у позадіагональних підматрицях. Це, у свою чергу, ускладнює використання прямих чисельних методів для розв’язання відповідних систем алгебраїчних рівнянь.

До визначальних чинників ефективності напіваналітичного методу скінченних елементів належать зручність задання граничних умов на торцевих поверхнях призматичних тіл та обчислювальні витрати, які залежать від швидкості збіжності алгоритму чисельного інтегрування.

Для обґрунтування оптимального вибору поліномів, що найбільш точно задовольняють поставлені вимоги, було досліджено три різні системи координатних функцій. У якості базового варіанту для моделювання переміщень обрано ортонормовані поліноми Лежандра:

$$P_{(\iota)} = \sqrt{\frac{2\iota+1}{2}}\sum_{k=0}^{\iota}\frac{(-1)^{k}(\iota+k)!}{(\iota-k)!(k!)^{2}2^{k+1}}\left[(1-x^3)^{k}+(-1)^{\iota}(1+x^3)^{k}\right],$$

$$\frac{dP_{(\iota)}}{dx^3} = \sqrt{\frac{2\iota+1}{2}} \sum_{k=1}^{\iota} \frac{(-1)^{k+1}(\iota+k)!k}{(\iota-k)!(k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^{k-1} + (-1)^{\iota-1}(1+x^3)^{k-1}\right], \quad (3.30)$$

графіки яких до $p(5)$ включно наведено на рис. 3.2.

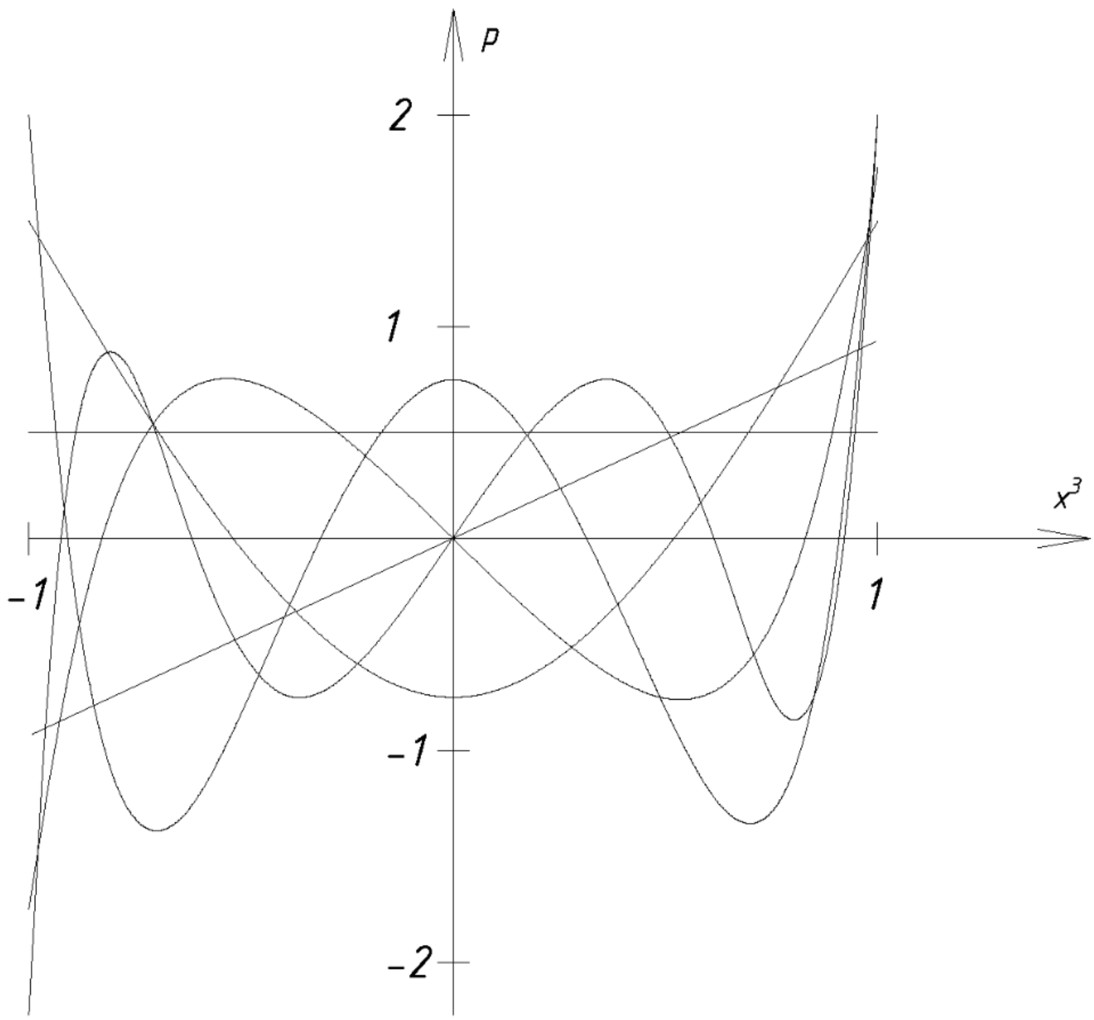


Рис. 3.2 Ортонормовані поліноми Лежандра

Розглянута система поліномів вирізняється мінімальністю в сенсі метрики відповідного оператора, що використовується в рамках варіаційного підходу до розв’язання крайових задач. Друга система координатних функцій має комбінований характер: її початкові елементи відповідають поліномам Лежандра, тоді як наступні базуються на поліномах Міхліна [42]:

$$q_{(0)} = C_{(0)}P_{(0)}, \qquad q_{(1)} = C_{(1)}P_{(1)},$$
$$q_{(\iota)} = C_{(\iota)}P_{(\iota)} - C_{(\iota-1)}P_{(\iota-2)} \quad (3.31)$$

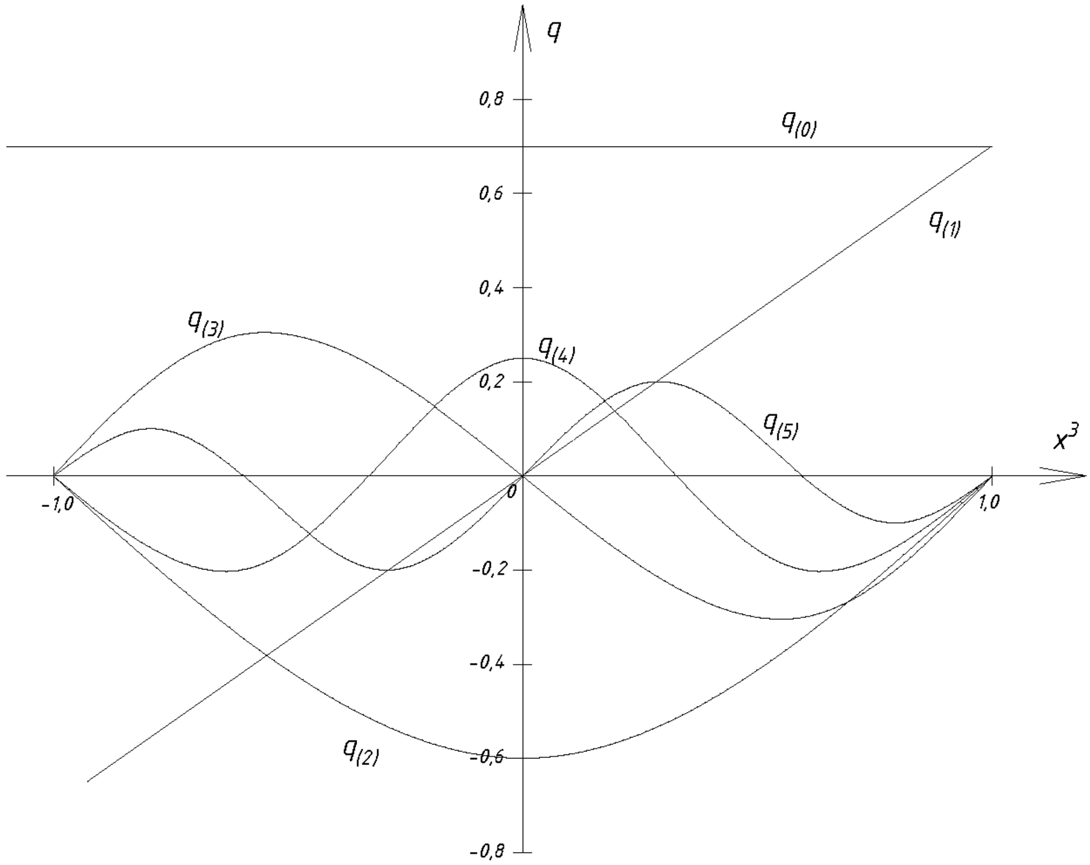


Рис. 3.3. Графіки функцій $q_{(\iota)}$

$$\frac{aq_{(0)}}{ax^3} = 0, \frac{aq_{(1)}}{ax^3} = \sqrt{\frac{3}{2}}\text{c}_{(1)}, \frac{aq_{(1)}}{ax^3} = P_{(\iota-1)}, \quad (3.32)$$

де

$$\text{c}_{(1)} = 1, \text{c}_{(\iota)} = \sqrt{(4\iota^2 - 1)^{-1}}, (\iota = 1,2,3 \dots)$$

Перших два члена третьої системи координатних функцій належать поліномам Лагранжа, інші – поліномам Міхліна:

$$R_0 = \frac{1}{2}(1 - x^3), R_1 = \frac{1}{2}(1 + x^3),$$

$$R_{(\iota)} = q_{(\iota)},$$

$$\frac{dR_{(0)}}{dx^3} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{dR_{(1)}}{dx^3} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{dR_{(\iota)}}{dx^3} = P_{(\iota-1)} \quad (3.33)$$

Графіки функцій $q_{(\iota)}$ і $R_{(\iota)}$ зображені на рис. 3.3 та 3.4. Розглянуті системи координатних функцій частково задовольняють умову ортонормованості в енергетичній метриці простору [42], що є ключовим фактором для підвищення ефективності та стабільності ітераційних методів алгебраїчного розв’язання систем лінійних рівнянь [41–42]. Така властивість сприяє зниженню обумовленості матриць та покращує збіжність обчислювальних алгоритмів.

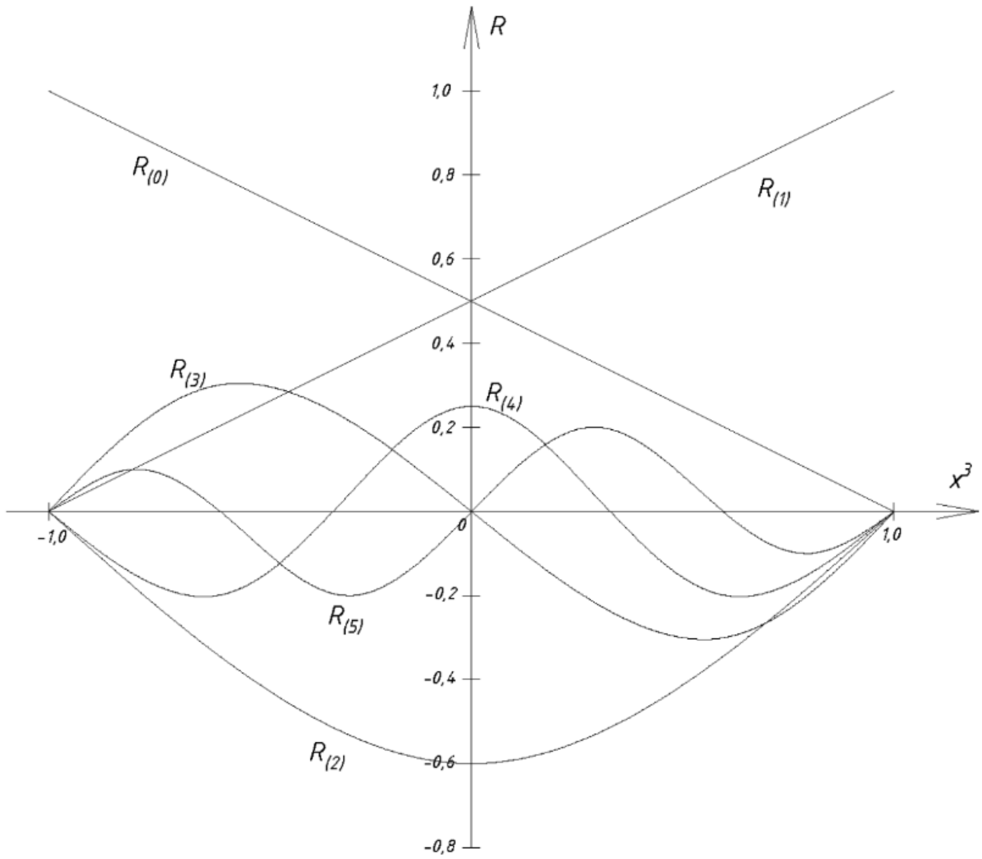


Рис. 3.4. Графіки функцій $R_{(\iota)}$

Оцінка поведінки поліномів при значеннях при $x^3 = \pm l$ (див. рис. 3.2 та 3.4) дозволяє дійти висновку, що саме базисна система функцій є найбільш придатною для формулювання граничних умов на торцях тіла. Її структура забезпечує зручну реалізацію умов закріплення у межах традиційної процедури методу скінченних елементів, що передбачає виключення відповідних рівнянь зі сформованої системи. Вираження переміщень поліномами, особливо у задачах із несиметричними граничними умовами, потребує застосування спеціальних прийомів. До таких належать використання невизначених множників Лагранжа або введення пружних опор. Однак ці методи значно знижують ефективність напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ).

Зокрема, використання методу невизначених множників Лагранжа супроводжується зростанням розмірності системи, оскільки в процесі розв'язання додаються додаткові невідомі у системі рівнянь та погіршує обумовленість матриці. Введення пружних опор забезпечує лише наближене моделювання граничних умов і також негативно впливає на обумовленість матриці. Ці недоліки яскраво ілюструються на прикладі розрахунку у випадку плоскої деформації за визначеним напрямом x^2 бруса довжиною $a = 0{,}02$ми товщиною $b = 0{,}01м$ (рис. 3.5).

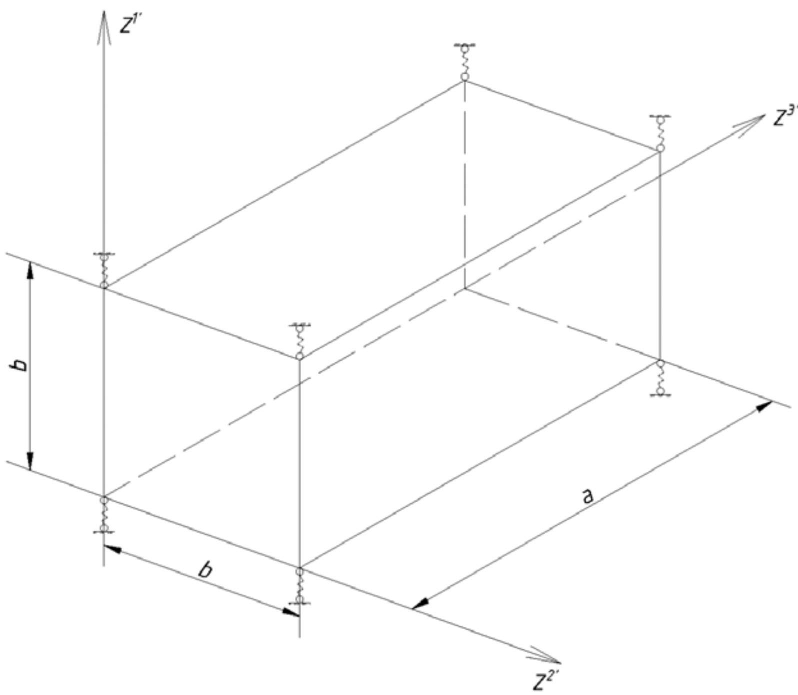


Рис. 3.5. Загальний вигляд розрахункової моделі бруса

Прямокутне тіло у вигляді бруса, що навантажене по порожнинам $x^1 = \pm 0{,}5$ звичайним навантаженням, що рівномірно розподіленим Q і закріпленим від переміщень по площинах $x^3 = \pm 1$. В таблиці 3.1 записано числова обумовленість $\alpha = \lambda min_{max}$ і вектор деформації $\nu_{1'} = \frac{u_{1'}E}{Q}$, обчислення при різних способах задачу закріплення.

Таблиця 3.1

φ	Спосіб завдання закріплень	α	$U_{1'}$	
			Гаус	Прост. ітерац.
R,q	Виключення невідомих	35,9	1,50	1,58
p	Пружні опори	3958	1,51	-

Тут: λ_{max}і λ_{min} – найбільше та найменше власні значення матриці; $u_{1'}$- максимальні прогини у точці $x^2 = 0{,}5,\ x^3 = 0.$ E – модуль пружності матеріалу. Об'єкт було апроксимовано одним скінченним елементом із використанням поліномів q і R, при цьому для досягнення точності обчислення $\nu_{1'}$ на рівні близько 1% знадобилося лише 7 не складних ітерацій.

У процесі формування матриці з використанням поліномів ррр параметри жорсткості пружних опор підбиралися таким чином, щоб похибка у розрахунку величини $\nu_{1'}$, пов'язана з апроксимованим урахуванням граничних умов, не перевищувала 1%, що забезпечує необхідну точність моделювання. В умовах заданого моделювання спостерігається понад стократне зростання числа обумовленості матриці, сформованої з використанням поліномів ррр, що спричиняє розбіжність ітераційного процесу не лише у випадку стандартних, а й для блочних ітераційних алгоритмів. Проведений аналіз показав, що за наявності фіксованих закріплень на торцевих поверхнях використання поліномів Лежандра стає недоцільним.

Зіставлення збіжності ітераційного процесу розв'язання систем рівнянь, сформованих на основі відповідних координатних функцій, виконано для конструкцій із вільними торцевими поверхнями на прикладі прямокутної смуги, нескінченної вздовж осі $Z^{1'}$. Схематичне зображення розрахункової моделі смуги наведено на рис. 3.6.

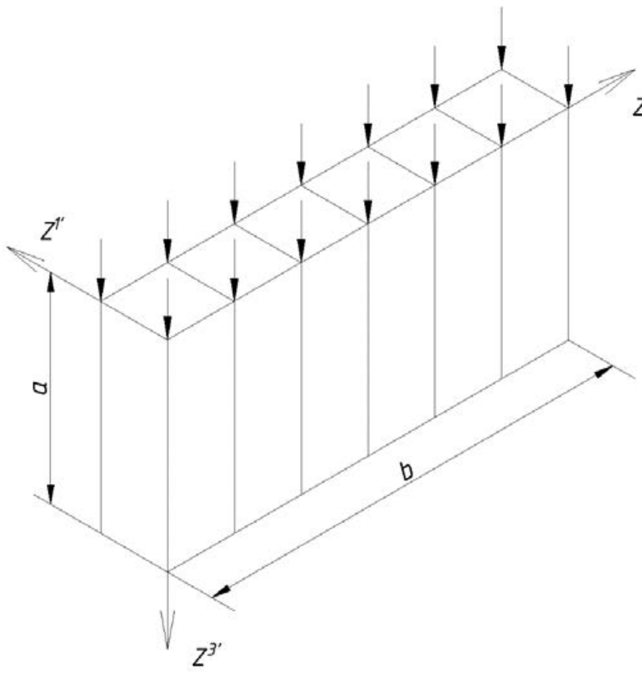


Рис. 3.6. Загальний вигляд розрахункової схеми бруса

Умови плоского деформування вздовж осі $Z^{1'}$ моделювались шляхом виділення шару з обмеженою товщиною, у якому переміщення $u_{1'}$ було заблоковано для запобігання зсуву. Початкові умови на площинах $Z^{2'} = 0$ і $Z^{2'} = b$ були задані умови контакту з гнучкою діафрагмою, тоді як площини $Z^{3'} = 0$ і $Z^{3'} = a$ залишались вільними від закріплення. На поверхню $Z^{3'} = 0$ прикладалось рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю, що дорівнює одиниці. Уздовж осі $Z^{1'}$ смуга апроксимувалася одним скінченним елементом, по напрямку $Z^{2'}$- вісьмома елементами з урахуванням шести членів поліноміального розкладу.

На початковому етапі виконано дослідження впливу параметра релаксації ω на ефективність збіжності блочного ітераційного методу. На основі результатів, наведених у таблиці 3.2, встановлено, що оптимальне значення параметра дорівнює ω =1,4 для даної системи поліномів.

У подальшому, за фіксованого оптимального параметра ω, проведено аналіз точності обчислень залежно від кількості ітерацій. Графіки, подані на рис. 3.6, демонструють, що найвищу точність результатів забезпечує використання базису поліномів типу q.

Таблиця 3.2

ω \ φ	p	q	R
1	14	14	32
1,2	8	9	21
1,4	8	8	11
1,6	13	15	17

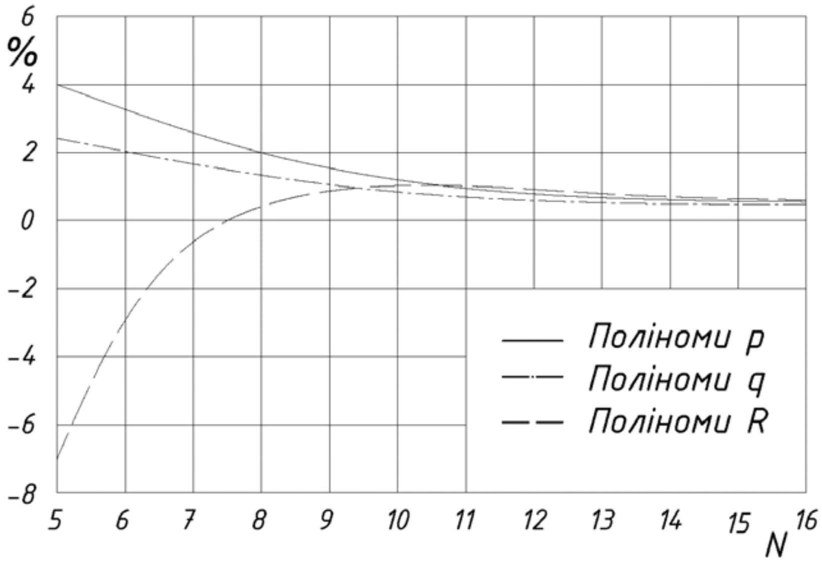


Рис. 3.6. Результати розрахунку, що показують характеристику достовірності розв’язку у відношенні до кількості ітерацій

Висновки до розділу 3

Отже, на основі виконаного аналізу можна дійти висновку, що змішані координатні системи, сформовані з використанням поліномів Міхліна, є найбільш ефективними з точки зору зручності задання різноманітних граничних умов на торцях конструкцій. Крім того, такі функціональні базиси сприяють досягненню високої швидкості збіжності ітераційних алгоритмів при розв’язанні відповідних систем рівнянь.

РОЗДІЛ 4.
РОЗВ’ЯЗУВАЛЬНІ РІВНЯННЯ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ

Розробка нових скінченних елементів (СЕ) у межах напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) потребує ретельного вибору системи координатних функцій і методики виведення матриці жорсткості, що є визначальними факторами для забезпечення високої ефективності їх застосування. Апроксимація переміщень уздовж координати розкладу виконувалася за допомогою змішаної системи координатних функцій: перші два члени побудовано на основі поліномів Лагранжа, інші — на основі поліномів Міхліна.

На базі високопродуктивної моментної схеми методу скінченних елементів сформульовано загальні розв’язувальні співвідношення для універсального скінченного елемента призматичної форми. Запропонований підхід забезпечує ефективне моделювання напружено-деформованого стану в умовах фізичної та геометричної нелінійності, що дозволяє застосовувати його до широкого спектра задач, пов’язаних з аналізом призматичних конструкцій складної форми.

4.1 Криволінійний неоднорідний призматичний скінченний елемент

Для аналізу призматичних тіл з просторово варійованими геометричними та фізико-механічними характеристиками було запропоновано скінченний елемент у формі криволінійної призми (див. рис. 4.1). У локальній системі координат цей елемент має конфігурацію прямокутного паралелепіпеда, у якого поперечний переріз є квадратом зі стороною, що дорівнює одиниці, а довжина елемента становить дві одиниці. Вздовж осі x^3 розміщено L точок інтегрування K_i ($i=1,2\ldots L$), положення яких визначено згідно з правилами чисельного інтегрування Гауса. Координати вузлів задаються у глобальній системі координат для кожного перерізу, а при переході до локальної системи відображаються у вигляді площині x^i =const, що проходять через відповідні точки K_i.

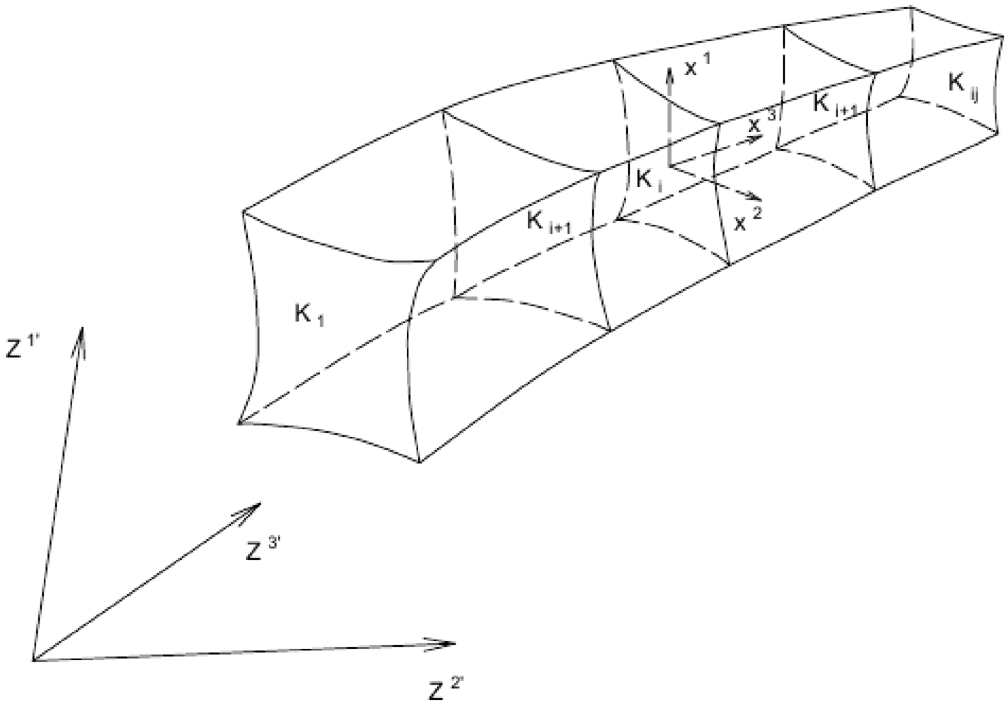


Рис. 4.1. Загальний вигляд розрахункової моделі криволінійної призми

У площині поперечного перерізу елемента переміщення розподіляються згідно білінійну закону:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm1} \quad \sum_{S_2=\pm1} \quad u_{m'(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right) , \qquad (4.1)$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$- значення компонент вектора переміщень у вузлах; $S_1$$S_1$ і S_2 S_2- подвоєні значення координат вузлів у відповідних координатних напрямах $x^1$$x^1$ і $x^2$$x^2$.

У відповідності з прийнятим законом (4.1), знаходимо переміщення і їх похідні в центрі елемента:

$$\dot{u}_{m'} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm1} \quad \sum_{S_2=\pm1} \quad u_{m'(S_1S_2)},$$

$$\dot{u}_{m',\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}S_\alpha,$$

$$\dot{u}_{m',3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2),\ 3},$$

$$\dot{u}_{m',12} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}S_1S_2,$$

$$\dot{u}_{m',3\alpha} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{S_1=\pm1}\sum\nolimits_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2),3}S_\alpha, \qquad (4.2)$$

В напрямку x^3 переміщення вузлів виражаються через розклад визначеної форми:

$$\dot{u}_{m'(S_1S_2)} = \sum\nolimits_{l=0} u_{m'(S_1S_2)}\varphi^l, \qquad (4.3)$$

де через $u_{m'l(s_1s_2)}$ параметри коефіцієнтів, що характеризують розклад переміщень у ряд по координатним функціям φ^lφ^l.

Для температур також прийнято білінійний закон розподілу в межах поперечного перерізу елемента:

$$T = \sum\nolimits_{S_1=\pm1}\sum\nolimits_{S_2=\pm1} T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2\frac{1}{2} + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right), \qquad (4.4)$$

Значення температури і їх похідні в центрі перерізу отримуємо аналогічно (4.2):

$$\dot{T} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_1=\pm1} T_{(S_1S_2)},$$

$$\dot{T}_{,a} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{S_1=\pm1}\sum\nolimits_{S_1=\pm1} T_{(S_1S_2)}\,S_a, \qquad (4.5)$$

Компоненти тензора пружних модулів, а також визначник матриці, сформованої з елементів відповідного матричного тензора, виявляють незначну варіацію в межах поперечного перерізу скінченного елемента. З огляду на це, для спрощення обчислень ці величини приймаються незмінними по перерізу та прирівнюються до їх значень, визначених у центральній точці перерізу:

$$c^{ijmn} \approx \dot{c}^{ijmn}, g \approx \dot{g}, \tag{4.6}$$

де $g = \det[g], \dot{g} = det[\dot{g}]$.g = det[g] , ġ = det[ġ].

Таке припущення дозволяє скоротити об'єм розрахунків, не зменшуючи точність розв'язання [41-42].

Спираючись на ключові положення моментної схеми методу скінчених елементів [167], компоненти тензора повної деформації подано у формі часткового розкладу за рядом Маклорена:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \varepsilon_{\alpha(\alpha)}{}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\
\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \\
\varepsilon_{12} = \dot{\varepsilon}_{12}, \\
\varepsilon_{3(\alpha)} = \dot{\varepsilon}_{3(\alpha)} + \dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\
\varepsilon_{33} = \dot{\varepsilon}_{33} + \dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)} x^{(\alpha)},
\end{gathered} \tag{4.7}$$

де $\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}|x^{\alpha} = 0$, $\varepsilon_{ij.\alpha} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dx^{\alpha}}|x^{\alpha} = 0$ $(\alpha \neq i, j)$.

Значенням коефіцієнту розкладу $\frac{d^2\varepsilon_{33}}{dx' dx^2}$ нехтуємо, як величиною, незначущою в порівнянні з основним членом.

З урахуванням раніше сформульованих припущень щодо сталості компонент тензора пружних характеристик і визначника матриці, побудованої на основі компонент відповідного матричного тензора, напруження доцільно представити у вигляді ряду Маклорена за відповідними коефіцієнтами розкладу.

$$\sigma^{\alpha(\alpha)} = \dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}{}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)},$$
$$\sigma^{12} = \dot{\sigma}^{12}, \qquad (4.8)$$
$$\sigma^{3\alpha} = \dot{\sigma}^{3\alpha} + \dot{\sigma}^{3(\alpha)}{}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}$$
$$\sigma^{33} = \dot{\sigma}^{33} + \dot{\sigma}^{33}{}_{,(\alpha)} x^{(\alpha)}$$

Членом $\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,\alpha} \dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,\alpha}$ нехтуємо, оскільки він не дає внесок в енергію деформації елемента.

Коефіцієнти розкладу тензора деформацій за рядом Маклорена виражаються через умовні значення вектора переміщень у центрі елемента, що забезпечує компактне аналітичне подання локальних деформаційних характеристик:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',\alpha}, \qquad \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \dot{z}^{m'}_{,12} \dot{u}_{m',\alpha} + \dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',12},$$
$$\dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(\dot{z}^{m'}_{,1} \dot{u}_{m',2} + \dot{z}^{m'}_{,2} \dot{u}_{m',1}\right),$$
$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha} = \frac{1}{2}\left(\dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',3} + \dot{z}^{m'}_{,3} \dot{u}_{m',\alpha}\right), \qquad (4.9)$$
$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha(3-\alpha)} = \frac{1}{2}(\dot{z}^{m'}_{,12}\ \dot{u}_{m',3} + \dot{z}^{m'}_{,\alpha}\ \dot{u}_{m',3(3-\alpha)} + \dot{z}^{m'}_{,3}\ \dot{u}_{m',\alpha(3-\alpha)} + \dot{z}^{m'}_{,3(3-\alpha)}\ \dot{u}_{m',\alpha}),$$
$$\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{z}^{m'}_{,3} \dot{u}_{m',3}, \qquad \dot{\varepsilon}_{33,\alpha} = \dot{z}^{m'}_{,3\alpha} \dot{u}_{m',\alpha} + \dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',3\alpha},$$

де $\dot{z}^{m'}_{,j} = z^{m'}_{,j} | x^{\alpha} = 0, \quad \dot{z}^{m'}_{,j} = \frac{d\dot{z}^{m'}_{,i}}{dx^{j}} | x^{\alpha} = 0 \qquad (\alpha \neq i, j)$

З урахуванням того, що значення переміщень та їх похідних у центрі поперечного перерізу визначаються згідно з виразом (4.2), співвідношення (4.9) може бути переписано через вузлові компоненти вектора переміщень:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} S_{\alpha}\, \dot{z}^{m'}_{,\alpha},$$
$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)(3-\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} (2 S_1 S_2\, \dot{z}^{m'}_{,\alpha} + S_{\alpha} \dot{z}^{m'}_{,12}$$

$$\dot{\varepsilon}_{12}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{m'(S_1S_2)}(S_1\,\dot{z}^{m'}_{,2}+S_2\dot{z}^{m'}_{,1}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha}=\tfrac{1}{8}\textstyle\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}2u_{m'(S_1S_2)}S_\alpha\,\dot{z}^{m'}_{,3}, \tag{4.10}$$

$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha(3-\alpha)}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}2u_{m'(S_1S_2)}(2\,\dot{z}^{m'}_{,2}S_1S_2+S_\alpha\dot{z}^{m'}_{3(3-\alpha)})$$

$$+u_{m'(S_1S_2)}\left(2S_{(3-\alpha)}\dot{z}^{m'}_{,\alpha}S_1S_2+\dot{z}^{m'}_{,12}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}=\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{m'(S_1S_2).3}\,\dot{z}^{m'}_{,3},$$

$$\dot{\varepsilon}_{33,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{m'(S_1S_2).3}(\,\dot{z}^{m'}_{,3\alpha}+2S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3}),$$

На основі розкладу вузлових переміщень уздовж координати x^3 за координатними функціями відповідно до виразу (4.3), виводяться формули для коефіцієнтів розкладу компонент повної деформації у ряд Маклорена:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}u_{m'(S_1S_2)}\varphi^l S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,\alpha},\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=$$

$$\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\quad\sum_{l=0}^{4}u_{m'}l_{(S_1S_2)}\varphi^l(2S_1S_2\dot{z}^{m'}_{,\alpha}+S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,12}), \tag{4.11}$$

$$\dot{\varepsilon}_{12}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}2u_{m'}l_{(S_1S_2)}\varphi^l(S_1\dot{z}^{m'}_{,2}+S_2\dot{z}^{m'}_{,1}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}2u_{m'}l_{(S_1S_2)}\varphi^l\,S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3}+u_{m'}l_{(S_1S_2)}\varphi_{,3}{}^l\dot{z}^{m'}_{,\alpha}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha(3-\alpha)}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}\quad2u_{m'}l_{(S_1S_2)}\varphi^l(2\,\dot{z}^{m'}_{,3}S_1S_2+S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3(3-\alpha)})$$

$$+u_{m'(S_1S_2)}\varphi_{,3}{}^l\left(2S_{(3-\alpha)}\dot{z}^{m'}_{,\alpha}+\dot{z}^{m'}_{,12}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}u_{m'(S_1S_2)}\varphi_3{}^l\dot{z}^{m'}_{,3},$$

$$\dot{\varepsilon}_{33,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}\quad u_{m'}l_{(S_1S_2)}\varphi_{,3}{}^{l}(\dot{z}^{m'}_{,3\alpha}+2S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3})$$

$$+u_{m'(S_1S_2)}\varphi_{,3}{}^{l}\left(2S_{(3-\alpha)}\dot{z}^{m'}_{,\alpha}+\dot{z}^{m'}_{,12}\right)$$

де $\varphi^l_{,3}=\frac{d\varphi^2}{dx^3}$

4.2 Виведення рівнянь рівноваги і матриці жорсткості скінченого елемента

Деформування тривимірних тіл описується в межах варіаційного підходу на основі принципу можливих переміщень. Просторова структура об'єкта дискретизується на сукупність із *M* скінченних елементів, для якої формулюється система рівноважних рівнянь у вигляді:

$$\sum_{m=1}^{M}\delta W_m-\delta A_m=0 \tag{4.12}$$

Розглянемо варіаційне представлення енергії деформації для окремого скінченного елемента, яке записується у вигляді:

$$\delta W=\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\sigma^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\sqrt{g dx^1dx^2dx^3} \tag{4.13}$$

Використовуючи представлення компонент тензорів напружень і деформацій відрізками Маклорена (4.7), (4.8), отримаємо:

$$\delta W=\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}(\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}+\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)})\delta(\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}+$$

$$+\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)})+(\dot{\sigma}^{33}+\dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)}x^{(\alpha)})+$$

$$+2\left(\dot{\sigma}^{3(\alpha)}+\dot{\sigma}^{3\alpha}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\delta\left(\dot{\varepsilon}_{3\alpha}\quad+\varepsilon_{3\alpha,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)+$$

$$+2\dot{\sigma}^{12}\delta\dot{\varepsilon}_{12})\sqrt{g dx^1dx^2dx^3} \tag{4.14}$$

Інтегруємо вираз (4.14) в частині поперечного перерізу із застосуванням відповідних інтеграційних формул:

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1dx^2 = 1, \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1dx^2 = 0, \quad (4.15)$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1dx^2 = \begin{cases} 0, \alpha = \beta \\ \frac{1}{12}, \alpha = \beta \end{cases}$$

Після інтегрування маємо:

$$\delta W = \int_{-1}^{1}\big(\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}^{ij} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\,\delta\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \dot{\sigma}^{33}_{,(\alpha)}\delta\dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)}$$

$$+2\dot{\sigma}^{3(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\delta\dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)})) \quad (4.16)$$

Для спрощення подальших викладок здійснимо перехід до матричної форми подання відповідних виразів:

$$\delta W = \int_{-1}^{1}((\delta\{\dot{\varepsilon}\}^T)\{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}(\delta\,\{\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}{}^T)\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha})\sqrt{g}dx^3, \quad (4.17)$$

де

$$\{\dot{\varepsilon}\}^T = \{\dot{\varepsilon}_{11}\dot{\varepsilon}_{12}\dot{\varepsilon}_{22}\dot{\varepsilon}_{23}\dot{\varepsilon}_{31}\dot{\varepsilon}_{33}\}^T,$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}^T{}_{,1} = \left\{\dot{\varepsilon}_{22,1}\dot{\varepsilon}_{23,1}\dot{\varepsilon}_{33,1}\right\}^T,$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}^T{}_{,2} = \left\{\dot{\varepsilon}_{11,1}\dot{\varepsilon}_{31,1}\dot{\varepsilon}_{33,2}\right\}^T, \quad (4.18)$$

$$\{\dot{\sigma}\}^T = \{\dot{\sigma}^{11}\dot{\sigma}^{12}\dot{\sigma}^{22}\dot{\sigma}^{23}\dot{\sigma}^{31}\dot{\sigma}^{33}\}^T,$$

$$\{\dot{\sigma}\}^T{}_{,1} = \{\sigma^{22}_{.1}\sigma^{23}_{.1}\sigma^{33}_{.1}\}^T,$$

$$\{\dot{\sigma}\}^T{}_{,2} = \{\sigma^{22}_{.2}\sigma^{23}_{.2}\sigma^{33}_{.2}\}^T, \quad (4.19)$$

Представимо складлві векторів $\{\dot{\varepsilon}\}$ і $\{\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}$ у вигляді компоненти вектора коефіцієнтів розкладу вузлових переміщень за координатними функціями $\{u\}_l$, відповідно до заданого співвідношення (4.11):

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \sum_{l=0}^{4}([E]\,\varphi^{(l)} + [F]\varphi_{,3}^{(t)})\{u_l\},$$
$$\{\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}^{T} = \sum_{l=0}^{4}([E]\,\varphi^{(l)} + [F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(t)})\{u_l\} \quad (4.20)$$

де

$$\{u_l\}^T = \left\{\left\{u_{m'(-1,-1)}\right\}\left\{u_{m'(-1,1)}\right\}\left\{u_{m'(1,-1)}\right\}\left\{u_{m'(1,1)}\right\}\right\}^T, \quad (4.21)$$

m = 1,2,3

Компоненти матриць $[E], [F], [E]_{,\alpha}, [F]_{,\alpha}$, визначаються відношенням (4.11).

Варіацію енергії деформації скінченого елемента (4.17) зобразимо з врахуванням (4.20):

$$\delta W = \int_{-1}^{1}\sum_{l=0}^{l}(\delta\{u_l\}^T\left([E]^T\varphi^{(l)} + [F]^T\varphi_{,3}^{(l)}\right)\{\dot{\delta}\} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\delta\{u_l\}^T([E]_{,\alpha}^T\,\varphi^{(l)}$$
$$+[F]_{,\alpha}^T\varphi_{,3}^{(t)})\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha})\sqrt{g}dx^3 \quad (4.22)$$

Інтегрування по x^3виконаємо чисельним методом, користуючись формулою Гауса, тоді отримаємо:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{2}[F]_{,\alpha}^T\sum_{l=0}^{4}\delta\{u_l\}^T\,\{r_l\}, \quad (4.23)$$

де $\{r_l\}$ – вектор амплітудних значень вузлових реакцій:

$$\{r_l\} = \sum_{k=1}^{N}((([E]^T\{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[E]_{.\alpha}^T)\varphi^{(l)} + [F]^T\,\{\sigma\}$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[F]_{.\alpha}^{T}\,\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha})\varphi^{(l)}\sqrt{g})_k H_k. \quad (4.24)$$

Складові векторів $\{\dot{\sigma}\}$,$\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}$, що входять до формули (4.24), характеризуються невизначеною залежністю від координатної змінної $\{\dot{\varepsilon}\}$ x^3; через $\mathrm{H_k}$ приведены залежні функції.

Для виведення лініарізованої матриці жорсткості криволінійного конічного призматичного елемента запишемо рівняння рівноваги в формі збільшення:

$$\delta(\Delta W) - \delta(\Delta A) = 0 \quad (4.25)$$

Приріст варіації енергії деформованого скінченного елемента визначається інтегральним співвідношенням:

$$\delta(\Delta W) = \sum_{l=0}^{L}\sum_{k=1}^{N}\delta\{u_l\}^T\,((([LE]^T\{\Delta\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[E]_{,\alpha}^{T}\,\{\Delta\dot{\sigma}\}_{,\alpha})\varphi^{(l)} +$$

$$+[F]^T\,\{\Delta\dot{\sigma}\} \quad + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[F]_{,\alpha}^{T}\,\{\Delta\dot{\sigma}\}_{,\alpha})\varphi_{,3}{}^{(l)})\sqrt{g})_k H_k \quad (4.25)$$

Коефіцієнти розкладу приростів напружень встановлюються через відповідні коефіцієнти розкладу приростів деформацій:

$$\{\Delta\dot{\sigma}\} = [D]\{\Delta\dot{\varepsilon}\},$$
$$\{\Delta\dot{\sigma}\}_{,\alpha} = [D]_{,\alpha}\{\Delta\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}, \quad (4.27)$$

Компоненти матриць $[D]$ і $[D]_{,\alpha}$ обчислюються З урахуванням термопластичної залежності фізико-механічних властивостей матеріалу [6].

Коефіцієнти розкладу приросту деформацій у (4.27) подаємо через прирости переміщень, що дозволяє перезаписати вираз (4.26) у матричній формі залежності деформацій від переміщень:

$$\delta(\Delta W) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{p=0}^{L} \delta\{u_l\}^T \left[K_{lp}^{\wedge}\right]\{\Delta u_p\} \qquad (4.28)$$

Позначення $\left[K_{lp}^{\wedge}\right]$ відповідає амплітудній лінеаризованій матриці жорсткості у спектральному поданні:

$$\left[K_{lp}^{\wedge}\right] = \sum_{k=1}^{N}(([E]^T[B][E]\varphi^{(t)}\varphi^{(p)} + [E]^T[D][F]\varphi^{(t)}\varphi_{,3}{}^{(p)} +$$

$$+[F]^T[D][E]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)} + +[F]^T[D][F]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)} +$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[E]_{,\alpha}^T[D]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi^{(l)}\varphi^{(p)} + [E]_{,\alpha}^T[D]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}$$

$$+[F]_{,\alpha}^T[D]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)} + +[E]_{,\alpha}^T[D]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)})\sqrt{g})_k H_k \qquad (4.29)$$

При побудові лінеаризованої матриці жорсткості зв'язні матриці між приростами напружень і деформацій змінюються внаслідок пластичної зміни матеріалу. Водночас у задачах пластичності доцільно використовувати початкову жорсткість, обчислену на першому пружному кроці [7–12].

Припустимо, що зв'язки між коефіцієнтами розкладання збільшення деформацій і напружень описується лінійним законом. Тоді в виразі (1.52) замість матриць $[D]$,$[D]_{,\alpha}$ увійдуть інші матриці $[C]$,$[C]_{,\alpha}$, складені компонентами тензора пружних постійних значень[7-12].

З урахуванням сформульованих припущень виводимо вираз для початкової матриці жорсткості скінченного елемента:

$$\left[K_{lp}^{\wedge}\right] = \sum_{k=1}^{N}(([E]^T[C][E]\varphi^{(l)}\varphi^{(p)} + [E]^T[C][F]\varphi^{(l)}\varphi_{,3}{}^{(p)} +$$

$$+[F]^T[C][E]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)} + [F]^T[C][F]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)} +$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[E]_{,\alpha}^T[C]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi^{(l)}\varphi^{(p)} + [E]_{,\alpha}^T[C]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)} +$$

$$+[F]_{,\alpha}^{T}[C]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)} + +[E]_{,\alpha}^{T}[C]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)})\sqrt{g})_k H_k \quad (4.30)$$

Важливим окремим випадком цієї методики, що дозволяє значно скоротити обсяг розрахунків, є аналіз тіл, у яких геометричні характеристики залишаються постійними вздовж координати розкладу, а змінюються лише фізичні параметри.

Для тіл зі сталою геометрією вздовж $z^{3'}$ ненульовими залишаються лише окремі компоненти тензора перетворень, пов'язані з поперечними деформаціями:

$$z_{,i}^{i'} \neq 0, z_{,2}^{1'} = z_{,1}^{2'} \neq 0 \quad (4.31)$$

Тоді, використовуючи ($g_{ij} = g_{mn}Z_{,i}^{m'}Z_{,j}^{n'}$), отримаємо, що компоненти g_{13} g_{23} g_{13}метричного тензора рівні нулю:

$$g_{13} = g_{23} = 0 \quad (4.32)$$

У цьому випадку зв'язок між коефіцієнтами деформацій і переміщень достатньо встановити в одному перерізі, оскільки відповідні матриці залишаються сталими вздовж координати. Це спрощує вираз для амплітудного вектора вузлових реакцій (4.24):

$$\{\bar{r}_l\} = \left(([E]^T \cdot I_1^{(l)} + [\bar{F}]^T \cdot I_2^{(l)}) + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[E]_{.\alpha}^{T} \cdot I_1^{(l)} + [F]^T \cdot I_1^{(l)})\right)\sqrt{g}, \quad (4.33)$$

де

$$I_1^{(l)} = \sum_{k=1}^{N}(\{\dot{\sigma}\}\,\varphi^{(t)}\sqrt{g})_k H_k, J_1^{(l)} = \sum_{k=1}^{N}(\{\dot{\sigma}\}\,\alpha\varphi^{(t)}\sqrt{g})_k H_k,$$

$$I_1^{(l)} = \sum_{k=1}^{N}(\{\dot{\sigma}\}\,\varphi^{(l)}\sqrt{g})_k H_k, J_1^{(l)} = \sum_{k=1}^{N}(\{\dot{\sigma}\}\,\alpha\varphi^{(l)}\sqrt{g})_k H_k,$$

$$I_2^{(l)} = \sum_{k=1}^{N} (\{\dot{\sigma}\}\, \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{g})_k H_k, J_2^{(l)} = \sum_{k=1}^{N} (\{\dot{\sigma}\}\, \alpha\varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{g})_k H_k, \quad (4.34)$$

Складові матриці, встановлюючи зв'язок коефіцієнтів розкладання деформацій і напружень в ряд Маклорена $[\bar{C}]$і$[\bar{C}]_{,\alpha}$обчислюються згідно ($C^{ijmn} = \lambda g^{mn} g^{ij} + \mu\left(g^{mi} g^{nj} + g^{mj} g^{ni}\right)$) через компоненти метричного тензора і величини $\lambda\left(z^{3'}\right)$ і $\mu\left(z^{3'}\right)$, які змінюються вздовж координати розкладання. Як налідок, компоненти матриць $[\bar{C}]$і$[\bar{C}]_{,\alpha}$ також ці величини змінні, але їх зручно подати як комбінацію сталої та змінної частин уздовж координати розкладу:

$$[\bar{C}] = \lambda\left(z^{3'}\right)[C]_{,\alpha} + \mu\left(z^{3'}\right)[\bar{C}]\mu\,,$$
$$[\bar{C}]_{,\alpha} = \lambda\left(z^{3'}\right)[C]\alpha\lambda + \mu\left(z^{3'}\right)[\bar{C}]\alpha\mu, \quad (4.35)$$

Тоді матриці $[\bar{C}]\alpha$, $[\bar{C}]\mu$, $[\bar{C}]\alpha\lambda$, $[\bar{C}]\alpha\mu$, достатньо визначити в одному з перерізів тіла, а чисельне інтегрування проводити, враховуючи тільки величини, залежні від $z^{3'}$.

З метою компактного подання виразів для коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного скінченного елемента зі змінними фізико-механічними характеристиками введемо наступні позначення:

$$J_1^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha\varphi^{(l)}\varphi^{(p)}\right)_k H_k,$$
$$J_2^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha\varphi^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)_k H_k,$$
$$J_3^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)}\right)_k H_k,$$
$$J_4^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)_k H_k$$
$$I_1^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\mu\varphi^{(l)}\varphi^{(p)}\right)_k H_k,$$

$$I_2^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\mu\varphi^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)\ {}_kH_k,$$

$$I_3^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\mu\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)}\right)\ {}_kH_k,$$

$$I_4^{lp} = \sum_{k=1}^{N} \left(\mu\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)\ {}_kH_k. \tag{4.36}$$

У такому разі матриця жорсткості скінченного елемента з урахуванням просторово змінних фізичних параметрів визначається за наступним співвідношенням:

$$\begin{gathered}
\left[\bar{K}_{lp}\right] = [\bar{E}]^T[\bar{C}_1]_{lp}[\bar{E}] + [\bar{E}]^T[\bar{C}_2]_{lp}[\bar{F}] \\
+[\bar{F}]^T[\bar{C}_3]_{lp}[\bar{E}] + \\
+[F]^T[\bar{C}_4]_{lp}[\bar{F}] + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[\bar{E}]_{,\alpha}^T[\bar{C}_1]_{,\alpha lp}[E]_{,\alpha} + \\
+[E]_{,\alpha}^T[\bar{C}_2]_{,\alpha lp}[\bar{F}]_{,\alpha} + [F]_{,\alpha}^T[C_3]_{,\alpha lp}[E]_{,\alpha} + \\
+[\bar{F}]_{,\alpha}^T[\bar{C}_4]_{\alpha lp}[\bar{F}]_{,\alpha}))\sqrt{g}
\end{gathered} \tag{4.37}$$

де

$$[\bar{C}_n]\ _{lp} = J_n^{lp}[\bar{C}_\lambda] + I_n^{lp}[\bar{C}_\mu],$$

$$[\bar{C}_n]\ _{,\alpha\ lp} = J_n^{lp}[\bar{C}\ ]\ _{,\alpha\ \lambda} + I_n^{lp}[\bar{C}\ ]\ _{,\alpha\ \mu}$$

4.3 Розв’язувальні співвідношення з урахуванням формозмінення

У геометрично нелінійній постановці просторових задач, згідно з підходом, прийнятим у роботах [12; 31; 33; 89-90], застосовується базисну декартову систему координат $Z^{i'}$ разом із локальною системою x^i, яка вважається жорстко зв’язаною з матеріалом, тобто деформується разом із середовищем. Положення будь-якої частинки у просторі в довільний момент часу описується відповідним радіус-вектором:

$$\bar{r} = \bar{r}(Z^i, t) \tag{4.38}$$

Припустимо, що початкова відлікова схема утворена векторами $\bar{r}_0$ в момент часу t_0, актуальна – векторами $\bar{r}_t = R$ в момент часу t. Виразимо в розгляді також відлікову перемінну конфігурацію, що відповідає певному моменту часу $\tilde{t}$, і є наближеною до t:

$$t = \tilde{t} + \Delta t \tag{4.39}$$

Позначимо метричні тензори для відповідних конфігурацій як $\hat{g}$, $\hat{\bar{g}}$, $\hat{G}$ (рис. 4.2). Приріст інтервалу часу Δt обрано таким чином, щоб зміни компонент метричного тензора при переході від проміжної конфігурації до актуальної залишалися малі порівняно з компонентами тензора G_{ij}, що характеризує початковий стан:

$$\Delta\hat{G} = \hat{G} - \hat{\bar{g}}, \qquad \Delta G_{ij} \langle\langle G_{ij} \tag{4.40}$$

Коваріантні компоненти метричних тензорів введених конфігурацій обчислюються аналогічно ($g_{ij} = Z^{m'}_{,i} Z^{n'}_{,j}$) через компоненти тензорів перетворення відповідних конфігурацій.

Для визначення компонент $\Delta\hat{G}$ запишемо вираз для радіус-вектора деякої точки в актуальній конфігурації $\bar{R}$, як суму вектора $\bar{r}_{\tilde{t}} = \bar{\tilde{r}}$ в перемінній відліковій конфігурації і вектора переміщень $\bar{u}$ (рис.4.3.):

$$\bar{R} = \bar{\tilde{r}} + \bar{u} \tag{4.41}$$

Використовуючи індексні позначення

$$Z^{m'} = \tilde{Z}^{m'} + u^{m'} \tag{4.42}$$

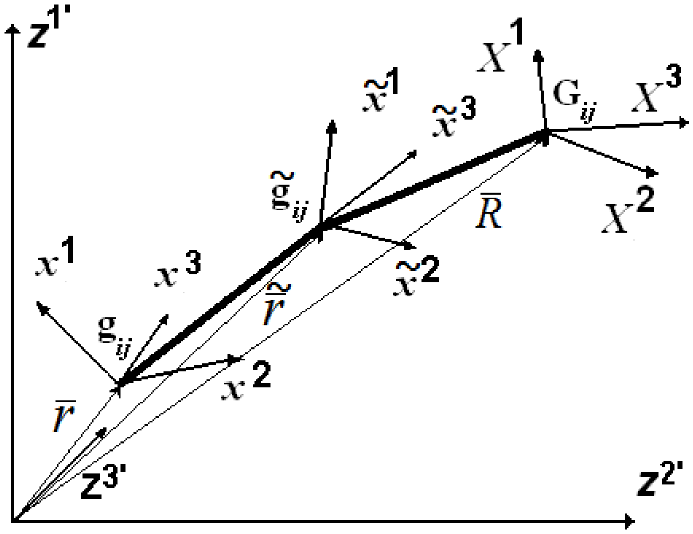


Рис.4.2. Метричні тензори $\hat{g}$, $\hat{\tilde{g}}$, $\hat{G}$

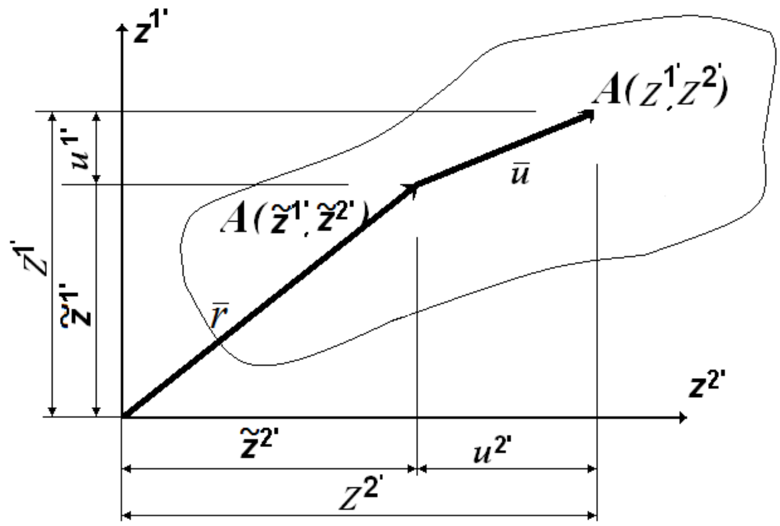


Рис 4.3. Загальний вигляд вектора переміщень $\bar{u}$

Компоненти тензора перетворення, що зв'язують локальну та базисну системи координат в актуальній конфігурації, визначаються як частинні похідні координат локальної системи за базисними координатами:

$$Z_{,i}^{m'} = \tilde{Z}_{,i}^{m'} + u_{,i}^{m'} \tag{4.43}$$

Коваріантні компоненти метричного тензора для актуальної конфігурації визначаються за виразом ($g_{ij} = Z^{m'}_{,i} Z^{n'}_{,j}$):

$$G_{ij} = Z^{m'}_{,i} Z^{m'}_{,j} \tag{4.44}$$

Записавши (4.44) з урахуванням (4.43), отримаємо:

$$G_{ij} = \tilde{Z}^{m'}_{,i} \tilde{Z}^{m'}_{,j} + \tilde{Z}^{m'}_{,i} u^{m'}_{,j} + u^{m'}_{,i} \tilde{Z}^{m'}_{,j} + u^{m'}_{,i} u^{m'}_{,j} = \tilde{g}_{ij} + \Delta G_{ij} \tag{4.45}$$

де

$$\Delta G_{ij} = \tilde{Z}^{m'}_{,i} u^{m'}_{,j} u^{m'}_{,i} + u^{m'}_{,i} u^{m'}_{,j} \tag{4.46}$$

Контрваріантні компоненти ΔG_{ij} визначаються з умови ортонормованості тензора метричних змін, яка має вигляд:

$$G^{ij} G_{jl} = \delta^i_l \tag{4.47}$$

або

$$\left(\tilde{g}^{ij} + \Delta G^{ij}\right)\left(g_{jl} + \Delta G_{jl}\right) - \delta^i_l = 0 \tag{4.48}$$

із виключенням доданків вищого порядку малості $\Delta G^{ij} \Delta G_{jl}$, отримаємо вираз:

$$\Delta G^{ij} g_{jl} + \tilde{g}^{ij} \Delta G_{jl} = 0, \tag{4.49}$$

Звідки

$$\Delta G^{ik} = -\tilde{g}^{ij} \Delta G_{jl} \tilde{g}^{lk} \tag{4.50}$$

У термінах міри Фінгера тензор деформацій в актуальній конфігурації записується як $\hat{F}$:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(F - \hat{G}\right) \tag{4.51}$$

Контрваріантні компоненти міри деформації Фінгера F^{ij} збігаються з відповідними компонентами метричного тензора g^{ij} відлікової конфігурації.

У цьому контексті контрваріантні компоненти тензора деформацій в актуальній конфігурації визначаються за співвідношенням:

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(F^{ij} - G^{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(g^{ij} - G^{ij}\right) \tag{4.52}$$

Використовуючи перемінну відлікову конфігурацію, запишемо (4.52) у вигляді суми:

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ij} - \tilde{g}^{ij} + \tilde{g}^{ij} - G^{ij}\right) = \tilde{\varepsilon}^{ij} + \Delta\varepsilon^{ij} \tag{4.53}$$

Через $\tilde{\varepsilon}^{ij}$ позначені компоненти тензора деформацій $\hat{\tilde{\varepsilon}}$ в перемінній відліковій конфігурації по відношенню до відлікової початкової:

$$\tilde{\varepsilon}^{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ij} - \tilde{g}^{ij}\right) \tag{4.54}$$

а через $\Delta\varepsilon^{ij}$- компоненти тензора приросту деформацій при переході від перемінної відлікової до актуальної конфігурації:

$$\Delta\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{ij} - G^{ij}\right) \tag{4.55}$$

Приріст контрваріантних компонент деформацій між проміжною та актуальною конфігураціями визначається як відхилення метричних параметрів поточного стану від проміжного:

$$\Delta\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{ij} - G^{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{ij} - \tilde{g}^{ij} - \Delta G^{ij}\right) = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\Delta G_{mn}\tilde{g}^{jn}, \quad (4.56)$$

а коваріантні компоненти

$$\Delta\varepsilon_{kl} = \Delta\varepsilon^{ij}G_{ik}G_{jl} \approx \Delta\varepsilon^{ij}\tilde{g}_{jl} = \frac{1}{2}\Delta G_{kl}. \quad (4.57)$$

Використовуючи вираз (4.46), запишемо коваріантні компоненти тензора приросту деформацій в актуальній конфігурації через переміщення:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\tilde{Z}^{m'}_{,i}u^{m'}_{,j} + u^{m'}_{,i}\tilde{Z}^{m'}_{,j} + u^{m'}_{,i}u^{m'}_{,j}\right). \quad (4.58)$$

З іншої сторони, приріст тензора деформацій $\Delta\hat{\varepsilon}$ може бути виражений, як добуток тензора швидкості деформації на Δt.

$$\Delta\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{ol} \cdot \Delta t. \quad (4.59)$$

Похідну Олдроїда від тензора $\hat{\varepsilon}$ подамо формулою [191]:

$$\hat{\varepsilon}^{ol} = \dot{\hat{\varepsilon}} - \nabla\bar{\vartheta}^{T}\hat{\varepsilon} \quad (4.60)$$

Приймаючи до уваги (4.51) і значення нуля, чому відповідає оператор $\nabla\hat{G} = 0$, маємо:

$$\hat{\varepsilon}^{ol} = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\hat{F}} - \dot{\hat{G}}\right) - \nabla\bar{\vartheta}^{T}\left(\hat{F} - \hat{G}\right) - \left(F - \hat{G}\right)\nabla\bar{\vartheta}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\nabla\bar{\vartheta}^{T}\hat{F} + \hat{F}\nabla\bar{\vartheta} - \dot{\hat{G}} - \nabla\bar{\vartheta}^{T}\hat{F} + \nabla\bar{\vartheta}^{T}\hat{G} - \hat{F}\nabla\bar{\vartheta} + \hat{G}\nabla\bar{\vartheta}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\dot{\hat{G}} + \nabla\hat{G}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial\hat{G}}{\partial t}. \quad (4.61)$$

Тоді при $\Delta t \to 0$

$$\Delta\hat{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\hat{G}}{\partial t}\Delta t = -\frac{1}{2}\Delta\hat{G}, \tag{4.62}$$

що еквівалентно покомпонентному запису (4.57).

Аналогічно до (4.53), напруження в актуальній конфігурації подається як суперпозиція напружень, сформованих у змінній відліковій конфігурації $\tilde{\sigma}^{ij}$, та приросту $\Delta\sigma^{ij}$, ззумовленого додатковими пружними деформаціями під час переходу до поточного стану:

$$\sigma^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}, \tag{4.63}$$

або, всі конфігураційні величини у виразі (4.63) можна подати відносно параметрів:

$$\sigma^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}, \tag{4.64}$$

Перейшовши до тензорної форми (4.63) і (4.64) запишемо у вигляді:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma} + \Delta\hat{\sigma} \tag{4.65}$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\hat{\sigma}} + \Delta\hat{\sigma} \tag{4.66}$$

де

$$\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j,$$

$$\hat{\hat{\sigma}} = \tilde{\sigma}^{ij}\vec{r}_i\vec{r}_j,$$

$$\Delta\hat{\sigma} = \Delta\sigma^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j,$$

$$\hat{\hat{\sigma}} = \tilde{\sigma}^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j$$

Тут $\hat{\bar{\sigma}}$ - тензор, що характеризує частку напружень в поточні конфігурації, обумовленими попередніми напруженнями, тобто переходом від початкової відлікової конфігурації до змінної відлікової.

Виходячи з (4.65), приріст напружень:

$$\Delta\hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \hat{\tilde{\sigma}}. \tag{4.67}$$

В цьому випадку $\Delta\hat{\sigma}$ є добуток матеріальної похідної $\dot{\hat{\sigma}}$ на Δt:

$$\dot{\hat{\sigma}}\Delta t = \hat{\sigma} - \hat{\tilde{\sigma}}. \tag{4.68}$$

Звідси виходить (4.66)

$$\Delta\hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \hat{\bar{\sigma}} \tag{4.69}$$

Такий підхід еквівалентний використанню об’єктивної похідної Олдроіда від тензора напружень [32]:

$$\hat{\sigma}^{ol}\Delta t = \hat{\sigma} - \hat{\bar{\sigma}} \tag{4.70}$$

Покажемо це.

$$\hat{\sigma}^{ol} = \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}\left(\hat{\bar{\sigma}} - \hat{\tilde{\sigma}}\right) = \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}\left(\tilde{\nabla}\vec{R}^{T}\hat{\tilde{\sigma}}\tilde{\nabla}\vec{R} \ - \hat{\tilde{\sigma}}\right). \tag{4.71}$$

Взявши до уваги, що

$$\nabla\vec{R} = \hat{E} + \nabla\vec{U}, \tag{4.72}$$

Маємо

$$\hat{\sigma}^{ol} = \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}\left(\hat{\hat{\sigma}} + \hat{\hat{\sigma}}\tilde{\nabla}\vec{U} + \tilde{\nabla}\vec{U}^T\hat{\hat{\sigma}} + \tilde{\nabla}\vec{U}^T\hat{\hat{\sigma}}\tilde{\nabla}\vec{U} - \hat{\hat{\sigma}}\right) =$$

$$= \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}\left(\hat{\hat{\sigma}}\tilde{\nabla}\vec{R}^T\nabla\vec{U} + \nabla\vec{U}^T\tilde{\nabla}\vec{R}^T\hat{\hat{\sigma}}\right). \quad (4.73) \qquad (4.73)$$

Враховуючи, що при $\Delta t \Delta 0$:

$$\vec{U} = \vec{v}dt,$$

$$\tilde{\nabla}\vec{R}\,\Delta\hat{E},$$

$$\tilde{\nabla}\vec{R}^T\Delta E,$$

$$\hat{\hat{\sigma}}\Delta\hat{\sigma},$$

отримано вираз об’єктивної похідної, що відповідає похідній, отриманої за Олдроідом:

$$\hat{\sigma}^{ol} = \dot{\hat{\sigma}} - \nabla\vec{v}^T\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\nabla\vec{v} \qquad (4.74)$$

У цій роботі розглядаються визначальні рівняння для ізотропного матеріалу за умови малих пружних деформацій. Як характеристика швидкості деформації використовується похідна Олдроїда від тензора деформацій, тоді як для оцінки швидкості зміни напруженого стану застосовується похідна Олдроїда від тензора Коші. Для ізотропних матеріалів можливе представлення швидкості деформації у вигляді суми трьох складових: пружної, пластичної та повзучої. Зважаючи на те, що

$$\Delta\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{ol}\Delta t, \qquad (4.75)$$

аналогічне розкладання можна записати і для приростів:

$$\Delta\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{l} + \Delta\hat{\varepsilon}^{\Delta} + \Delta\hat{\varepsilon}^{P} + \Delta\hat{\varepsilon}^{C}. \qquad (4.76)$$

Фізичні відношення для пружних складових запишемо в формі закону Гука для приростів:

$$\Delta\hat{\sigma} = \widehat{C}\Delta\hat{\varepsilon}^{l}, \tag{4.77}$$

де $\Delta\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{ol}\Delta t$

Збільшення температурних деформацій обчислюється за формулою:

$$\Delta\hat{\varepsilon}^{\Delta} = \hat{L}\nabla\vec{T}. \tag{4.78}$$

Пластичні та повзучі деформації визначаються на основі законів текучості та зміцнення матеріалу:

$$\Delta\hat{\varepsilon}^{P} = d\lambda_{P}\ \ \hat{S}, \tag{4.79}$$

$$\Delta\hat{\varepsilon}^{C} = d\lambda_{C}\ \ \hat{S}, \tag{4.80}$$

Наведені співвідношення (4.77)–(4.81) об'єктивні, а незалежність їх параметрів встановлена раніше.

Основні параметри рівняння стану визначаються експериментально за результатами випробувань циліндричних зразків при простому розтягу або стиску з варіюванням температури та швидкості деформування. Матеріал характеризується діаграмами зміцнення в координатах «інтенсивність напружень – параметр Одквіста», що за одномірного деформування відповідає інтенсивності логарифмічної деформації. Згідно з дослідженнями [7–12], такі діаграми адекватно описують нелінійну поведінку матеріалів за межею пружності у випадках великих деформацій, близьких до простих.

Для формулювання рівнянь нелінійного методу скінченних елементів (НМСЕ) використовується вираз для варіації енергії деформації криволінійного призматичного скінченного елемента в актуальній конфігурації:

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij}\delta G_{ij}\sqrt{G}dx^1dx^2dx^3. \qquad (4.81)$$

де G_{ij} - компоненти метричного тензора, що визначаються за формулою (4.45).

Враховуючи, що при варіюванні в актуальній конфігурації $\tilde{g}_{ij}$ залишається незмінним, перетворимо вираз (4.81):

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij}\delta\left(\Delta G_{ij}\right)\sqrt{G}dx^1dx^2dx^3. \qquad (4.82)$$

Переходячи до опису деформацій в актуальній конфігурації відповідно до співвідношення (4.57), отримаємо:

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} G^{ij}\delta\left(\Delta\varepsilon_{ij}\right)\sqrt{G}dx^1dx^2dx^3. \qquad (4.83)$$

Подавши компоненти тензорів деформацій та напружень у вигляді скінчених відрізків ряду Маклорена згідно з моментною схемою скінченних елементів (МССЕ) і провівши інтегрування за областю поперечного перерізу, отримаємо вираз для енергії деформації скінченного елемента в актуальній конфігурації у матричній формі:

$$\delta W = \int_{-1}^{1} \left(\left(\sigma\{\Delta\dot{\varepsilon}\}^{\,T}\right)\{\Delta\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12}\int_{\alpha=1}^{2} \left(\sigma\{\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}^{\,T}\right)\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}\right) \qquad (4.84)$$

де

$$\{\Delta\dot{\varepsilon}\}^{\,T} = \{\Delta\dot{\varepsilon}_{11}\; 2\Delta\dot{\varepsilon}_{12}\; \Delta\dot{\varepsilon}_{22}\; 2\Delta\dot{\varepsilon}_{23}\; 2\Delta\dot{\varepsilon}_{31}\; \Delta\dot{\varepsilon}_{33}\}^{\,T}.$$

$$\{\Delta\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}^{\,T} = \left\{\Delta\dot{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}\;\; 2\Delta\dot{\varepsilon}_{(3-\alpha)3,\alpha}\;\; \Delta\dot{\varepsilon}_{33,\alpha}\right\}^{\,T}.$$

Знаходимо варіацію приростів деформацій в актуальній конфігурації, використовуючи вираз (4.58):

$$\delta\left(\Delta\varepsilon_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(Z_{,i}^{m'}\delta U_{,j}^{m'} + Z_{,j}^{m'}\delta U_{,i}^{m'} + \delta\left(U_{,i}^{m'}U_{,j}^{m'}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\, \delta U_{,j}^{m'}\left(\tilde{Z}_{,i}^{m'} + U_{,i}^{m'}\right) + \delta U_{,i}^{m'}\left(\, \tilde{Z}_{,j}^{m'} + U_{,j}^{m'}\right)\right. \tag{4.85}$$

Взявши до уваги формулу (4.43), приведемо (4.85) до вигляду, аналогічному запису варіації приростів лінійної деформації:

$$\delta\left(\Delta\varepsilon_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(Z_{,i}^{m'}\delta U_{,j}^{m'} + Z_{,j}^{m'}\delta U_{,i}^{m'}\right) \tag{4.86}$$

Це демонструє варіанти збільшення деформацій і їх похідних в формі, однаковими з отриманими до цього виразами для незначних пластичних деформацій:

$$\delta\{\Delta\dot{\varepsilon}\} = \sum_{l=0}^{L} \left([E]\varphi^{(l)} + [F]\varphi_{.3}^{(l)}\right)\delta\{U_l\} \tag{4.87}$$

$$(\Delta\dot{\varepsilon})_{,\alpha} = \sum_{l=0}^{L} \left([E]_{.\alpha}\varphi^{(l)} + [F]_{.\alpha}\varphi_{.3}^{(l)}\right)$$

Елементи матриць $[E]$, $[F]$, $[E]_{.\alpha}$, $[F]_{.\alpha}$ визначаються по значенням компонент тензора перетворення, обчисленим в актуальній конфігурації.

Підставимо (4.87) в вираз варіації енергії деформації скінченого елемента (4.84) і після чисельного інтегрування по формулі Гауса, отримаємо:

$$\delta W = \sum_{l=0}^{L} \delta\{U_l\}\,\{r_l\} \tag{4.88}$$

де $\{r_l\}$ - вектор вузлових реакцій.

$$\{r_l\} = \sum_{k=1}^{N} \quad (((([E]^{\,T}\{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Z} \quad [E]^{\,T}_{,\alpha}\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha})\varphi^{(l)} +$$

$$+ \left([F]^{\,T}\left\{\dot{\sigma} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Z} \quad [F]^{\,T}_{,\alpha}\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}\right\}\varphi^{(l)}_{,3}\right)\sqrt{G})_{\,k}H_k \qquad (4.89)$$

За своєю структурою вираз (4.89) збігається з аналогічним, отриманим без врахування великих пластичних деформацій, однак записаний в актуальній конфігурації.

Під час розрахунку елементів лінеаризованої матриці жорсткості (з урахуванням зміни геометрії) використовуються раніше отримані співвідношення (4.30). Усі вхідні параметри при цьому обчислюються в змінній відліковій конфігурації на кожному кроці за параметром зсуву.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглянуто розв'язувальні рівняння напіваналітичного методу скінченних елементів для геометрично нелінійних задач. Основні результати дослідження демонструють наукову новизну та практичну цінність, забезпечуючи підвищення точності та ефективності чисельного моделювання складних механічних систем.

Розроблено нові скінченні елементи, які базуються на високоефективній моментній схемі скінченних елементів (МССЕ) з урахуванням формозмінення. Це забезпечило суттєве покращення точності визначення напружено-деформованого стану (НДС) призматичних тіл, зокрема зі змінними фізико-механічними властивостями.

Розроблено універсальний скінченний елемент у вигляді криволінійної призми, який дозволяє моделювати об'єкти зі змінними геометричними та фізичними характеристиками. Використання білінійного закону розподілу переміщень і температур сприяло спрощенню обчислювальних алгоритмів та оптимізації аналізу.

Формалізовано рівняння рівноваги та побудовано матрицю жорсткості для нових типів елементів із застосуванням чисельного інтегрування за формулою Гауса. Це забезпечило зниження обчислювальної складності при збереженні необхідного рівня точності.

У межах проведеного дослідження вперше враховано вплив великих пластичних деформацій шляхом використання об'єктивних похідних Олдроїда, що дозволило оцінити зміну механічних властивостей матеріалів у процесі деформування.

Результати дослідження сприяють вдосконаленню напіваналітичних методів аналізу геометрично нелінійних задач. Запропоновані підходи створюють основу для розробки чисельних моделей із підвищеною ефективністю та точністю, що є ключовим етапом у подальшому розвитку механіки суцільного середовища

РОЗДІЛ 5.
ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ТА СТРУКТУРИ

Одним із найважливіших і відповідальних етапів розробки методики чисельного аналізу конструкцій методом скінченних елементів є її програмна реалізація у вигляді спеціалізованого програмного комплексу на сучасних персональних комп'ютерах. Принципи побудови такого комплексу повинні враховувати сучасні вимоги до програмного забезпечення для розрахунку міцності на сучасних персональних комп’ютерах. До основних вимог належать: автоматизація основних етапів обчислювального процесу, раціональне використання ресурсів оперативної та зовнішньої пам’яті, універсальність щодо класів задач, які можуть бути вирішені, оптимізація алгоритмів для введення вхідних даних, дискретизація та розв’язання систем рівнянь. Крім того, структура програм повинна враховувати специфіку напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ), для якого досі не накопичено значного досвіду у створенні розвинених систем математичного забезпечення для просторових конструкцій, як це зроблено для традиційного варіанта МСЕ.

5.1 Розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь і обчислення напружень при деформуванні в умовах повзучості

Розв’язання задач для неоднорідних призматичних тіл зі стрічковою структурою зазвичай здійснюється із застосуванням методу блочних ітерацій (BIM). Розроблений алгоритм враховує як пружні, так і пружно-пластичні деформації в межах лінійної та нелінійної систем рівнянь. Метод покрокового інтегрування включає параметр BIM для розв’язання як лінійного, так і нелінійного набору виразів, представлених у рівнянні 5.1.

$$\{U_l\}_{n+1}^m = \{Ul\}_n^m + \omega_{on}[K_{ll}]^{-1}(\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m) \qquad (5.1)$$

де m - номер кроку, $\{Ul\}_n^m\{U_l\}_{n+1}^m$ коефіцієнти розкладання вектора вузлових переміщень для ітерацій $n+1$, ω_{on} параметр релаксації $(1 \leq \omega < 2)$, K_{ll} діагональна підматриця жорсткості системи, $\{Q_l\}^m$ позначає вектор вузлових навантажень, а $\{R_l\}_n^m$ позначає вектор вузлових реакцій на ітерації *n*.

Елементи діагональних підматриць ($[K_{ll}]$) визначаються вузловим обходом дискретної моделі та підсумовуванням коефіцієнтів матриць жорсткості відповідних скінченних елементів, прилеглих до даного вузла. У нелінійних задачах, що розв'язуються в реальному часі, матриця жорсткості визначається за припущенням про пружну природу матеріалу. Введення матриці жорсткості в задачах геометричної нелінійності здійснюється за допомогою виразу (1.55). Усі значення, що входять до матриці, визначаються в змінній опорній конфігурації на кожному кроці задання параметрів. Коректність цього підходу для розв'язування геометрично нелінійних задач обґрунтовано в [108]. Вектор вузлових навантажень $\{Q_l\}^m$ будується для кожного кроку навантаження. Для отримання виразу його компонент запишемо варіацію роботи зовнішніх сил для одного з вузлів, задається рівнянням 5.2.

$$\delta A = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \int_{-1}^{1} q_{m'(S_1S_2)} \delta Um_{(S_iS_2)} \sqrt{g} dx^3 \qquad (5.2)$$

Вузлові значення зовнішніх навантажень $q_{m'(S_1S_2)}$ обчислюються шляхом інтегрування прикладеного навантаження *q по* площі поперечного перерізу тіла. Кількісно це обчислюється за формулою трапеції. Після розкладання вузлових значень переміщень в ряд координатних функцій з використанням виразу (1.28), отримуємо рівняння 5.3 і 5.4.

$$\delta A = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \int_{-1}^{1} q_{m'(S_1S_2)} \sum_{l=0}^{L} \delta U_{m'(S_1S_2)}^{l} \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 \qquad (5.3)$$

$$\delta A = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^{L} q_{m'(S_1 S_2)}^{l} \delta U_{m'(S_1 S_2)}^{l} \tag{5.4}$$

де $q_{m(S_1 S_2)}^{l}$ компоненти вектора $\{Q_l\}$ і можуть бути визначені за формулою 5.5.

$$q_{m'(S_1 S_2)}^{l} = \int_{-1}^{1} q_{m'(S_1 S_2)}^{l} \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 \tag{5.5}$$

Застосування методу кількісного інтегрування вздовж третьої координати за формулою Гаусса дозволяє отримати рівняння (5.6).

$$q_{m'(S_1 S_2)}^{l} = \sum_{K=1}^{N} \left(q_{m'(S_1 S_2)} \varphi^{(l)} \sqrt{g} \right)_K H_K \tag{5.6}$$

Компоненти вектора вузлової реакції $\{R_l\}_n^m$ визначаються підсумовуванням відповідних компонент $\{r_l\}$ і повторенням цієї операції n разів. Компоненти вектора $\{r_l\}$ обчислюються за формулами (1.49), (1.58) або (1.30). У випадку силового навантаження значення векторів напружень та їх похідних, що входять у вираз для $\{r_l\}$ визначаються з рівняння 5.6.

Для обчислення напружень у конструкціях з температурними деформаціями коефіцієнти розкладу температурних компонент деформації в ряд Маклорена визначаються через вузлові значення вектора температури, як наведено в рівнянні (5.7).

$$\overset{0}{\varepsilon}{}_{ij}^{\theta} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \alpha_T T_{(S_1 S_2)} \overset{0}{g}_{ij}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}{}^{\theta}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \alpha_T T_{(S_1 S_2)} \Big(2S_{(3-\alpha)} \overset{0}{g}_{\alpha(\alpha)} +$$

$$+ 2\overset{0}{Z}, {}^{m'}\alpha \overset{0}{Z}, {}^{m'}\alpha(3-\alpha),$$

$$\overset{0}{\varepsilon}{}^{\theta}_{3\alpha,(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \alpha_T T_{(S_1 S_2)} \Big(2S_{(3-\alpha)} \overset{0}{g}_{3\alpha} +$$

$$+ 2\overset{q}{Z}, {}^{m'} 3\overset{0}{Z}, {}^{m'}\alpha(3-\alpha) + \overset{0}{Z}, 3(3-\alpha)\overset{0}{Z}, {}^{m'}\alpha \Big)$$

$$\overset{0}{\varepsilon}{}^{\theta}_{33,\alpha} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\ \sum_{S_2=\pm1}\ \alpha_T T_{(S_1S_2)}(2S_\alpha \overset{0}{g}_{33} + 2\overset{0}{Z}, \ \overset{m'}{\ }3\overset{0}{Z},{}^{m'}3\alpha)) \qquad (5.7)$$

Векторне представлення співвідношення (2.7) ілюструє рівняння 5.8.

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\}^{\theta} = [L]\{T\}, \left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\}^{\theta}, \alpha = [\mathrm{L}], \alpha\{\mathrm{T}\}, \qquad (5.8)$$

де $\{T\}^T = \left\{\left\{T_{(-1,-1)}, T_{(1,-1)}, T_{(1,1)}\right\}\right\}^T$

Оскільки зв'язок між напруженнями та деформаціями описується законом Гука (1.12), то для напружень, викликаних діями температури, можна записати (5.9).

$$\left\{\overset{0}{\sigma}{}^{\theta}\right\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad (5.9)$$

Якщо об'єкт із змінними фізико-механічними властивостями та сталою геометрією піддається температурному навантаженню, то для обчислення напружень у виразі можуть бути застосовані відповідні спрощення. Подібним чином напруження та їхні похідні коригуються з урахуванням пластичних деформацій і повзучості відповідно до прийнятому закону стану за допомогою методу, описаного в [36].

Компоненти девіатора $\overset{*ij}{S_n}$ після корекції виражається рівнянням 5.10.

$$\overset{*ij}{S_n} = \overset{ij}{S_n}\frac{\tau_S}{\tau} \qquad (5.10)$$

На початку кожного часового кроку, коли одночасно відбуваються пластичні деформації та повзучість, розраховується межа повзучості. Ця межа залежить від температури, параметра зміцнення та швидкості деформації повзучості й визначається ітераційним методом за формулою [36]:

$$\tau_c^m = \left[\frac{\varepsilon_c^{n-1}}{\alpha}(\psi)^\beta\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tau_c^m = \left[\frac{\varepsilon_c^{n-1}}{\alpha}(\psi)^\beta\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (5.11)$$

де $\alpha, \beta,$ і γ контакти, визначені для даного матеріалу при даній температурі; ε_c^{n-1} швидкість деформації повзучості, обчислена на *ітерації* $n-1$. Тоді τ_s і τ_c порівнюються. Якщо $\tau_c \leq \tau_s$то пластичні деформації відсутні і напруження коригуються лише на деформацію повзучості. Якщо $\tau_c > \tau_s$ то можуть виникати тільки пластичні деформації.

У роботі [41] запропоновано модифікацію методу Ньютона-Канторовича для розв'язання фізично та геометрично нелінійних задач у площині в осесиметричній постановці. Модифікація передбачає екстраполяцію вектора переміщення, обчисленого на попередньому кроці. Ефективність екстраполяції вектора переміщень із застосуванням методу блочних ітерацій (BIM) досліджено на прикладі осідання плоскої балки квадратного поперечного перерізу, розташованої між жорсткими плоскопаралельними пластинами. Максимальна величина осідання по висоті досягла 15%. Поєднання методу скінченних елементів (МСЕ) з екстраполяцією вектора переміщень дозволяє зменшити кількість ітерацій більш ніж у п'ять разів порівняно з немодифікованим алгоритмом, зберігаючи аналогічну точність.

5.2 Структура обчислювального комплексу

Організаційно розроблений на основі НМСЕ комплекс є одним із компонентів подальшого розвитку системи «Міцність». Він реалізований на персональних програмно-керованих пристроях для обробки інформації мовою програмування загального призначення Fortran, яка є однією з найбільш поширених алгоритмічних мов високого рівня.

Ряд особливостей Fortran, таких як можливість створення програм із автономних, незалежних підпрограм, необов’язковість опису багатьох об’єктів, наявність великої бібліотеки стандартних програм і розвинуті засоби введення-виведення інформації, роблять його особливо зручним для розв’язання задач науково-технічного характеру.

З ієрархічної точки зору, PRIZMA є елементом першого рівня – проблемно-орієнтованою підсистемою, розробленою для аналізу в пружній та пружно-пластичній постановках масивних і тонкостінних довільно навантажених призматичних просторових конструкцій із різноманітними граничними умовами на торцях. Елементи другого рівня включають розділи, які забезпечують універсальність комплексу щодо класу задач, які можна розв’язувати. Наразі функціонують два розділи:

- PRIZF – аналіз призматичних тіл із граничними умовами на торцях, що відповідають обпиранню на абсолютно жорстку в своїй площині та гнучку з неї діафрагму;
- PRIZP – аналіз призматичних тіл із довільними граничними умовами на торцях.

У розділі PRIZF як система координатних функцій використовуються ряди Фур’є, а в PRIZP – поліноми.

Одним із основних засобів оптимізації використання ресурсів оперативної пам’яті сучасних персональних комп’ютерах є сегментація розділів за гілками завантаження (рис. 5.1), які являють собою елементи третього рівня.

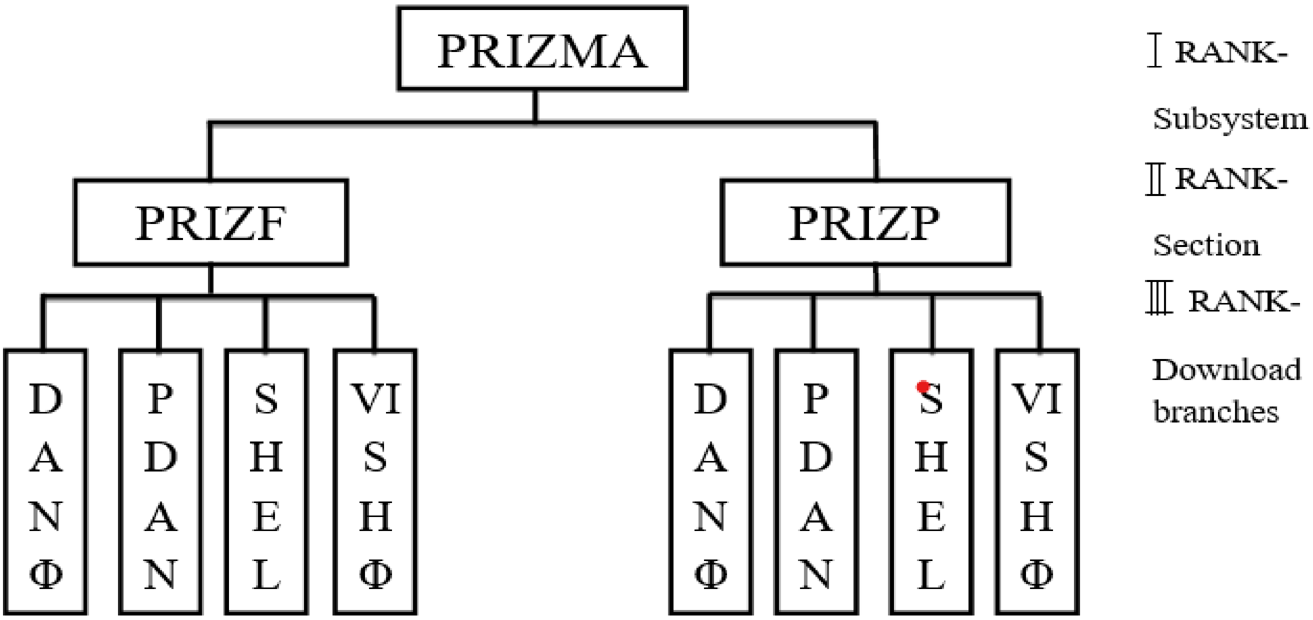


Рис.5.1. I– РАНГ – Підсистема; II– РАНГ – Розділ; III– РАНГ Гілки завантаження

Розглянемо організаційну структуру окремого розділу:

- PRIZF (PRIZP) – ім’я розділу та керуючої програми, яка формує опис загальних для всіх рівнів завантаження масивів інформації, визначає порядок звернення та фактичні імена гілок завантаження. Звернення до кожної гілки виконується за допомогою оператора CALL LOAD GФ, фактичним параметром якого є дійсне ім’я відповідної гілки завантаження. Виклик підпрограм SHELF (SHELP) і VISHФ організовано в циклі, що модерує кроковий процес навантаження об’єкта.
- DANФ – ім’я керуючої підпрограми гілки введення та обробки вихідних даних.
- PDANФ – ім’я керуючої підпрограми гілки для контрольного друку перетворених вихідних даних.
- SHELF (SHELP) – ім’я керуючої підпрограми гілки формування та розв’язання системи рівнянь.
- VISHФ – ім’я керуючої підпрограми гілки обробки та друку результатів розрахунку.

Така організація комплексу забезпечує автоматизацію всіх етапів розв'язання задачі, починаючи з введення вихідних даних і закінчуючи формуванням результатів розрахунку.

Крім того, комплекс дозволяє повною мірою застосовувати засоби економії оперативної пам'яті, зокрема:

- об'єднання масивів інформації, що використовуються в різних підпрограмах, у загальні блоки;
- введення додаткової еквівалентності масивів;
- виклик і завантаження системних програм форматного вводу-виводу лише у гілках PDANФ та VISHФ.

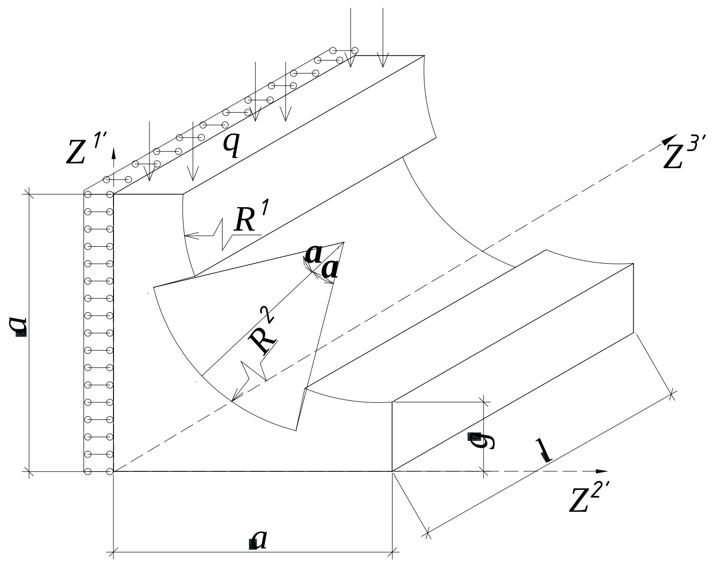
Усі гілки одного розділу формуються з певного набору елементів четвертого рівня – блоків. Завдяки цьому, а також модульній організації основних алгоритмів і програм, забезпечується гнучкість комплексу щодо способів задання вхідних даних, методів дискретизації, розв'язання систем рівнянь, а також форм представлення результатів розрахунку.

5.3 Задання, обробка і друк вхідної та вихідної інформації

Для виконання розрахунку конкретної конструкції необхідно задати вихідні дані, що характеризують її типологію, геометричні параметри, умови закріплення, зовнішні впливи, фізико-механічні властивості матеріалу, а також параметри, які визначають організацію крокового процесу навантаження. До таких параметрів належать точність розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь, організація контрольного друку, а також видача проміжних і кінцевих результатів.

Основними вимогами до вхідної та вихідної інформації є мінімізація її обсягу за умови збереження повноти змісту. Однак використання вихідної інформації у її початковому вигляді значно збільшує час розрахунку. У зв'язку з цим у комплексі передбачено ще один тип інформації – оперативна, яка використовується безпосередньо в процесі розв'язання задачі.

У комплексі PRIZMA за основу прийнято регулярні топологічні структури. Метод опису інформації оперативного рівня розглянемо на прикладі конструкцій, зображених на рис. 5.2.



$$U_{3'}\left(Z^{3'}=0\right)=0$$

$$U_{i'}\left(Z^{3'}=I\right)=0$$

Рис. 5.2. Розрахнкова схема моделі

Характерною перевагою нелінійного методу скінченних елементів (НМСЕ) є те, що в напрямку x^3 уся конструкція апроксимується лише одним призматичним скінченним елементом, що дозволяє значно редукувати обсяг обчислюваних даних до задачі, близької за складністю до двовимірної (за винятком інформації про зовнішні впливи). Розрахункова модель у цьому випадку являє собою сукупність призматичних елементів, сформованих на основі координатних ліній x^α (рис. 5.3.) просторової конфігурації конструкції.

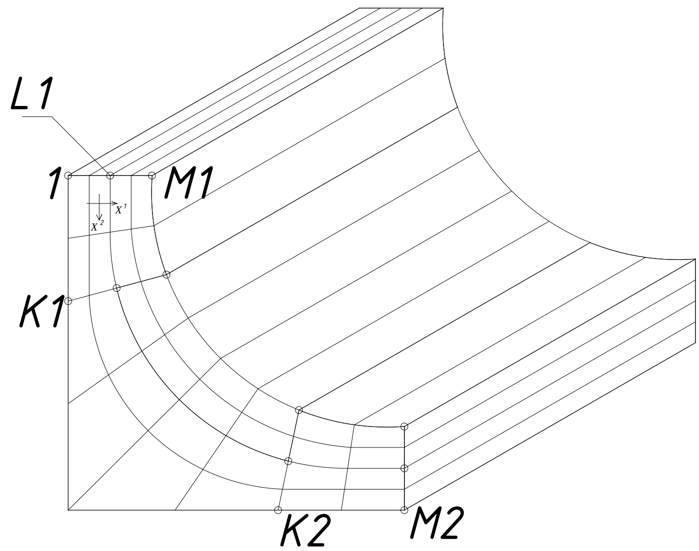


Рис. 5.3. Розрахункову модель представлена набором призматичних скінчених елементів

Прийнявши точку відліку в лівому верхньому куту конструкції, вводимо нумерацію вузлів сіткової області відповідно вздовж першої криволінійної координати x^1 від I до M1 та вздовж другої координати x^2 від I до M2. Напрям осей x^α обирається так, щоб при повороті вони могли співпасти по напрямку з осями базисної системи $Z^{\beta'}$ Крім того має виконуватись умова:

$$M1 \;=\; M2 \tag{5.12}$$

це зумовлено тим, що за такого підходу забезпечується мінімальна ширина стрічки матриці при однаковій кількості невідомих, що значно підвищує ефективність чисельного аналізу. Кожен вузол конструкції визначається набором числових індексів уздовж відповідних напрямків, утворюючи впорядковану систему сіткових координат. У цій системі область поперечного перерізу конструкції стає еквівалентною прямокутнику, поділеному на регулярну структуру однакових квадратних елементів з одиничними розмірами (рис. 5.4).

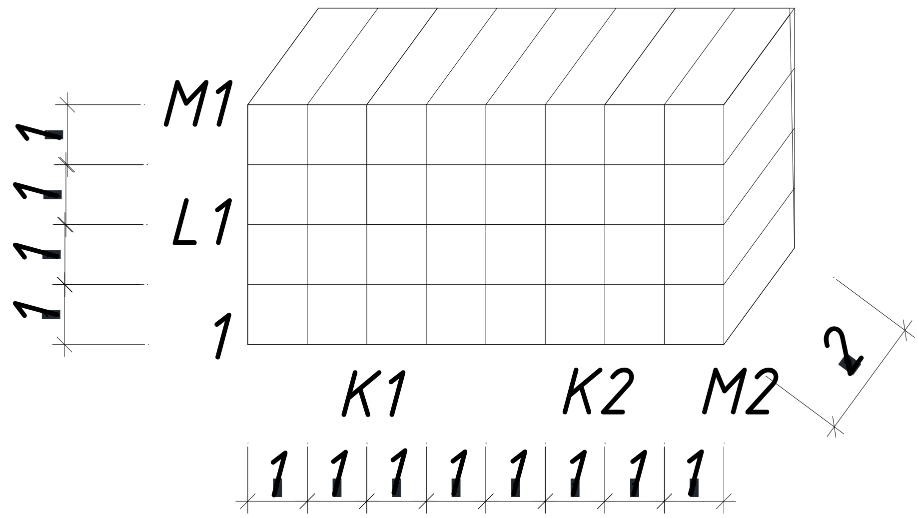


Рис. 5.4. Загальний вигляд системі сіткових координа

Нехай $HMS = M1 \times M2$ – загальна кількість вузлів сіткової області. Введемо у розгляд наскрізну нумерацію вузлів від I до HMS в такому порядку, щоб номер N вузла з сітковими координатами I,J був рівний

$$N(I,J) = I + M1 \times (J - 1) \tag{5.13}$$

де I – сіткова координата вузла N вздовж осі x^1, J - сіткова координата вузла N вздовж осі x^2.

Будемо вважати номером СЕ мінімальний номер однієї з чотирьох вершин сіткового квадрату, орієнтованого в місцевій системі координат (рис. 5.3 та 5.5). Параметри S_1 та S_2 можливо умовно назвати відносними координатами вершин елементу. Значення наскрізних номерів NU вузлів сіткової області, що співпадають з вершинами N –го квадрату, виражаються через відносні координати S_1 та S_2 та номер N формулою:

$$NU = \frac{1+S_1}{2} + M1\frac{1+S_2}{2} + N \tag{5.14}$$

Параметри сіткової області M1, M2, HMS та блок, що реалізує обчислення наскрізних номерів вузлів по параметру N та формулі (3.3), визначають оперативний рівень інформації, що характеризує впорядкованість розглянутої топологічної структури.

Оперативна інформація про наявність «пустих» елементів, що утворюють порожнини та вирізи, кодуються в масиві $F(HMS)$. Вузлам з сітковими координатами I $=$ M1 та $J = M2$ також відповідають «пусті» елементи.

Жорсткі зв'язки накладаються у напрямку, що співпадає з координатними вісями системи $Z^{\beta'}$, та можуть перешкоджати переміщенням вузлів сіткової області по всій довжині призматичного тіла або тільки в торцях. В першому випадку оперативна інформація кодується в масиві $F(HMS)$, у другому – в масиві $FTP(HMS)$.

Геометричні дані оперативного рівня, що відображають особливості форми об'єкту в перерізі $Z(2, HMS)$. В перемінних $Z(K, N)$ поля координат перший індекс приймає значення I, 2 та відповідає напрямку координатної осі, другий - наскрізному номеру вузла сіткової області.

Оперативна інформація про значення координатних функцій та їх похідних по осі x^3, що обчислюються в точках інтегрування, формується в масивах $FI(K, L)$ та $FI3(K, L)$ відповідно. Індекс K змінюється від I до NUL, L - від I до KZZ, де NUL – число членів, що утримуються від розкладання, KZZ – кількість точок інтегрування. Координати точок інтегрування заносять до масиву $Z3(KZZ)$.

Оперативні дані, що використовуються підпрограмою обчислення компонент тензора пружних сталих, визначаються за формулою:

$$G1 = \frac{E}{1+\nu};\ G2 = \frac{\nu}{1-2\nu} \tag{5.15}$$

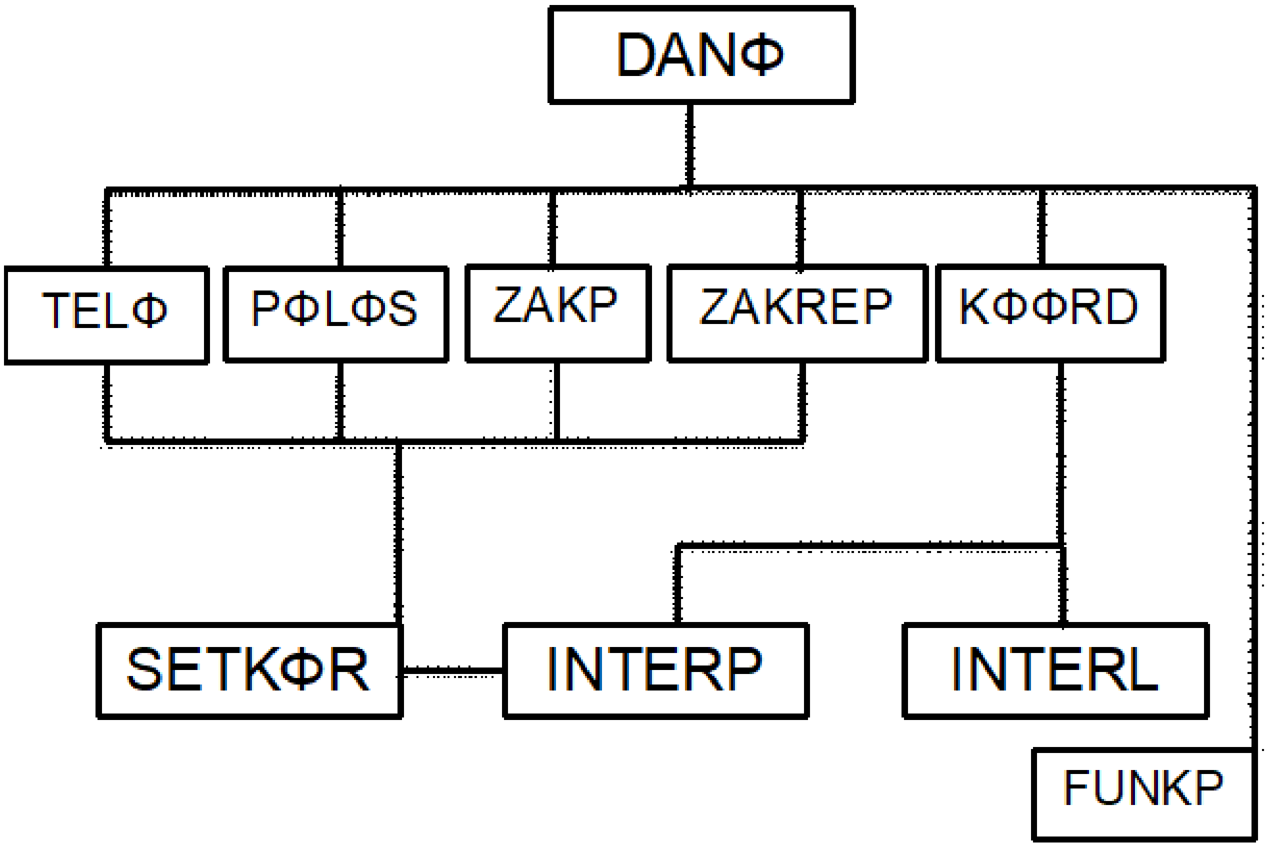


Рис. 5.5. Функціональна схема DANФ

Задачу вихідних даних та перетворення цих даних в масиви оперативної інформації виконує гілка програм DANФ за допомогою операторів присвоювання чи в декларативній частині за допомогою операторів DATA.

Формування топологічної частини кодів масиву відповідно до вхідних даних здійснюють підпрограми

$$TEL\Phi\ (I1, J1, I2, J2, F, HMS)$$
$$P\Phi L\Phi S(I1, J1, I2, J2, F, HMS)$$

Підпрограма TELФ для вузлів N(I,J) з сітковими координатами, що задовольняють умову:

$$I1\ \leq\ I < I2\ ,\ J1\ \leq J < J2 \tag{5.16}$$

посилає в чарунку масиву F(N) число 71, а в чарунки, сіткові координати яких

$I = I2$ або $J = J2$ – число 7.

Підпрограма PΦLΦS здійснює в масиві F наступні зміни:

$$F(N) = F(N) - 71, (I1 \leq I < I2, J1 \leq J < J2),$$
$$F(N) = F(N) - 64, (I = I1, J = J1)$$

Якщо у вузлі N(I,J) сходяться тільки «пусті» скінчені елементи, то у чарунку масиву F(N) посилається нуль.

Перетворення вхідної інформації в оперативну про геометричні зв'язки, перешкоджаючи переміщенням вузлів сіткової області по всій довжині призматичного тіла, виконує підпрограма

$$ZAKP\ (I1, J1, I2, J2, MN, F, HMS)$$

де MN – умовне число, що визначається в залежності від наявності переміщення $U_{i'}$по направленню $Z^{i'}$або рівність їх нулю (див. табл. 5.1.)

Таблиця 5.1

MN	Z^1	Z^2	Z^3
1	0	U_2	U_3
2	U_1	0	U_3
3	0	0	U_3
4	U_1	U_2	0
5	0	U_2	0
6	U_1	0	0
7	0	0	0

Після звернення до програми ZAKP в масиві $F(HMS)$ для вузлів N(I,J), що задовольняє умови:

$$I1 \leq\ I \leq I2\,,\ \ J1\ \leq J \leq J2 \qquad (517)$$

значення кодів у чарунках F(N) зменшується на величину числа MN.

При відсутності кріплень на торцях тіла в усі чарунки масиву FTP(HMS) заноситься число 77. Вхідна інформація про наявність геометричних зв'язків у вузлах $N(I,J)$ на торцях тіла перетворюється в оперативну підпрограму

$$ZAKREP(I1, J1, I2, J2, LN, FTP, HMS)$$

де десятки $L(\mathrm{x}^3 = -1)$ та одиниці $N(x^3 =\ 1)$ числа LN підбираються аналогічно умовному числу MN.

Обчислення координат вузлів дискретної моделі та оформлення їх в масив $Z(2, HMS)$ виконує підпрограма

$$K\Phi\Phi RD\ (N1, \ldots, NN, I1, \ldots, IN, Z, HMS)$$

що складається в термінах мови ФОРТРАН. У процесі роботи підпрограма KФФRD використовує модулі типу INTERL, INTERP і т.д., що дозволяють задавати вхідну інформацію укрупненими блоками, межі яких визначені значенням сіткових координат (N1,…,NN) та (I1,…,IN).

Визначення сіткових координат вузла з номером N в напрямку K виконує блок

$$SETK\Phi R\ (N, K)$$

Заповнення масивів $FI(NUL, KZZ)$ та $FI3(NUL, KZZ)$, значенням координатних функцій та їх похідних по x^3, обчисленими в точках інтегрування, при розкладі переміщення по поліномам відбувається в результаті роботи підпрограми

$$FUNKP\ (F1, FI3, NUL, KZZ)$$

Цю операцію для рядів Фур'є виконує підпрограма

$$FUNKF(F1, FI3, NUL, KZZ)$$

Розглянемо варіанти опису вихідних даних в програмі DANΦ на прикладі конструкції, зображеної на рис. 5.2. Для зручності задання вхідної інформації введемо у розгляд сітку мінімальної густоти, відображаючу основні геометричні, фізичні та кінематичні особливості об'єкта, яку будемо називати опорною. Вузли опорної сітки на рис. 5.3 та 5.4 відмічені подвійними кругами, а сіткові координати цих вузлів представляють сукупність чисел (I,M1,L1) по першому напрямку і (I,K1,K2,M2) по другому. В цьому випадку текстовий модуль вхідної інформації має вигляд:

$$M1 = 5 \langle \quad \rangle M2 = 9 \langle \quad \rangle NUL = 5 \langle \quad \rangle KZZ = 9$$

$$HMS = M1 \times M2$$

$$L1 = 3$$

$$K1 = 3 \langle \quad \rangle K2 = 7$$

$$CALL\ TEL\Phi(1{,}1, M1, M2, F, HMS)$$

$$CALL\ P\Phi L\Phi S(L1, K1, M1, K2, F, HMS)$$

$$CALL\ ZAKR\left(1{,}1{,}1, \frac{(M2+1)}{2{,}2}, F, HMS\right)$$

$$CALL\ ZAKREP(1{,}1, M1, M2{,}47, FTP, HMS)$$

$$CALL\ K\Phi\Phi RD(L1, K1, K2, Z, HMS)$$

$$CALL\ FUNKP(FI, FI3, NUL, KZZ)$$

$$G1 = \frac{E}{(1+V)} \langle \quad \rangle G2 = \frac{V}{(1.2.\times V)}$$

Крім того в програмі DANΦ задається кількість кроків за навантаженням IT; параметр EPS, визначаючий точність розв'язання систем лінійних рівнянь; логічна константа KΦR, негативному значенню якої відповідає розв'язання в лінійній постановці, додатному – в пружно – пластичній. Обчислення вектору зовнішнього впливу $\{Q\}$ походить виходячи з вираження варіації роботи зовнішніх сил, записаного для вузла з номером N:

$$\delta A = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} P^k \delta U_k \sqrt{g_{33}}\, dx^3 \tag{5.18}$$

де P^k – інтенсивність зовнішнього навантаження у вузлі вздовж координати x^3. Виражаючи переміщення поліномами, отримуємо:

$$\delta A = \sum_{l=0}^{L} q_{(l)}^k \delta U_k^{(l)} \tag{5.19}$$

де

$$q_{(l)}^k = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} P^k \sqrt{g_{33}}\, dx^3 \tag{5.20}$$

Елементи вектора $\{Q_l\}$ обчислюючи на основі чисельного інтегрування за формулою:

$$q_{(l)}^k = \sum_{m=1}^{M} (\varphi^{(l)} P^k \sqrt{g_{33}} Hm)_{(x_m^3)} \tag{5.21}$$

та заносяться у масив $Q(3, HMS)$. У змінних Q(K,N) значення індексів K та N мають той же зміст, що і при описанні поля координат. Аналогічно визначаються елементи вектора $\{Q_l\}$ та при використанні тригонометричних рядів. Задання інтенсивності компонентів вузлових значень зовнішнього навантаження P^kв точці інтегрування m для лінії, що проходить через вузол з номером N, виконується програмою $QRA\Phi N(K, N, MI, X, HMS)$, де параметр MI змінюється від I до M.Компактність подання та надійність засобів перетворення вхідної інформації в оперативну дозволяють значно знизити кількість помилок у вихідних даних. Контроль правильності даних зводиться до перевірки несуперечливості заданої інформації та візуального контролю за допомогою друку масивів оперативної інформації. Друк топологічних, геометричних та інших даних виконується за допомогою підпрограми PDANΦ, функціональна схема якої зображена на рис. 5.6.

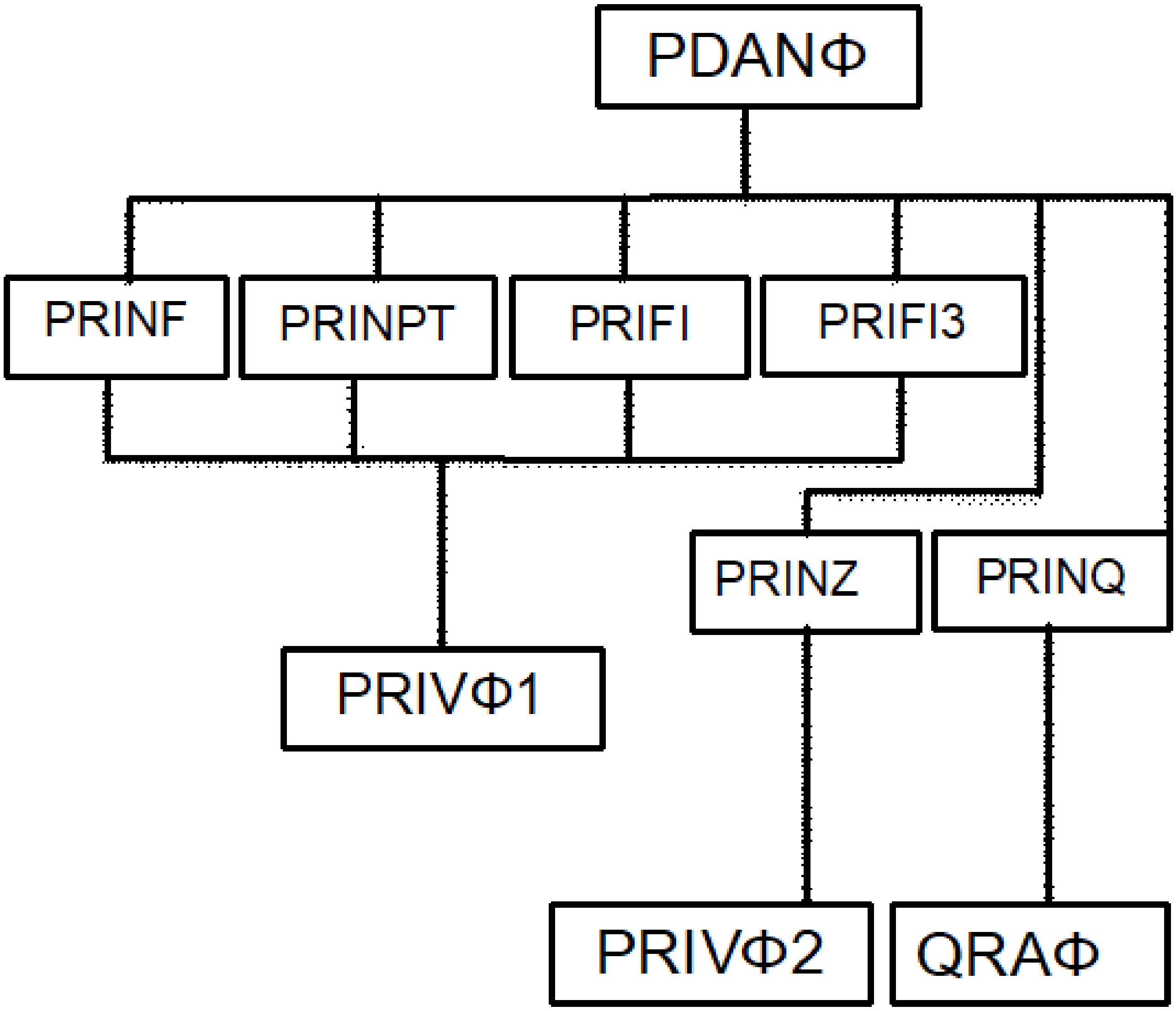


Рис. 5.6. Функціональна схема PDANΦ

Друк масивів оперативної інформації $F\mathrm{TP}(HMS)$, $F(HMS)$, $FI(NUL, KZZ)$, $FI3(NUL, KZZ)$, $Z(2, HMS)$ та значення інтенсивності навантажень в точках інтегрування здійснюється програмами PRINF, PRINPT, PRIFI, PRIFI3, PRINZ, PRINQ у формі таблиці за допомогою модулів PRIVΦ1 та PRIVΦ2. Передбачено відключення друку тих чи інших масивів за набором логічних констант, що задаються в підпрограмі DANΦ. Кінчевим результатом розв'язання задачі є масиви інформації, відображаючи стан дискретної моделі в різні моменти часу, які зберігаються на зовнішніх запам'ятовуючих пристроях. Їх читає, обробляє та видає гілка програми VISHФ, функціональна схема якої представлена на рис. 5.7.

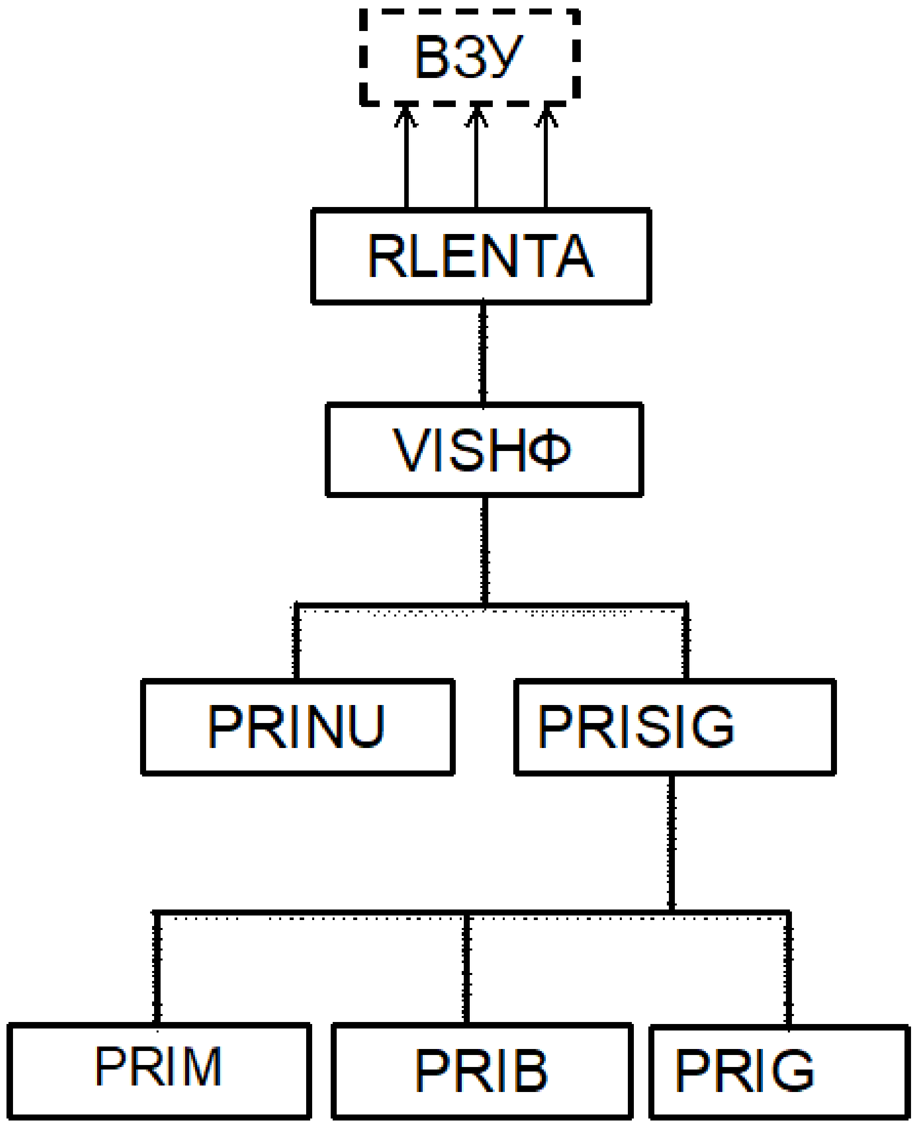


Рис. 5.7. Функціональна схема ВЗУ

Під час розв'язання лінійних задач звернення до програми VISHФ здійснюється одноразово після завершення розв'язання системи лінійних рівнянь. Зчитування масивів вузлових переміщень та напружень, обчислених у точках інтегрування, виконується за допомогою програми RLENTA, а їх друк здійснюється модулями PRINU (для переміщень) та PRISIG (для напружень).

Перетворення вихідних значень напружень, отриманих у локальній системі координат, виконують модулі PRIM, PRIB та PRIG залежно від структури об'єкта та конкретних цілей дослідження. Наприклад, під час аналізу тонкостінних конструкцій напруження доцільно подати у локальній криволінійній системі координат та вивести на друк фізичні величини, визначені за формулою:

$$\widetilde{\sigma^{ij}} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}} \tag{5.22}$$

Для масивних тіл іноді виникає необхідність надрукувати напруження в глобальній системі координат. Перетворення компонент тензора напружень в цьому випадку виконується за формулою:

$$\sigma^{(m'n')} = \sigma^{ij} Z^{(m')}_{(,i)} Z^{(n')}_{(,j)} \tag{5.23}$$

Крім того для характеристики напруженого стану конструкції складної форми більше значення мають головні напруження:

$$\sigma^{\alpha} = \frac{\sigma^{1'1'}+\sigma^{2'2'}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^{1'1'}+\sigma^{2'2'}}{2} + (\sigma^{1'2'})^2} \tag{5.24}$$

Направлення площин, на які діють головні напруження, характеризуються кутом α:

$$tg2\alpha = \frac{2\sigma^{1'2'}}{\sigma^{1'1'}-\sigma^{2'2'}} \tag{5.25}$$

Під час розв’язання лінійних задач звернення до VISHФ здійснюється на кожному кроці навантаження. На друк виводяться такі параметри: номер кроку, кількість ітерацій, переміщення вузлів сіткової області, компоненти тензора напружень, інтенсивність дотичних напружень та інтенсивність пластичних деформацій.

5.4 Розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь і обчислення напружень при пружно-пластичному деформуванні

Розв’язання системи лінійних та нелінійних рівнянь на черговому кроці навантаження здійснюються методом блочної ітерації, який для НМСЕ можливо представити формулою [82]:

$$\{U_l\}_n = \{U_l\}_{n-1} + \omega_{on}[K_{ll}]^{-1}(\{Q_l\} - \{R_l\}_n) \qquad (5.26)$$

де $\{U_l\}_n$ та $\{U_l\}_{n-1}$ – вектори вузлових переміщень на ітераціях n і n-1 відповідно;

ω_{on} – коефіцієнт релаксації $(1 \leq \omega_{on} < 2)$;

$[K_{ll}]$ – діагональна підматриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

$\{Q_l\}$– вектор вузлових навантажень;

$\{R_l\}_n$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n;

Схема обчислювального процесу, реалізую чого формулу (3.15), включає наступні операції: визначення векторів правих частин для гармоніки l, як різниця між вузловими навантаженнями $\{U_l\}$ та вузловими реакціями $\{R_l\}_n$. На першій ітерації першого кроку за навантаженням формування і зведення блочним методом Гаусса [98] до трикутного вигляду діагональних підматриць $[K_{ll}]$.

Обчислення приросту коефіцієнтів розклад переміщень $\{\Delta U_l\}_n$ (зворотній хід методу Гауса). Підрахунок чергових наближень коефіцієнтів розкладу переміщення:

$$\{U_l\}_n = \{U_l\}_{n-1} + \{\Delta U_l\}_n \qquad (5.27)$$

Визначення переміщень та їх похідних по x3 в точках інтегрування.

Перевірку на закінчення ітераційного процесу, основану на виконанні умови:

$$\sum_{l=0}^{L}\{\Delta U_l\}_n^2 \leq (\{U_l\}_n^2)\varepsilon \qquad (5.28)$$

де ε – число, яке вказує, у скільки разів сума квадратів приростів повинна бути меншою за суму квадратів чергового наближення коефіцієнтів розкладання переміщень. Функціональна схема гілки програм, що реалізують розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь на одному кроці навантаження, представлена на рис. 5.8.

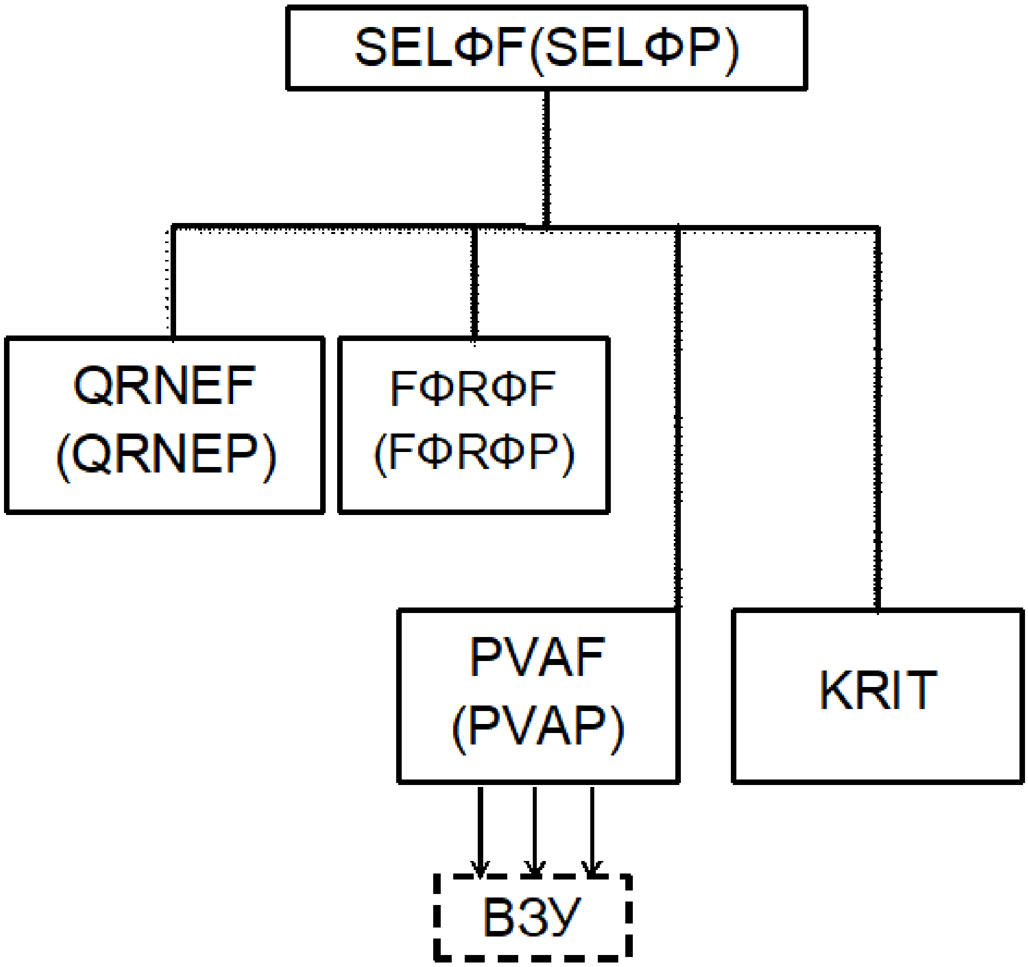


Рис. 5.8. Функціональна схема гілки програм SELΦF(SELΦP)

У головній програмі SELΦF (SELΦP), відповідно до формули (5.26), реалізовано ітераційний цикл, в який вкладено цикл по гармоніках (або ступенях поліномів), що є характерною рисою комплексу НМСЕ. У межах цих циклів здійснюється звернення до підпрограми QRNEF (QRNEP), яка обчислює вектори правих частин. Формування діагональних підматриць, прямий та зворотний хід за методом Гаусса виконує програма FФRФF (FФRФP). Результатом роботи блоку PVAF (PVAP), є масиви переміщень та їх похідних по x3, що формуються на зовнішніх запам'ятовуючих пристроях. Перевірка умов (5.28) виконується модулем KRIT.

При розв'язання задачі пластичності визначення напружень на кожній ітерації n здійснюється шляхом додавання обчислених на попередньому кроці навантажень їх повних значень σ^{ij}та підрахованих у відповідності до закону Гука приростів $\Delta\sigma_n^{ij}$:

$$\sigma_n^{ij} = \sigma^{ij} + \Delta\sigma_n^{ij} \tag{5.29}$$

Потім виконується перевірка умови $T \leq \tau_S$, де Т – інтенсивність дотичних напружень:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S^{ij}} \tag{5.30}$$

Якщо вона не виконується, то напруження корегуються у відповідності до методики запропонованої в роботі [80], за формулою:

$$\sigma_n^{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_n^{ij} + S_n^{ij}\frac{\tau_S}{T} \tag{5.31}$$

Графічну інтерпретацію цього алгоритму у просторі головних напружень подано на рис. 5.9.

Збіжність методу блочних ітерацій значною мірою залежить від обраної системи координатних функцій. Для пружних тіл, розрахунок яких базується на використанні рядів Фур'є, системи лінійних рівнянь, побудовані з їх застосуванням, вирішуються протягом однієї ітерації.

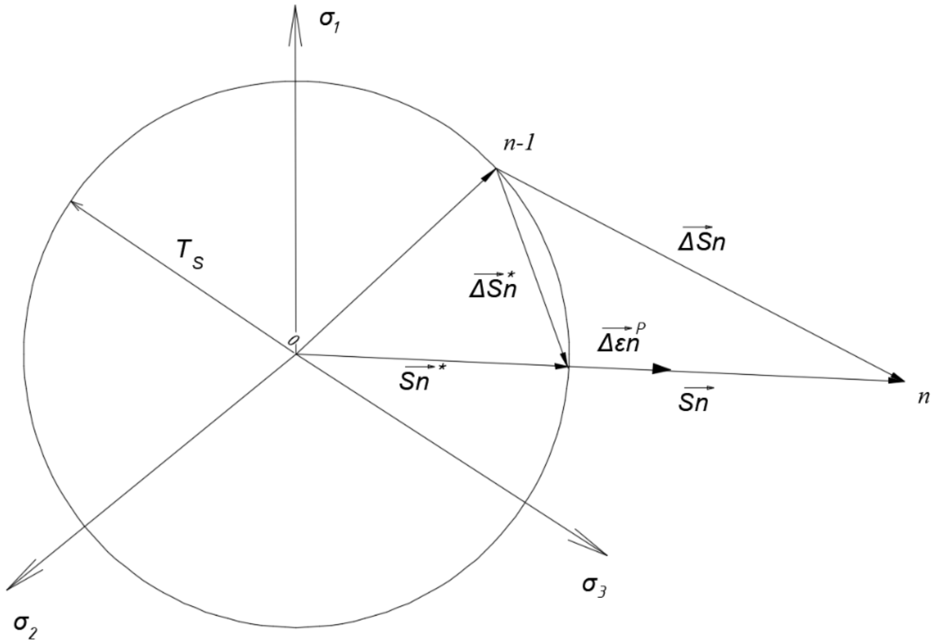


Рис. 5.9. Графічна схема розподілу головних напружень

Застосування поліномів вимагало додаткового виконання 5-7 ітерацій з правою частиною для побудови достовірних результатів розрахунку розглянутих у роботі лінійних задач. Порівняння збіжності алгоритму для поліномів і рядів Фур'є в задачах пластичності проведено на прикладі вигину нескінченної смуги прямокутного перерізу. У табл. 5.2 для різних значень параметра ωon наведені дані про кількість ітерацій N, необхідних при розв'язання з однаковою точністю системи нелінійних рівнянь, побудованих на основі рядів Фур'є та поліномів R.

Таблиця 5.2

$\boldsymbol{\omega_{on}}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
Ряди Фур'є	28	27	26	27	47
Поліноми	62	48	39	37	41

Їх аналіз показує, що мінімальне значення N для рядів Фур'є поліноми відрізняються не більше ніж в 1,5 рази.

5.5 Структура проблемно-орієнтованих підсистем прикладних програм

Прикладні програми (ПП) створено для розв’язання практичних геометрично нелінійних задач тонкостінних неоднорідних криволінійних призматичних об’єктів. Схему було запрограмовано та реалізовано на операційній системі MS WINDOWS у Науково-дослідному інституті будівельної механіки КНУБА. Код написано мовами FORTRAN Power Station та C.

Обчислювальний комплекс *PRIZ* розвиває систему «*MISTNIST*» і відповідає основним принципам побудови проблемно-орієнтованих програмних комплексів. Під час створення комплексу забезпечено модульну структуру, що дозволяє додавати нові класи об’єктів для розв’язання різноманітних крайових задач.

Наразі існують дві секції проблемно-орієнтованих підсистем *PRIZ*: секція *PRIZPL*, яка займається задачами термопластичності, та секція PRIZGL, що використовується для дослідження геометрично нелінійних об’єктів. Організаційна структура цих секцій представлена на рис. 5.10.

Секції *PRIZPL (PRIZGL)* належать до розділу та керуючої програми. На цьому рівні описуються основні інформаційні масиви та здійснюється доступ до гілок завантаження. Економія ресурсів пам’яті комп’ютера забезпечується через використання оператора *CALLLOADGO(...)*, де фактичним параметром є ім’я гілки завантаження.

DANSOL – це назва керуючої програми гілки завдання, яка відповідає за обробку початкових даних про об’єкт. Основними вхідними даними є інформаційні масиви (поле координат, температури, характеристик, координат сітки та навантаження), розміри сіткової області, кількісні параметри інтегрування (координати точок інтегрування та їх кількість, значення вагових функцій)

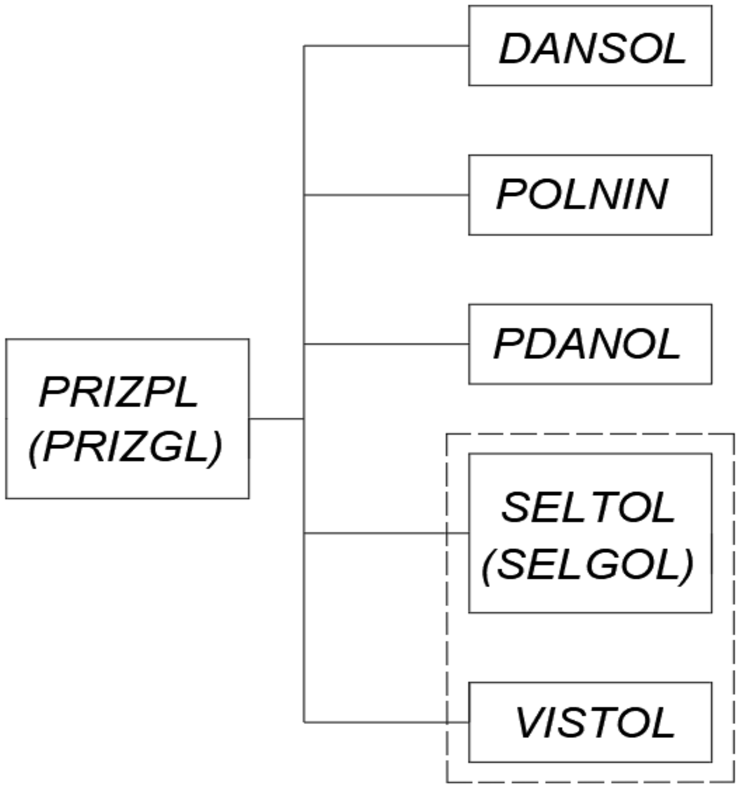


Рис. 5.10. Схематичне зображення модуля *PRIZPL* та пов’язаних з ним підмодулів

Програми гілки *DANSOL* (рис. 5.11) формують набір вихідних даних, що відображають топологію об'єкта (TELOT *і POLOT*), його геометрію (*GEOM*) та умови фіксації (*ZAKRES* і *ZAKREP*).

Модуль *FUNVES* містить інформацію про координати точок інтегрування та обчислює відповідні значення вагових функцій. *SETKOS* обчислює координати сітки вузлів дискретної моделі, яка використовується в модулі *NOKOS* для визначення значення наскрізного номера вузла. В процесі роботи *GEOM* і *SETKOS* використовуються модулі типу *INTERP* і *INTERL*, які дозволяють задавати інформацію зміцненими блоками, межі яких визначаються координатами сітки. Блок *DANSOL* призначений для завдання параметрів, що характеризують інтенсивність зовнішніх впливів і фізичні властивості матеріалу, керуючих параметрів для організації ступінчастого процесу і контрольного друку, кількості збережених членів розкладання і точності розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь [82].

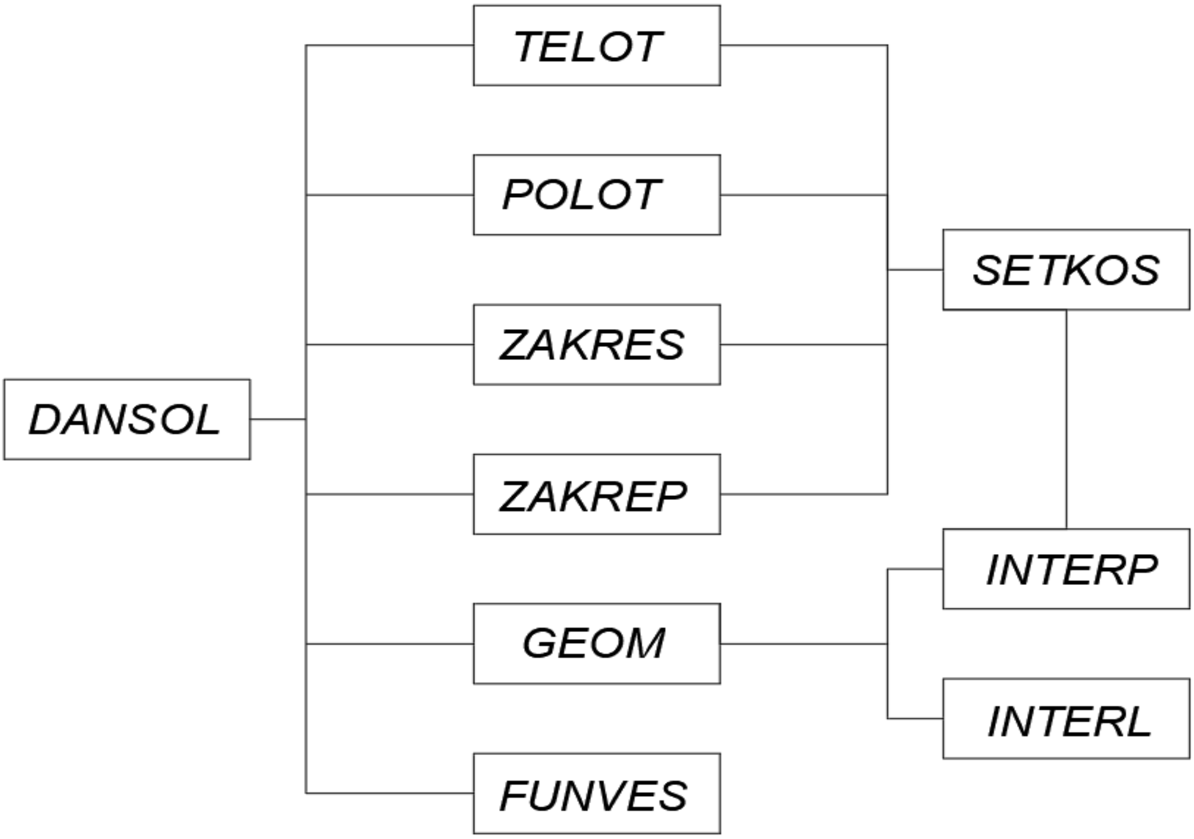


Рис. 5.11. Функціональні можливості DANSOL при розв'язуванні лінійних та нелінійних систем з використанням різних керуючих програм

Підпрограма *POLNIL* викликається після завантаження гілки *DANSOL* для обчислення значень координатних функцій та їх похідних по $Z^{3'}$ в точках інтегрування та їх відображення у відповідних масивах.

PDANOL – керуюча програма для виведення на друк гілки перетворених вихідних даних. На виході виводиться таблиця координат вузлів сітки, поля ознак, що характеризують умови закріплення, а також значення координатних функцій та їх похідних. Зовнішнє навантаження може бути задане у вигляді вимушених переміщень окремих точок поверхні (підпрограма *MASUL*), силових (підпрограма NAGRUZ) або температурних впливів (*TEMPER*).

Завантаження гілок SELTOL і *VISTOL* організовано в циклі відповідно до кроків завантаження. При розв’язуванні геометрично нелінійних задач у секції PRIZGL замість *SELTOL* викликається модуль *SELGOL*.

Підпрограма *SELTOL* є керуючою підпрограмою гілки розв'язання задачі термопластичності, тоді як підпрограма *SELGOL* призначена для розв’язання задачі пластичної деформації. Блок-схема гілки для розв’язання нелінійної задачі наведена на рис. 5.12.

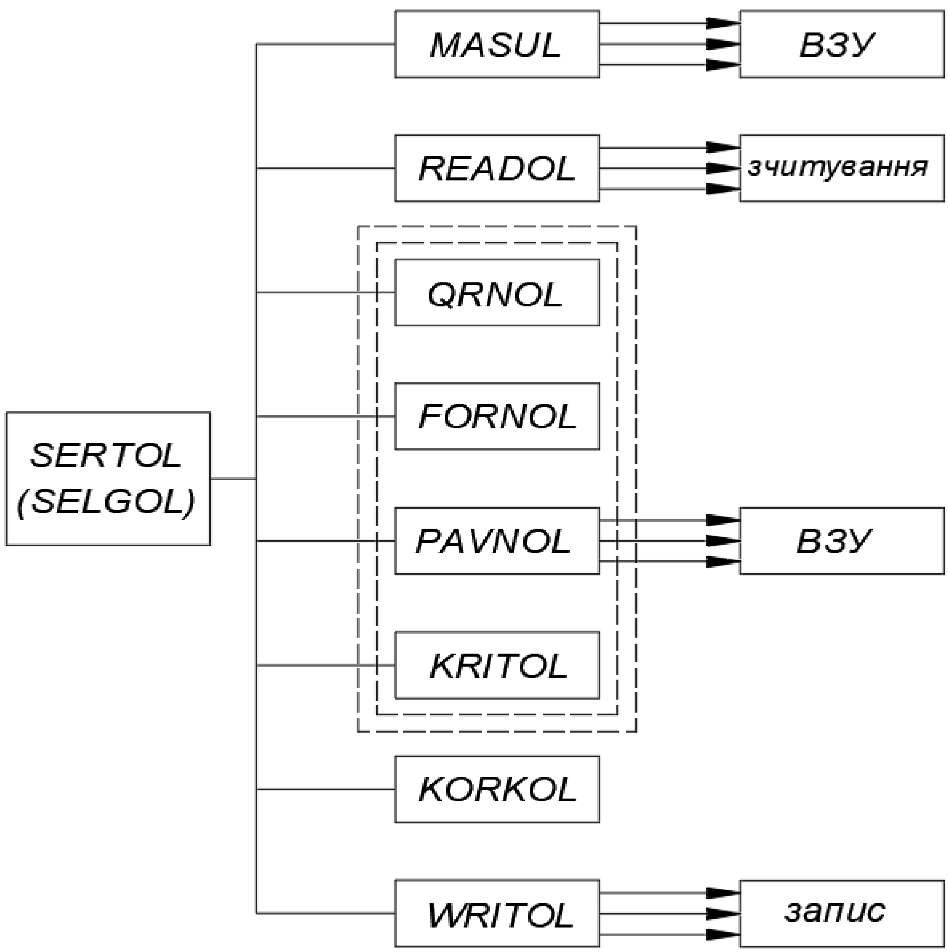


Рис. 5.12. Потік роботи підпрограми *SELGOL* для опису нелінійних задач пластичного деформування

Для врахування специфічних вимушених переміщень окремих перерізів використовується модуль *MASUL*, який надає можливість задавати вимушені переміщення окремих частин конструкції. Для геометричних нелінійних задач переміщення були екстрапольовані для обчислення значень у попередні моменти часу під час першого циклу інтегрування. У модулі *SELTOL* (*SELGOL*) вбудовані вкладені цикли для багаторазового сканування в часі. Програми *QRNOL, FORPOL, PAVNOL, KRITOL* викликаються у внутрішньому циклі.

Вектор зовнішнього навантаження, вузлові реакції та параметри рівноваги розраховуються за допомогою модуля *QRNOL*. Перехід вперед і назад здійснюється за допомогою методу Гаусса для розрахунку діагональних підматриць жорсткості на першій ітерації при змінному навантаженні. Однак, для великих пластичних деформацій, у змінній системі відліку, розрахунки компонент матриці жорсткості на кожному кроці є обов’язковими.

Підпрограма *RAVNOL* створює масиви значень переміщень координат та їх похідних на зовнішніх носіях для кожного члена розкладу. Підпрограма *CRITOL* перевіряє умову збіжності ітераційного процесу для розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь. Гілка *SELGOL* також забезпечує покроковий перерахунок компонент масиву координат вузлів вихідної дискретної моделі з використанням розрахункових значень координатних переміщень, обчислених за допомогою *модуля* KORKOL.

Умова неперервності розв’язання задачі покроковим методом перевіряється шляхом збереження масиву напружень. Аналогічно, масиви напружень і переміщень вузлів, заповнені параметром навантаження на попередньому кроці, зберігаються у пам’яті за допомогою програми *WRITOL* для нелінійних геометричних задач. На наступному кроці модуль *READOL* зчитує цю інформацію. В алгоритмі екстраполяції переміщень вектор реакції вузла визначається в підпрограмі *QRNOL* під час першої ітерації наступного кроку, використовуючи значення переміщень, розраховані на попередньому кроці.

Керуюча програма *VISTOL* використовується для обробки та друку результатів розрахунку й активується на завершальному кроці. За допомогою блокових програм *VISTOL* зчитуються масиви переміщень і напружень, що зберігаються на зовнішніх носіях інформації, та конвертуються значення напружень з локальної системи координат у їхні відповідні значення. Далі виводяться таблиці вузлових переміщень, напружень у базовій системі координат, інтенсивності дотичних і пластичних напружень.

Для друку виводиться інформація після кожного кроку, включаючи його номер, кількість ітерацій на цьому кроці та загальну кількість ітерацій, виконаних від початку.

Варто підкреслити, що запропонована методологія разом із відповідним пакетом прикладних програм перевершує традиційний метод скінченних елементів (МСЕ) для скінченного розв’язання систем лінійних і нелінійних рівнянь для низки вибраних об’єктів.

Висновки до розділу 5

Запропоновано новий алгоритмічний підхід для розв'язування реалістичних нелінійних крайових задач із конкурентною ефективністю за часом. Представлені розрахунки підтверджують, що НМСЕ зі зв’язаними векторами переміщень забезпечує ефективний за часом розв'язок без втрати базової точності. Крім того, НМСЕ демонструє вищу швидкість збіжності порівняно з готовими процедурами МСЕ під час обчислення параметра релаксації.

У розділі детально описано організацію та структуру програмного комплексу PRIZMA, який базується на НМСЕ та орієнтований на розрахунки пружного і пружно-пластичного деформування складних просторових конструкцій.

Розроблена структура комплексу забезпечує автоматизацію основних етапів чисельного аналізу, зокрема введення вихідних даних, дискретизації об'єкта, розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь, обробки й виведення результатів.

Запропоновано підхід до організації пам’яті шляхом об’єднання масивів, введення еквівалентності та використання сегментації на рівні гілок завантаження, що сприяє оптимізації використання ресурсів оперативної пам’яті.

У розділі продемонстровано гнучкість комплексу PRIZMA, що забезпечується модульною організацією основних алгоритмів, можливістю використання різних методів дискретизації, а також універсальністю у представленні результатів.

Виконане порівняння ефективності застосування рядів Фур’є та поліномів у задачах пружного й пружно-пластичного деформування показало, що використання поліномів забезпечує універсальність при завданні довільних граничних умов, проте потребує більшої кількості ітерацій для досягнення збіжності.

Результати, отримані під час моделювання задач, підтвердили ефективність програмного комплексу PRIZMA для аналізу масивних і тонкостінних призматичних тіл, а також його здатність задовольняти сучасні вимоги до програмного забезпечення для розрахунку міцності конструкцій.

РОЗДІЛ 6.
ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ І ЕФЕКТИВНОСТІ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Будь-який алгоритм для опису лінійних та нелінійних систем повинен відповідати базовим вимогам точності, а також забезпечувати ефективне використання часу та системних ресурсів. При розв’язанні систем рівнянь НМСЕ для призматичних тіл зі змінними параметрами має ряд важливих переваг у порівнянні з розв’язанням систем традиційного варіанта МСЕ. У цьому дослідженні запропоновано модульний підхід, що демонструє вищу ефективність порівняно з найсучаснішими алгоритмами як з погляду обчислювальних ресурсів, так і з можливістю застосування до широкого спектра нових задач.

Серед проблем, пов’язаних із розробкою чисельних методів розрахунку конструкцій на основі методу скінченних елементів (МСЕ), особливу увагу слід приділити обґрунтуванню достовірності отриманих результатів та порівнянню ефективності запропонованих підходів із існуючими. Теоретичне підтвердження зазначених аспектів часто є складним завданням навіть для окремих випадків. Через це розв’язання таких питань зазвичай базується на даних чисельних експериментів, виконаних на контрольних задачах.

У цьому розділі проведено порівняння ефективності скінченних елементів зі змінними та усередненими механічними і геометричними параметрами, а також досліджено збіжність рядів Фур’є, поліномів і МСЕ. Для більш обґрунтованого підтвердження достовірності отриманих результатів, які базуються на розробленій методиці та програмному забезпеченні, додатково розглянуто низку контрольних прикладів у пружній та пружно-пластичній постановках. Ці приклади охоплюють моделювання масивних і тонкостінних об’єктів, що дозволяє забезпечити комплексний аналіз достовірності і ефективності методики.

6.1 Ефективність НМСЕ у криволінійних призматичних об'єктах у пружній та пружно-пластичній постановці

У напіваналітичних методах раціональний вибір системи координатних функцій φ^l є обов'язковим, оскільки він впливає на ефективність та точність збіжності ітераційного процесу. У цій моделі застосовуються різні варіанти закріплення для побудови базисних функцій, які додатково доповнюються поліномами Лагранжа нульового та першого порядків. Крім того, запропоновано використовувати поліноми Міхліна. Можливі й інші види розкладів, що забезпечують прирівняння до нуля переміщень на торцях тіла, наприклад, розкладання у ряд по синусах [108; 109].

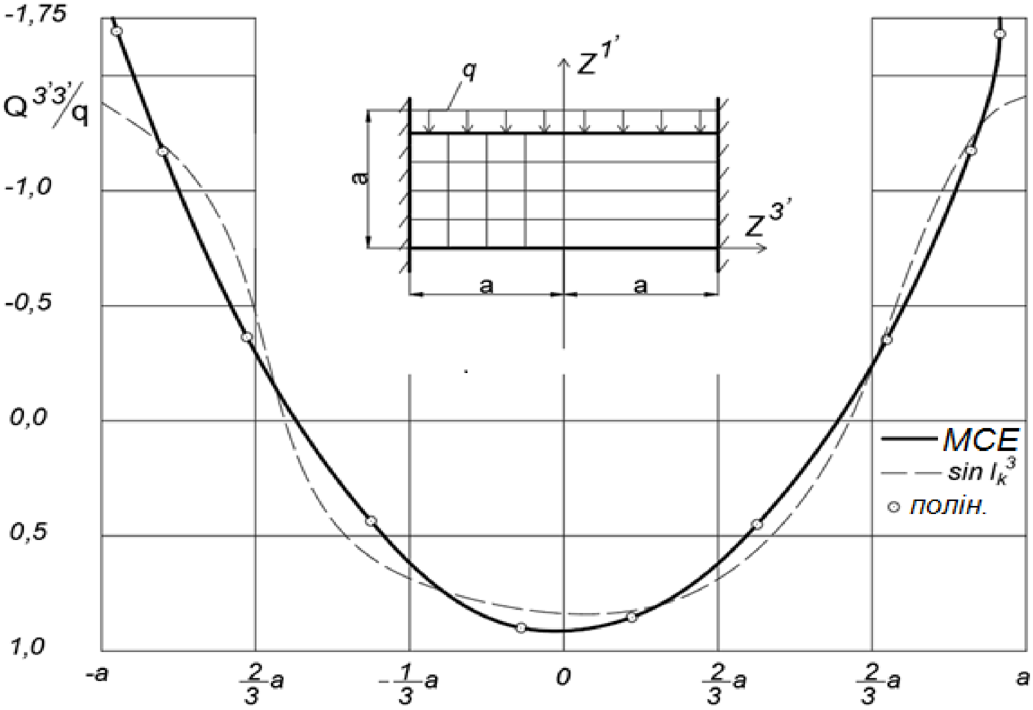


Рис 6.1 Графіки формування площини для призматичної балки, жорстко закріпленої на кінцях

На рис. 6.1 показано порівняння результатів для призматичної балки, жорстко закріпленої на кінцях, при розрахунку плоскої постановки задачі. Еталонний розв'язок було отримано напіваналітичним методом скінченних елементів (НМСЕ). Під час розв'язання задачі НМСЕ для обох φ^l утримувалося по 5 членів ряду. Для розрахунків було прийнято одиничне значення модуля пружності та рівномірний розподілення навантаження.

Аналіз розподілу напружень $\sigma^{3'3'}$ вздовж $Z^{3'}$ отриманих на базі обох систем координатних функцій показав, що поліноми Міхліна забезпечують точнішу апроксимацію параметрів напружено-деформованого стану по всій довжині тіла з меншими обчислювальними витратами, оскільки зменшують кількість ітерацій з п'яти до чотирьох.

Ефективність МСЕ для розрахунку об’єктів зі змінними фізичними та геометричними параметрами вздовж $Z^{3'}$ буде оцінено шляхом порівняння його з традиційною версією НМСЕ. Модифіковані версії методу Гауса найчастіше використовуються для розв'язання систем рівнянь НМСЕ. Необхідні обчислювальні зусилля можна оцінити, порівнявши необхідну кількість арифметичних операцій для розв’язання лінійних систем за допомогою НМСЕ і МСЕ рівнянь при незмінній ширині стрічки матриці. Розглядаючи моделі з регулярною сітковою структурою і припускаючи, що розміри області сітки залишаються однаковими за всіма координатами і дорівнюють n, ширина рядка матриці НМСЕ дорівнює $N_{CT}^{MKE} = (n^2 + n + 2) * 3$; загальне число невідомих для обох методів дорівнює n^3.

Для системи M рівнянь з шириною матричної смуги N, виконання прямого ходу метода Гауса вимагає $M - N - (N - 1)$ множення та $M - N$ додавань. Аналогічно, зворотний крок вимагає $M - N$ множення та $M - N$ віднімання. Припускається, що операції додавання і віднімання займають однакові обчислювальні зусилля, а співвідношення ширини рядків матриць НМСЕ і МСЕ задаються рівнянням 6.1.

$$\frac{N_{CT}^{MCE}}{N_{CT}^{\text{H}MCE}} \approx n \tag{6.1}$$

Виконання прямого ходу метода Гаусса вимагає на n^2 більше операцій множення та додавання порівняно з матрицею НМСЕ, а зворотний хід потребує в n разів більше операцій множення та додавання в НМСЕ. Завдяки використанню методу блочних ітерацій збіжність розв'язку лінійних рівнянь МСЕ досягається в середньому за n ітерацій (при ω *близьких до* ω_{on}). Час, необхідний для побудови правої частини при однакових параметрах сітки, однаковий як для МСЕ, так і для НМСЕ. Однак чисельне розв'язання системи рівнянь НМСЕ за досліджуваним алгоритмом потребує n^2 меншої кількості операцій порівняно з розв'язанням системи рівнянь МСЕ за допомогою методу Гаусса.

Ефективність розв'язання систем рівнянь методом блочних ітерацій визначається декількома факторами, такими як збіжність ітераційного процесу, визначення оптимального значення параметру релаксації ω_{on} та кількості невідомих, що впливають на швидкість збіжності.

Проведено кількісні дослідження пружного та пружно-пластичного деформування нескінченної смуги з прямокутним вирізом в умовах плоскої деформації (рис. 6.2).

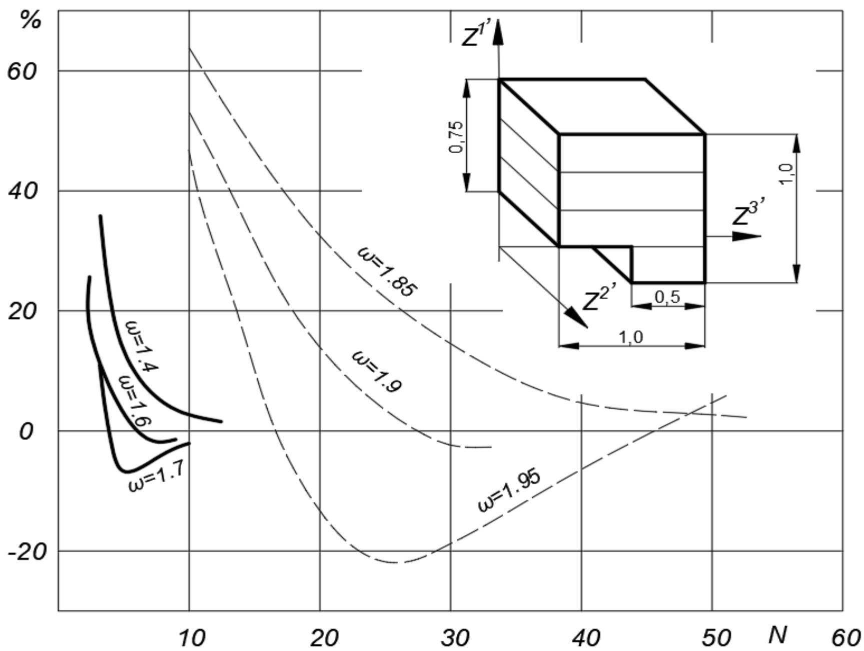


Рис. 6.2. Вплив профілю навантаження на інтенсивність для коефіцієнта Пуассона 0,3 і постійного модуля пружності

На торцях прийняті граничні умови, що відповідають спиранню на абсолютно жорсткі у площині поперечного перерізу та гнучкі з неї діафрагми і описуються рівнянням (6.2):

$$\frac{U^{1'}}{Z^{3'}} = \pm 1 = \frac{\sigma^{3'3'}}{Z^{3'}} = \pm 1 = 0 \qquad (6.2)$$

На верхню поверхню тіла прикладається рівномірно розподілене навантаження, інтенсивність якого поступово зростає від $0.3\tau_s$ (пружне розв'язання) до $0.5\tau_s$ як показано на рис. 6.2. Модуль пружності матеріалу приймається рівним одиниці з коефіцієнтом Пуассона 0,3.

Обов'язковою умовою точності результатів кореляції НМСЕ і МСЕ є однакова кількість невідомих і кількість блоків у матрицях систем розв'язувальних рівнянь. У розрахунках НМСЕ кількість вузлів сітки в напрямку $Z^{3'}$ приймалася рівною 9. Для обох випадків перші дев'ять членів розкладу залишалися незмінними при 13 вузлах сітки і вздовж $Z^{1'}$.

Результати дослідження швидкості збіжності методу блочних ітерацій на задачі пружного деформування для різних значень параметра ω як для НМСЕ, так і для МСЕ представлені на рис. 6.2. Похибки в обчисленні максимальних відносних переміщень розраховувалися у відсотках від еталонного результату, отриманого за допомогою НМСЕ з використанням 289 вузлів сіткової області. Оптимальними значеннями параметра релаксації виявилися – $\omega_{on} = 1.9$ та $\omega_{on} = 1.6$ для НМСЕ та МСЕ відповідно. Аналіз кривих показує, що швидкість збіжності ітераційного процесу НМСЕ у 5 разів вища, ніж у МСЕ для лінійних систем. Визначення величини ω_{on} є трудомістким процесом, тому для уникнення надлишковості було використано більш розріджену скінченно-елементну сітку. У зв'язку з цим було досліджено зміну швидкості збіжності ітераційного процесу зі збільшенням кількості блоків у матриці для фіксованого значення ω відносно пружної деформації смужки з надрізом.

При оптимальних значеннях ωдосліджено збіжність методу блочних ітерацій для заданого розміру сітки та при збільшенні параметрів НМСЕ у 1,5 рази вздовж $Z^{3'}$ або збережених базисних функцій відповідно. Результати представлені на рис. 6.3 у вигляді графіків залежності похибок визначення максимальних переміщень від кількості ітерацій.

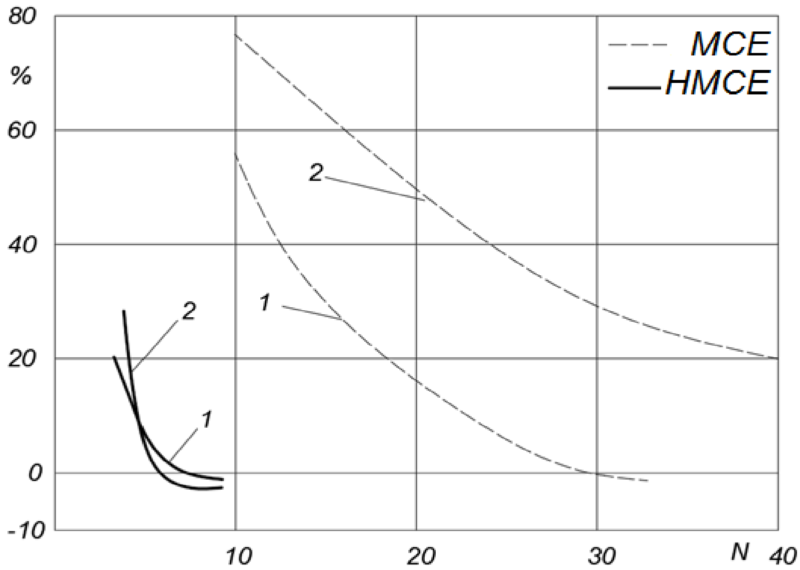


Рис. 6.3. Зв'язок між елементами МСЕ та збіжністю методу блочних ітераціій

Цифрою 1 позначено графік, отриманий для опорної сіткової області, а цифрою 2 – для уточненої. Із рис. 6.3 видно, що збільшення кількості блоків у НМСЕ - матриці не впливає на швидкість збіжності ітераційного процесу, тоді як для МСЕ-матриць це призводить до значного (у 2,2 рази) збільшення кількості ітерацій. Криві, що характеризують залежність кількості ітерацій від значення параметра релаксації для пружно-пластичного розрахунку, наведено на рис. 6.4.

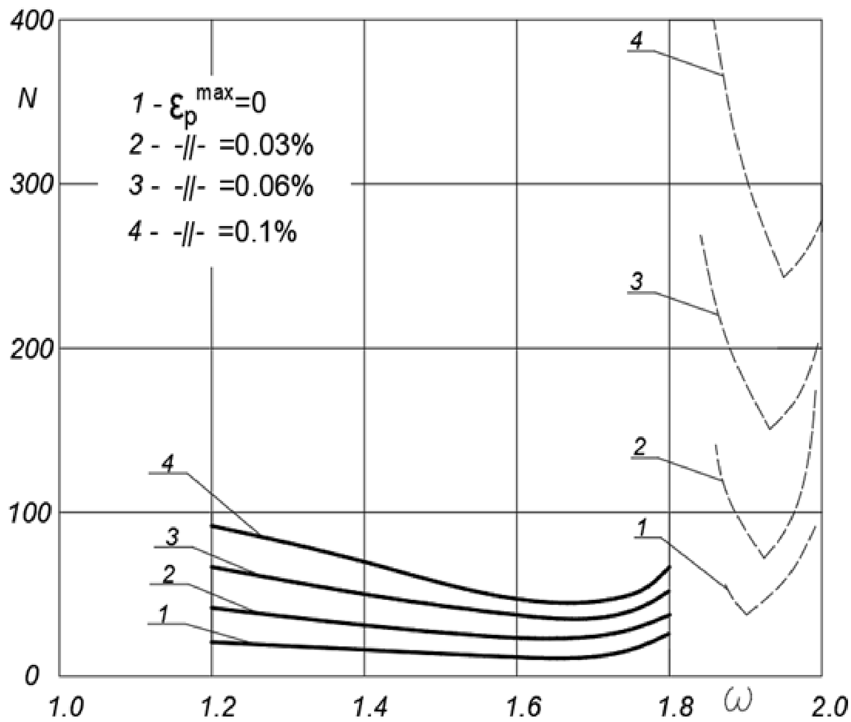


Рис. 6.4. Характеристичні криві залежності кількості ітерацій від параметра релаксації для пружно-пластичних розрахунків

Аналіз отриманих даних підтверджує значну перевагу НМСЕ для класу задач, що розглядаються. Так, при максимальному рівні розвитку пластичної деформації ітераційний процес для НМСЕ сходиться в 5 разів швидше, ніж для МСЕ. Однак реальне скорочення обсягу обчислень є значно більшим за рахунок суттєвого зменшення додаткових досліджень, необхідних для обчислення оптимального значення параметра релаксації $\omega_{оп.}$

Аналіз характеру графіків для МСЕ показує, що параметр релаксації необхідно вибирати з вузької околиці $\omega_{оп}$. Оскільки, якщо $\omega = \omega_{оп}$ умова не виконується, то це призводить до значного погіршення збіжності обчислювального процесу.

Зі збільшенням рівня пластичної деформації відбувається зсув оптимального значення ω у бік збільшення. Збіжність ітераційного процесу при розв'язанні задачі пластичності напіваналітичним методом *при* $\omega_{\text{оп}} = 1.70$ визначеному на останньому кроці навантаження, є лише 5% краща, ніж *при* $\omega_{\text{оп}} = 1.6$. Однак *у* випадку МСЕ використання $\omega_{оп} = 1.9$ оптимального при $\varepsilon_p^{max} = 0\%$ призводить до збільшення кількості ітерацій на 40% порівняно з $\omega_{on} = 1.95$ визначеним на останньому кроці навантаження.

Отже, розв’язання задачі за методом МСЕ потребує більш трудомістких попередніх досліджень на максимальних рівнях пластичної деформації для визначення оптимального значення параметра релаксації, чого можна уникнути при використанні напіваналітичного підходу. Це пов’язано з обчисленням ω_{on} на першому кроці навантаження, що призводить до ранньої збіжності наступних кроків.

Таким чином, рекомендується визначати оптимальне значення параметра релаксації для напіваналітичного методу на розрідженій сітці та в області пружних напружень. Таке ж значення є оптимальним і на густих сітках, оскільки зсув вгору в задачах пластичності не суттєво зменшує обсяг обчислень порівняно з необхідними витратами для параметра релаксації, оптимального для пружної задачі. Застосування методу скінченних елементів для обчислення ω_{on} вимагає багаторазового розв’язання фізично нелінійної задачі без зменшення розміру сіткової області, що потребує значних обчислювальних ресурсів.

Використання методу блочних ітерацій для розв'язання систем нелінійних рівнянь НМСЕ є приблизно на порядок ефективнішим порівняно з традиційним МСЕ.

6.2 Порівняння ефективності скінченних елементів зі змінними та усередненими механічними та геометричними параметрами

По відношенню до скінченного елементу зі змінними механічними і геометричними параметрами (СЕ1) використання скінченного елемента з їх усередненими значеннями (СЕ2) дозволяє значно скоротити обсяг обчислень, пов’язаних з виконанням операцій чисельного інтегрування в перерізі $X^3 = const$. Однак внаслідок прийнятих припущень щодо характеру розподілу C^{ijkl} та gза площею поперечного перерізу СЕ2 цих елементів може знадобитися більше, ніж СЕ1, для досягнення однакової точності результатів.

З метою порівняння ефективності обох варіантів скінченних елементів було розглянуто задачу про пружну рівновагу циліндричної панелі та пружно-пластичну деформацію нескінченної смуги прямокутного перерізу.

Розрахункова схема шарнірно закріплена по торцях і навантажена власною вагою панелі приведена на рис. 6.5. Граничні умови :

$$U_{\alpha'\left(z^{3'}=0\right)} = U_{\alpha'\left(z^{3'}=a\right)} = 0, \qquad \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=b\right)} = 0$$

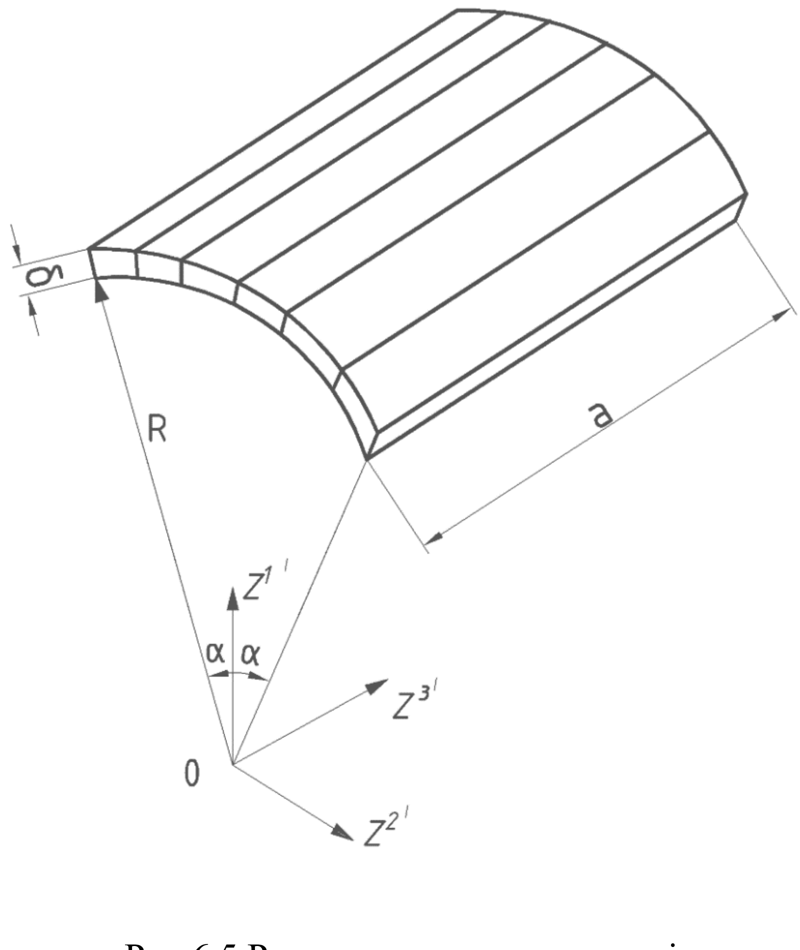


Рис.6.5 Розрахункова схема панелі

Товщина оболонки $\delta = 7{,}62 \cdot 10^{-2}$м, довжина утворюючої $a = 200$, радіус середньої поверхні $R = 100$, кут $\alpha = 40^{\text{o}}$. Відношення інтенсивності рівномірно розподіленого по площі серединної поверхні навантаження до модуля пружності матеріалу $\frac{q^{1'}}{E} = 2.09 \cdot 10^{-7}$, коефіцієнт Пуассона $\upsilon = 0$. За товщиною оболонка апроксимувалася одним скінченним елементом при утриманні 9 членів розкладання в ряди Фур'є.

Дані, що відображають вплив на результати розрахунку панелі кількості скінченних елементів зі змінними механічними та геометричними параметрами, представлені в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

M	$V_{3'}10^2$	%	$V_{1'}$	%
3	5,170	15,34	1.306	6,61
5	5,836	4,43	1,253	2,31
8	6,041	1,08	1,233	0,65
12	6,107	-	1,225	-

Тут M - число елементів вздовж направляючої, що припадає на кут α, $V_{3'} = \frac{U_{3'}}{\delta}$-максимальне відносне переміщення по напрямку осі $Z^{3'}$, $V_{1'} = \frac{U_{1'}}{\delta}$-максимальне відносне переміщення по напрямку осі $Z^{1'}$. У відсотках представлена їх похибка по відношенню до значень, обчислених при $M = 12$. Її зміна показує, що для отримання порівняно стійких результатів потрібно не менше 8 елементів типу СЕ1. Виявилося, що при цьому значенні M використання замість СЕ1 елементів з усередненими механічними і геометричними параметрами практично не впливає на величину максимальних переміщень (табл. 6.2), дозволяючи в той же час значно скоротити обсяг обчислень. Так, час рахунку τ_2, необхідний для розв'язання даної задачі на основі СЕ2, зменшується більше ніж в 1,6 рази у порівнянні з СЕ1. Розрахункова схема нескінченної у напрямку $Z^{2'}$ смуги приведена на рис. 6.6.

Граничні умови:

$$U_{\alpha'\left(z^{3'}=0\right)} = U_{\alpha'\left(z^{3'}=b\right)} = 0\,, \qquad \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=b\right)} = 0$$

Таблиця 6.2.

Вид СЕ	$V_{3'}10^2$	%	$V_{1'}$	%	$\frac{\tau_1}{\tau_2}$
СЕ1	6,041	0,00	1,233	0,08	1,61
СЕ2	6,041		1,234		

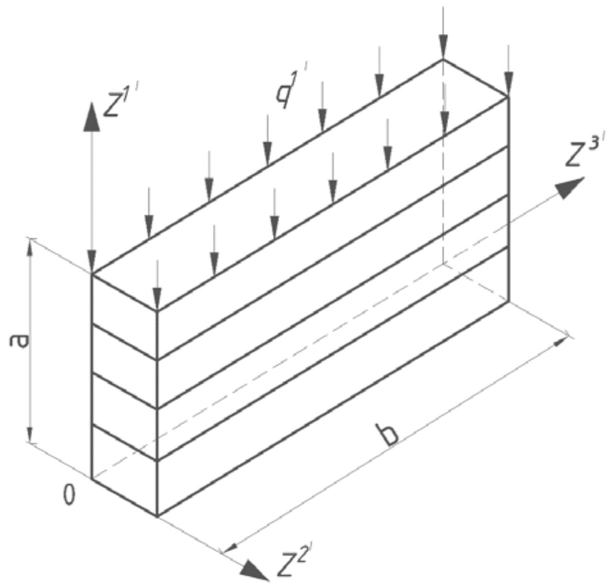


Рис.6.6. Розрахункова схема нескінченної у напрямку $Z^{2'}$ смуги.

Розміри її поперечного перерізу в площині $Z^{2'} = const$ прийняті $a = 0{,}01$м, $b = 2a$. Для моделювання умов плоскої деформації у напрямку $Z^{2'}$ виділяється шар кінцевої товщини, закріплений від переміщень $U_{2'}$. Граничні умови по торцях поперечного перерізу $\left(Z^{3'} = 0; Z^{3'} = b\right)$ відповідають обпиранню на абсолютно жорстку в площині і гнучку з неї діафрагму.

Смуга знаходиться під дією рівномірно розподіленого по площині $Z^{1'} =$ a навантаження інтенсивністю $q^{1'} = 0{,}91\tau_s$, де τ_s- межа плинності при чистому зсуві. Модуль пружності матеріалу $\mathrm{E} = 173\tau_s$, коефіцієнт Пуассона $\upsilon = 0{,}3$ зміцнення відсутнє. У напрямку $Z^{2'}$ приймався один скінченний елемент при утримання п’яти членів розкладання в ряди Фур’є. Максимальне значення відносних переміщень

$V_{1'} = \frac{U_{1'}}{a}$ та $V_{3'} = \frac{U_{3'}}{a}$, обчислених при різній кількості СЕ1 по висоті поперечного перерізу елемента, наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

M	$V_{3'}$	%	$V_{1'}$	%
2	0,914	22,4	1,909	14,8
4	1,092	7,3	2,107	6,0
8	1,162	1,3	2,216	1,1
12	1,178	-	2,241	-

Там само представлено відсоткову похибку цих переміщень відносно результатів, отриманих під час проведення відповідних розрахунків $M = 12$. Аналіз отриманих даних свідчить, що для забезпечення стійких результатів необхідно використовувати щонайменше 8 елементів зі змінними механічними та геометричними параметрами. Незважаючи на розвиток області пластичних деформацій, що сягають близько 1%, чисельні дослідження демонструють, що використання такої ж кількості СЕ2 спричиняє лише незначне (менше ніж 1%) зменшення результатів (табл. 6.4). При цьому відзначається ще більше, порівняно з пружною задачею, скорочення часу розрахунків на сучасних персональних комп'ютерах.

Таблиця 6.4

<table>
<tr><th>Вид СЕ</th><th>$V_{3'}$</th><th>%</th><th>$V_{1'}$</th><th>%</th><th>$\frac{\tau_1}{\tau_2}$</th></tr>
<tr><td>СЕ1</td><td>1,162</td><td rowspan="2">0,7</td><td>2,216</td><td rowspan="2">0,9</td><td rowspan="2">1,82</td></tr>
<tr><td>СЕ2</td><td>1,154</td><td>2,195</td></tr>
</table>

На основі проведених досліджень встановлено, що розроблена модифікація призматичного скінченного елемента з усередненими механічними та геометричними параметрами забезпечує суттєве скорочення часу розв’язання лінійних і нелінійних задач, зберігаючи при цьому високий рівень точності отриманих результатів.

6.3 Дослідження збіжності рядів Фур’є, поліномів і скінчено елементної дискретизації

До основних показників, що визначають ефективність різних варіантів методу скінченних елементів, належить швидкість збіжності розв'язків зі збільшенням кількості невідомих. Цей показник суттєво залежить від вибору систем координатних функцій. У цьому контексті доцільно порівняти швидкість збіжності тригонометричних рядів, поліномів і кусково-лінійної апроксимації переміщень у заданому напрямку X^3. Актуальним напрямом досліджень є задачі, пов’язані з визначенням напружено-деформованого стану призматичних тіл під впливом локалізованих навантажень, оскільки саме в таких випадках спостерігається потенційне зниження ефективності напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) у порівнянні з традиційним методом скінченних елементів (МСЕ). Додатково важливими є задачі, що стосуються пружно-пластичної рівноваги. Для здійснення контрольного аналізу обрано дві задачі: задачу Бусінеска для півплощини, навантаженої зосередженою силою [6], та задачу пружно-пластичної деформації нескінченної смуги прямокутного перерізу, яка була розглянута у попередній главі. Розрахункова схема задачі Бусінеска наведена на рис. 6.7.

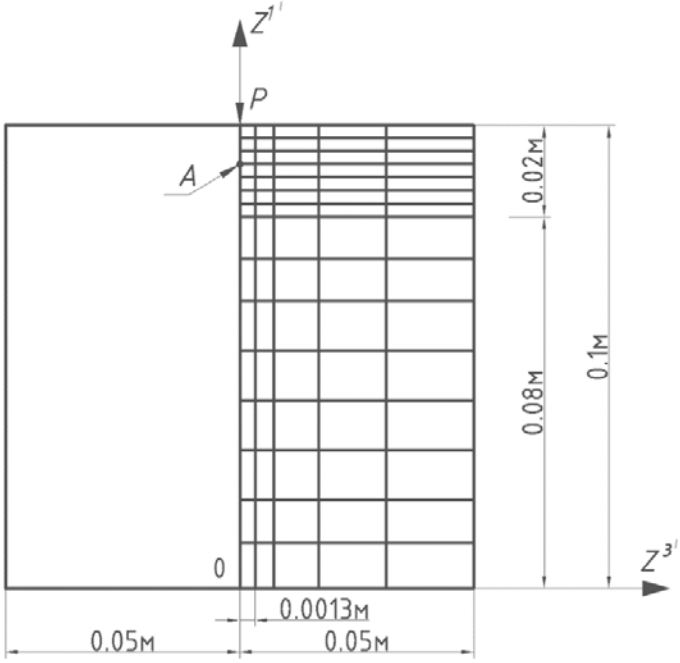


Рис. 6.7. Розрахункова схема задачі Бусінеска.

Аналізовані системи координатних функцій не дають змоги безпосередньо визначити напруження в точці прикладання зосередженої сили як у межах методу скінченних елементів (МСЕ), так і його нелінійної модифікації (НМСЕ). Тому збіжність результатів оцінюється вздовж лінії $Z^{1'} = const$, яка розташована на певній відстані від межі півплощини, наприклад, 0,01 м. У розрахунках методом скінченних елементів замість нескінченної півплощини використовується область із кінцевими розмірами, обраними так, щоб граничні умови мали мінімальний вплив на напружений стан у зоні дії зосередженої сили Р = 1. Проведене дослідження показало, що для адекватного моделювання достатньо розглядати область у формі квадрата зі сторонами 0,1 м, оскільки навіть двократне збільшення її розмірів спричиняє зміну значень напруження $\sigma^{1'1'}$ в точці $A\left(Z^{1'} = 9{,}0; Z^{3'} = 0\right)$, менше, ніж на 1%. Розділення виділеного квадрату на скінченні елементи для розрахунку МСЕ показано на рис. 6.7. Він поділений на дві частини в кожній з яких у напрямку $Z^{1'}$ прийнятий рівномірний крок сітки. У напрямку $Z^{3'}$ розміри СЕ визначаються відповідно до закону арифметичної прогресії. Для НМСЕ розбивка на елементи вздовж осі $Z^{1'}$ така ж як і для МСЕ, а у напрямку $Z^{2'}$ виділений шар скінченних елементів закріплений від переміщень вздовж $U_{2'}$, завдяки чому задовольняються умови плоскої деформації. Дослідження по збіжності рішень в залежності від кількості скінченних елементів вздовж $Z^{1'}$ показали, що на ділянці $0 \leq Z^{1'} \leq 0{,}08$м достатньо восьми, а на ділянці $0{,}08 \leq Z^{1'} \leq 0{,}1$м-семи СЕ для отримання стійких результатів. Дані, що характеризують точність визначення $\sigma^{1'1'}$ в точці A в залежності від кількості невідомих, приведені в табл. 6.4. Тут M - кількість вузлів сіткової області МСЕ або утримуваних членів розкладання НМСЕ у напрямку $Z^{3'}$. Достовірність результатів $\sigma^{1'1'}$ порівняна відповідно до еталонного розв'язку [32]:

$$\sigma^{1'1'} = -\frac{2}{\pi} \tag{6.2}$$

Таблиця 6.4

M	МСЕ	Фур'є	Поліноми
5	6,3%	7,8%	5,0%
10	4,4%	1,9%	2,8%
20	3,8%	1,5%	2,3%

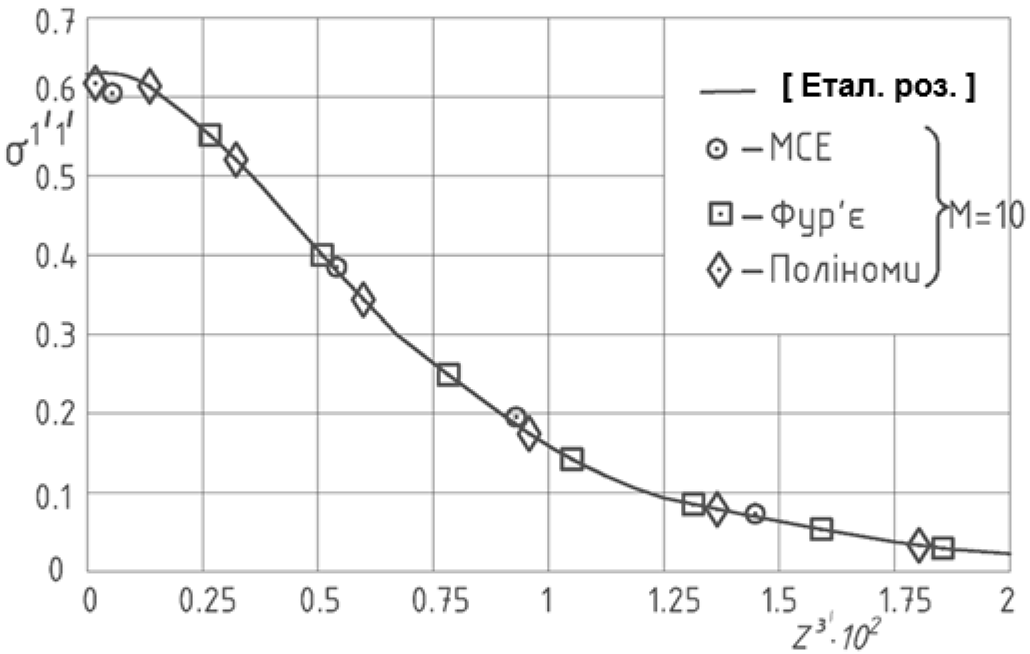


Рис.6.8. Епюра напружень $\sigma^{1'1'}$, побудована вздовж лінії $Z^{1'}$

На рис. 6.8 суцільною лінією зображена еталонна епюра напружень $\sigma^{1'1'}$, побудована вздовж лінії $Z^{1'} = 0{,}09$м на ділянці $0 \leq Z^{3'} \leq 0{,}02$м. Кругами, квадратами і ромбами позначені значення, обчислені при $M = 10$ на базі МСЕ, рядів Фур'є і поліномів відповідно.

Наведені результати показують, що збіжність досліджуваних координатних функцій в розглянутій задачі одного порядку, причому при $M \geq 10$ точність розв'язання НМСЕ навіть трохи вище, ніж МСЕ.

Аналогічні дослідження з урахуванням пластичних властивостей матеріалу виконані для нескінченної смуги прямокутного перерізу, навантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням. В якості еталонного скористаємося розв'язанням цієї задачі методом скінченних елементів. З урахуванням осі симетрії половина поперечного перерізу смуги апроксимується рівномірною сіткою скінченних елементів (СЕ) зі спільною кількістю вузлів $m = n \times n$, де n - їх кількість вздовж кожної зі сторін (рис.6.9). Граничні умови :

$$U^{1'}_{z^{3'}=\pm a} = 0\,, \qquad \sigma^{3'3'}_{z^{3'}=\pm a} = 0$$

Дані, які відображають вплив m на максимальні значення відносних зсувів $V_{1'} = \frac{U_{1'}}{\mathrm{a}}$ та $V_{3'} = \frac{U_{3'}}{a}$ наведені в таблиці 6.5.

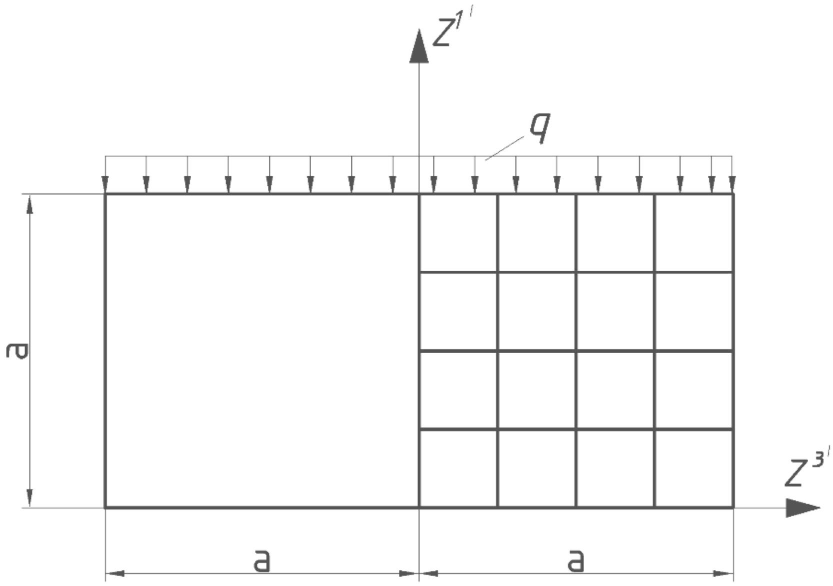


Рис. 6.9. Поперечний переріз смуги із СЕ

Таблиця 6.5

m	$v_{max}^{1'}$	%	v_{max}^{3}	%
9	1,710	23,2	0,837	28,6
25	2,010	9,7	1,028	12,4
81	2,188	1,7	1,142	2,6
169	2,226	-	1,173	-

Там же представлена у відсотках похибка обчислення цих переміщень по відношенню до результатів, отриманими при максимальній кількості вузлів розрахункової сітки рівному 169. Характер збіжності епюри $V_{1'}$ вздовж осі $Z^{3'}$зображений на рис.6.10. На основі наведених результатів розв’язання, відповідне до $m = 169$, прийняте за еталонне для подальших досліджень.

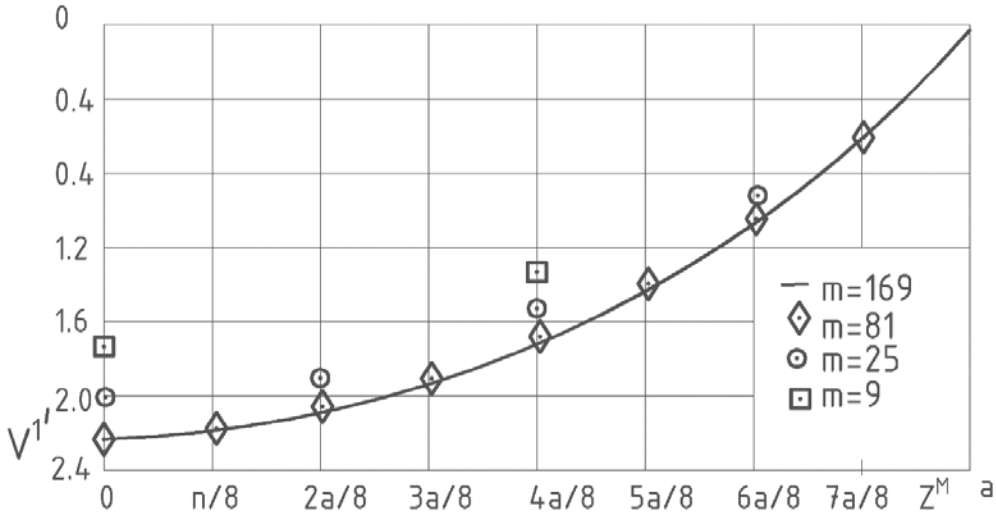


Рис. 6.10. Максимальні значення відносних зсувів $V_{1'} = \frac{U_{1'}}{а}$ та $V_{3'} = \frac{U_{3'}}{a}$

Результати зіставлення ефективності подання представлені вздовж осі $Z^{3'}$ різними координатними функціями наведені на рис.6.11 у вигляді графіків, що відображають залежність похибок обчислень максимальних значень $U_{1'}$ від кількості утримуваних членів розкладання *M*.

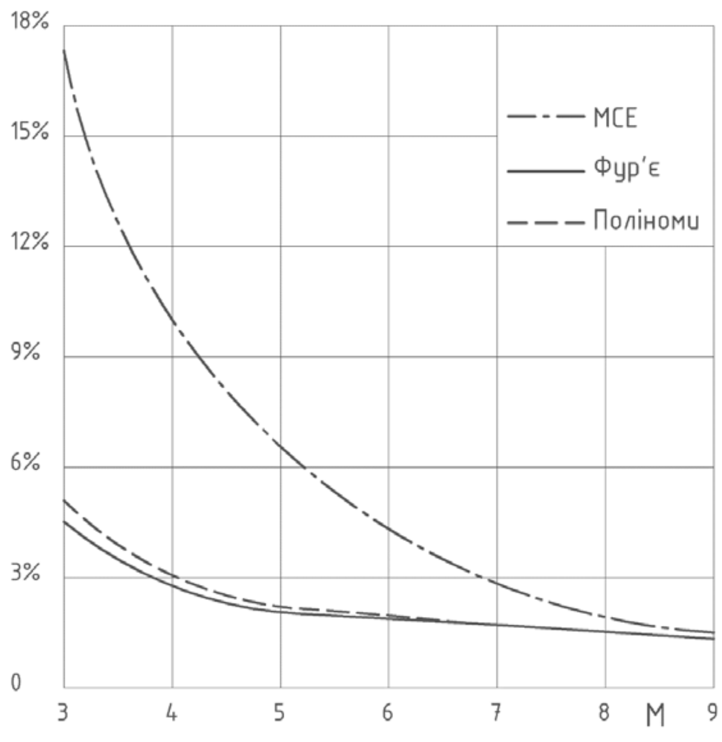


Рис. 6.11. Загальний вигляд графіку зіставлення функцій

Розрахунки виконані при фіксованій кількості скінченних елементів у напрямку $Z^{1'}$ яка дорівнює восьми, оскільки, як було встановлено раніше, подальше збільшення їх кількості незначно впливає на результати розрахунків. Суцільна лінія відповідає рядам Фур'є, пунктирна – поліномам, штрих-пунктирна скінчено елементній дискредитації з кількістю вузлів сіткової області $n = M$ у напрямку $Z^{3'}$.

В той же час слід зазначити значну перевагу НМСЕ у порівнянні з МСЕ. Так, утримання тільки п'яти членів розкладання забезпечує розв'язання задачі з такою ж точністю як і при 9 вузлах сіткової області. Ці висновки підтверджуються складанням і других параметрів напружено-деформованого стану смуги. На рис.6.12 суцільною лінією наведені епюри еталонних значень інтенсивності пластичних деформацій $\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_p^{ij}}$ побудовані в перерізі $Z^{3'} = a$.

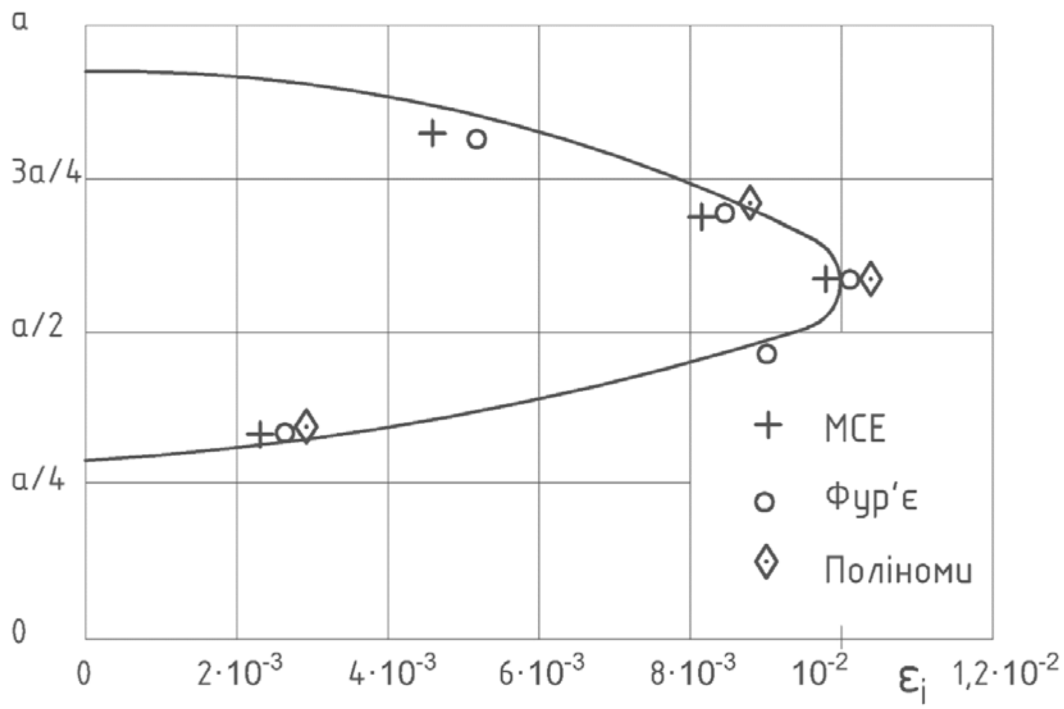


Рис. 6.12 Загальний вигляд епюри еталонних значень інтенсивності пластичних деформацій

На рис.6.13 відносних дотичних, $\bar{\sigma}^{1'3'} = \frac{\sigma^{1'3'}}{\tau_s}$ і нормальних $\bar{\sigma}^{3'3'} = \frac{\sigma^{3'3'}}{\tau_s}$ напружень, побудованих в перерізі $Z^{1'} = a$. Хрестиками позначені результати отримані методом скінченних елементів при 9 вузлах в напрямку $Z^{3'}$, кругами і ромбиками -НМСЕ при $\mathrm{M} = 5$для рядів Фур'є і поліномів відповідно. Спостерігається гарна узгодженість у визначенні різних параметрів напружено-деформованого стану розглянутими підходами, проте збіжність НМСЕ майже в два рази віще по $Z^{3'}$, ніж МСЕ.

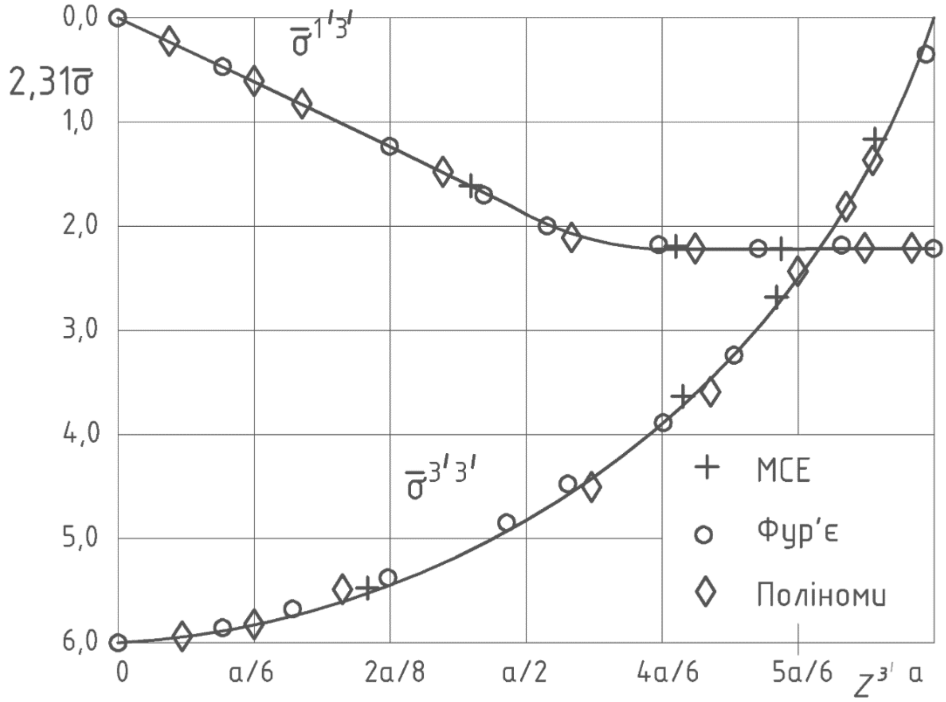


Рис. 6.13 Загальний вигляд відносних дотичних напружень

Таким чином, можна зробити висновок, що поліноми і ряди Фур'є не поступаються у відношенні до збіжності кусково-лінійної апроксимації переміщень при розрахунку призматичних тіл, навантажених локалізованими впливами, і значно ефектніші в задачах з розподіленим навантаженням.

6.4 Чисельні результати розв'язання тестових задач

Вигін шарнірно закріпленої квадратної пластини. Розглядаємо пружну рівновагу тонкої квадратної пластини зі стороною a під дією нормального до її площини навантаження, інтенсивність якого описується формулою:

$$q = q_0 \, sin \frac{\pi z^{1'}}{a} sin \frac{\pi z^{2'}}{a}$$

де q_0- значення навантаження в центрі пластини.

Осі координат $Z^{1'}$ та $Z^{2'}$ направлені вздовж сторін квадрата. Пластина шарнірно закріплена по всім сторонам.

На основі проведених розрахунків, еталонним рішенням обрано результат, поданий у роботі [30]. Отримані за допомогою розробленої методики результати підтверджують, що скінчено-елементний підхід демонструє високу збіжність із точними розв'язаннями. Зокрема, при апроксимації пластини сіткою скінченних елементів величина максимального прогину в центрі пластини, визначена точним і наближеним методами, відрізняється менш ніж на 1%.

Особливе значення має задача пружної рівноваги циліндричної панелі, навантаженої власною вагою. У розглянутому випадку панель є непологою прямокутною в плані, шарнірно закріпленою по двох криволінійних сторонах і вільною по інших двох (рис. 6.14) [32]:

$$U^{k'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = U^{k'}_{\left(z^{3'}=a\right)} = 0, \qquad \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=a\right)} = 0$$

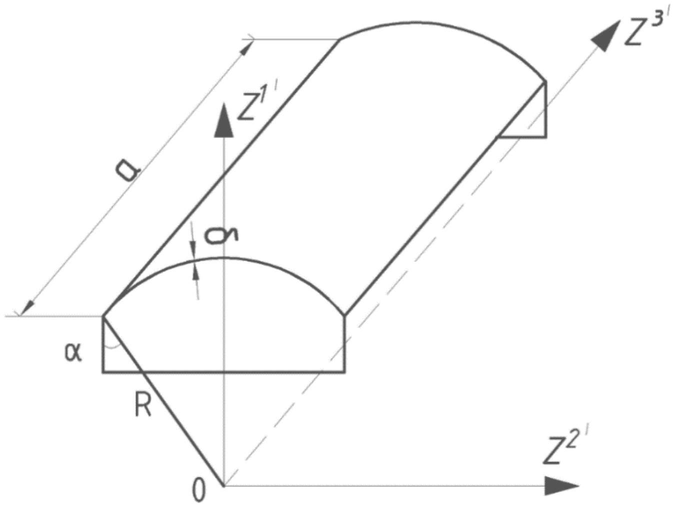


Рис. 6.14. Розрахункова схема циліндричної панелі

На рис. 6.15 наведено графіки похибки у визначенні прогину центра панелі відносно еталонного рішення [98], які залежать від порядку матриці системи рівнянь. Розрахунки виконані на основі різних варіантів оболонкових скінченних елементів, методики моментної схеми скінченних елементів (МСЕ) із дискретизацією вздовж утворюючої та направляючої, а також напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ).

Аналіз даних свідчить про високу ефективність МСЕ у розрахунках тонкостінних конструкцій. Метод забезпечує мінімальну похибку при визначенні прогину панелі, поєднуючи високу точність із зниженням обчислювальної складності.

Згідно з даними, представленими на рис. 6.15, традиційний та напіваналітичний варіанти методу скінченних елементів (МСЕ), побудовані на основі співвідношень моментної схеми, демонструють у розглянутій задачі майже однакову швидкість збіжності. У всьому діапазоні змін кількості невідомих розбіжність результатів, отриманих різними варіантами МССЕ, не перевищує 1%. Водночас ширина стрічки матриці системи рівнянь, сформованої методом НМСЕ, є суттєво меншою, що свідчить про його перевагу в аспекті обчислювальної ефективності.

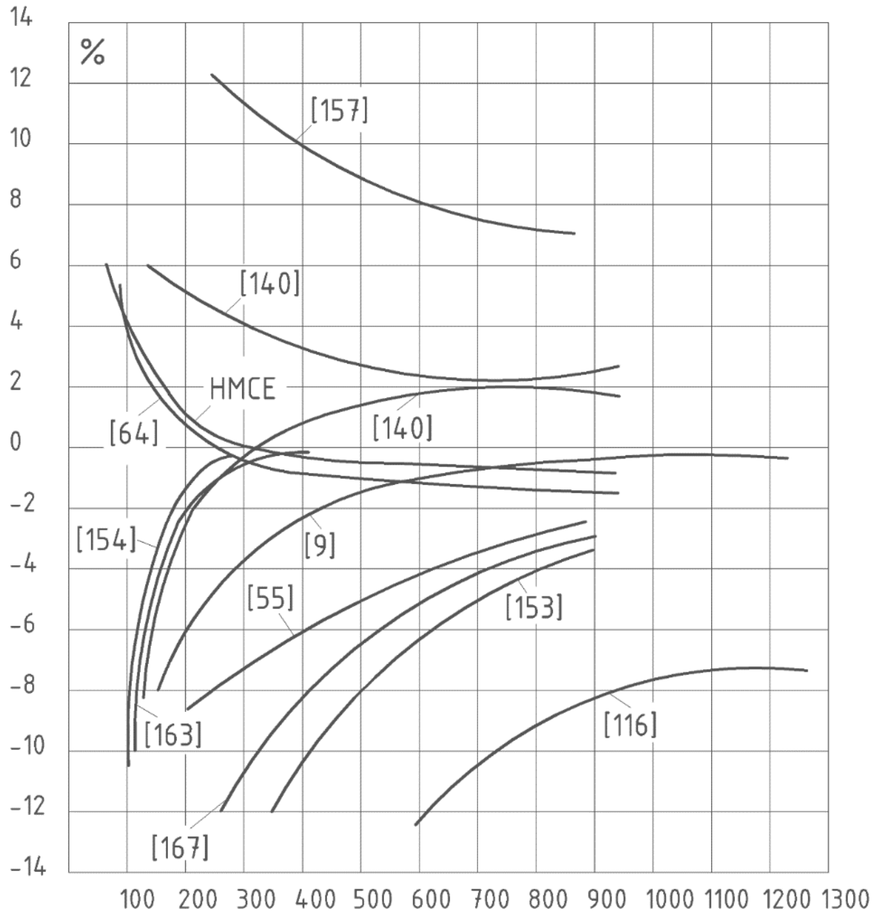


Рис. 6.15. Графік похибки прогину центра панелі відносно еталонного рішення

Ефективність застосування розробленого апарату чисельного аналізу для моделювання масивних просторових конструкцій була перевірена на прикладі призматичного бруса з квадратним поперечним перерізом (рис. 6.16). Сторона поперечного перерізу -b, довжина бруса -$a = 2b$. По верхній площині ($Z^{1'} = b$) об'єкт навантажений вертикальним рівномірно розподіленим навантаженням одиничної інтенсивності. У якості кінематичних граничних умов прийнято відсутність вертикальних переміщень в площині $Z^{3'} = 0$ і $Z^{3'} = a$. Також:

$$U^{\alpha'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = U^{\alpha'}_{\left(z^{3'}=a\right)} = 0$$

$$\sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=a\right)} = 0$$

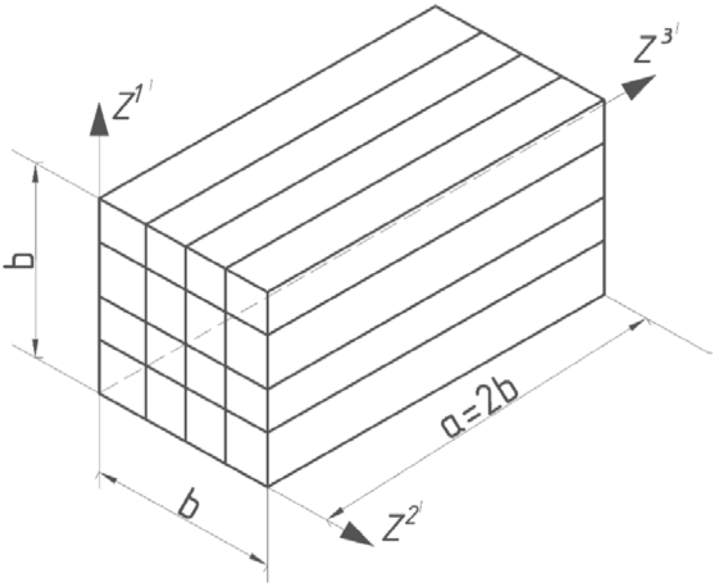


Рис. 6.16. Загальний вигляд прямокутного бруса

Розв’язання аналогічної задачі отримано в роботі [30] на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень. В табл.6.6 наведені значення вертикальних переміщень в різних точках перерізу $Z^{3'} = \frac{a}{2}$, отримані на основі НМСЕ і за допомогою підходу [32]. У всіх точках розглянутого перерізу відмінність результатів складає близько 1%.

На рис.6.17 продемонстровано характер зміни вертикального переміщення вздовж грані $Z^{1'} = b, Z^{2'} = b$.

Таблиця 6.6

$z^{1'}$	$z^{2'}$	НМСЕ	[30]	%
$0,5b$	$0,5b$	3,41	3,45	1,16
b	$0,5b$	3,93	3,96	0,76
$0,5b$	b	3,67	3,71	1,08
b	b	4,20	4,24	0,94

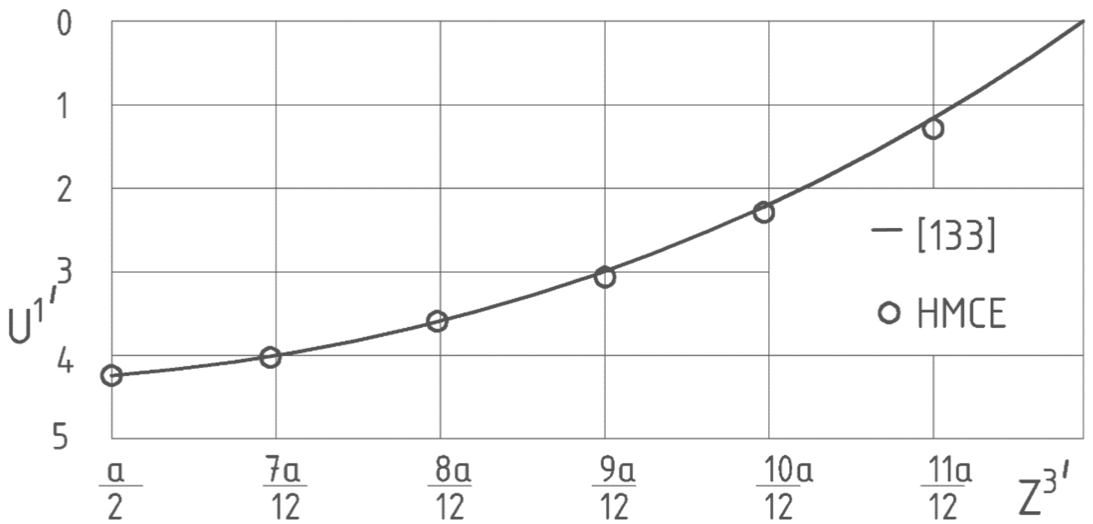


Рис. 6.17. Графік зміни вертикального переміщення вздовж грані $Z^{1'} = b$, $Z^{2'} = b$.

Суцільна лінія відображає еталонні результати, кружечками – значення переміщень, обчислені НМСЕ. Очевидне гарне узгодження рішень, отриманих різними методами. Точність і збіжність отриманих результатів підтверджують універсальність запропонованої методики та її придатність для аналізу просторових конструкцій.

Апроксимація за допомогою функціональних рядів вимагає обґрунтування можливості задовільнити різні типи кінематичних граничних умов. З цією метою розглянута пружна деформація товстої квадратної плити під дією вертикального рівномірно розподіленого навантаження, прикладеного до верхньої площини ($Z^{1'} = h$). Товщина плити $h = 0{,}02$м, довжина сторони $2\text{а} = 5h$, інтенсивність зовнішнього навантаження $q = \frac{E}{50}$, де E - модуль пружності матеріалу, коефіцієнт Пуассона $\upsilon = 0{,}25$. Плита затиснена по всіх чотирьох сторонах. В силу симетрії об’єкта розглядається тільки четверта частина, розрахункова схема котрої наведена на рис. 6.18. Граничні умови:

$$U_{i'\left(z^{3'}=a\right)} = 0 \quad U_{3'\left(z^{3'}=0\right)} = 0$$

$$U_{2'\left(z^{2'}=a\right)} = 0 \quad U_{i'\left(z^{3'}=0\right)} = 0$$

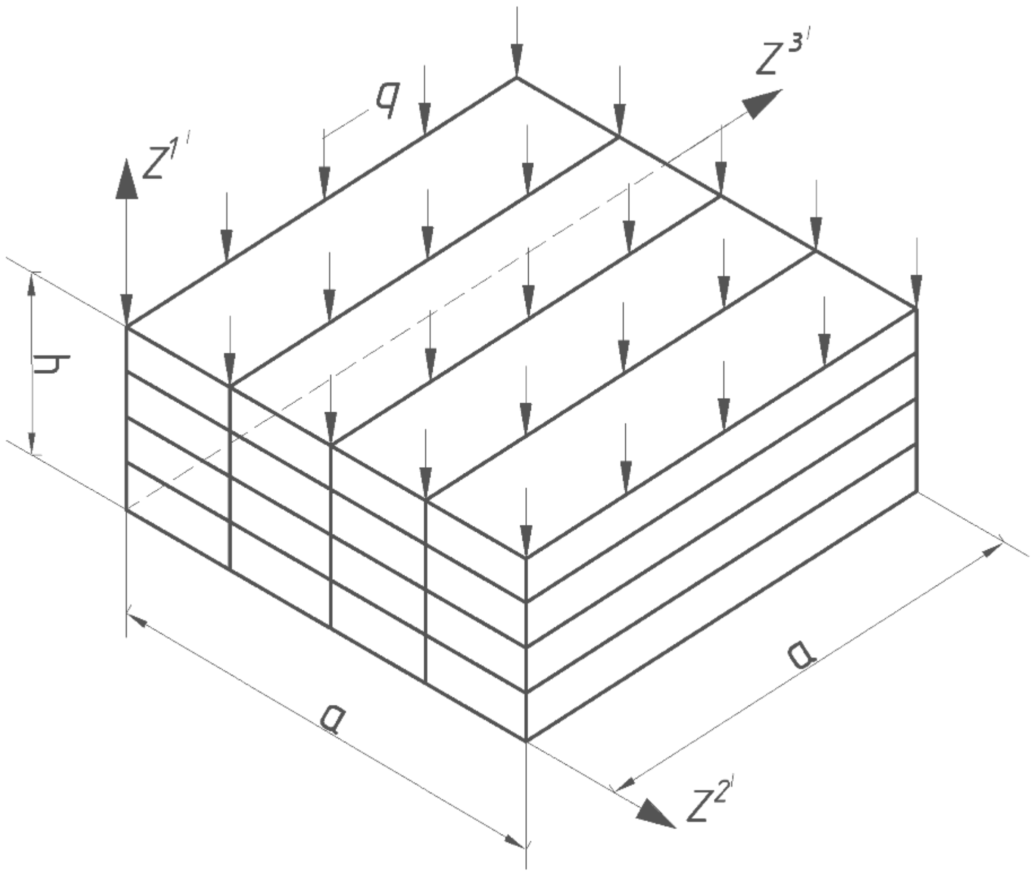


Рис. 6.18. Розрахункова схема плити

Зіставлення результатів, отриманих на основі НМСЕ і розкладанням по ортогональним функціям у всіх трьох напрямках наведено в табл. 6.7 та 6.8.

В табл. 6.7 показана збіжність безрозмірних переміщень $v_1 = \frac{u_1 E}{qa}$ в залежності віз спільної кількості невідомих *M*, отриманих НМСЕ в центрі плити (верхній, середній і нижній поверхнях), а також їх похибки відносно рішень, наведених в роботі [98].

В табл. 6.5 вказані аналогічні данні для відносних напружень $\bar{\sigma}^{3'3'} = \frac{\sigma^{3'3'}}{q}$.

Таблиця 6.7

$z^{1'}$	V_1	M		
		81	375	1029
0	5,414	4,804	5,410	5,512
		-11.27%	-0,07%	+1,81%
$\frac{h}{2}$	5,729	5,121	5,591	5,710
		-10,63%	-2,42%	-0,35%
h	5,723	4,952	5,623	5,770
		-13,50%	-1,75%	+0,82%

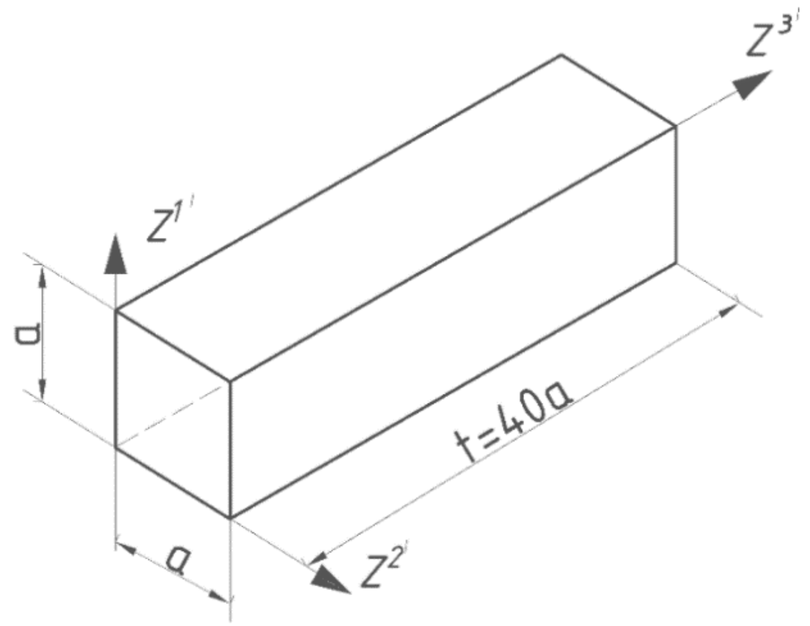
Таблиця 6.8

$z^{1'}$	$\bar{\sigma}^{3'3'}$	M		
		81	375	1029
0		3,501	3,767	3,810
	3,825	-8,49%	-1,51%	-0,39%
h		3,750	4,070	4,130
	4,150	-9,63%	-1,92%	-0,48%

Отримані дані свідчать про високу швидкість збіжності розробленого підходу при розрахунках конструкцій з довільними граничними умовами.

Розроблений програмний пакет орієнтовано на аналіз конструкцій у пружній та пружно-пластичній областях деформацій. Апробація можливостей пакета для дослідження розвитку пластичних деформацій у тонкостінних конструкціях здійснена на прикладі шарнірно закріпленої балки заданої довжини $t = 40a$, де a - розмір сторони квадратного поперечного перерізу (рис.6.19). Балка деформується під дією рівномірно розподіленого по верхній площині навантаження і виконана із ідеального матеріалу з характеристиками: модуль пружності $\mathrm{E} = 2{,}1 \cdot 10^5$МПа, коефіцієнт Пуассона $\upsilon = 0$, межа плинності при чистому зсуві $\sqrt{3}\tau_3 = 9{,}5 МПа$.

Розв'язання задачі отримано при п'яти гауссових точках інтегрування по висоті елемента.



$$U^{\alpha'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = U^{\alpha'}_{\left(z^{3'}=l\right)} = 0$$

$$\sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=0\right)} = \sigma^{3'3'}_{\left(z^{3'}=l\right)} = 0$$

Рис.6.19. Розрахункова схема балки

Відповідно до точного розв'язання задачі, наведеному в роботі [98], межі зон пластичної деформації описуються формулою:

$$\left(2z^{1'} - a\right)^2 - 3a^2 = 2a^2 \frac{q}{q_0}\left[\frac{(2z^3 - t)^2}{t^2} - 1\right] \qquad (6.3)$$

Тут q_0- значення інтенсивності розподіленого навантаження при котрому виникають пластичні деформації:

$$q_0 = \frac{16M}{3t^2} \qquad (6.4)$$

де M - граничне значення згинального моменту.

На рис.6.20 наведений графік, що відображає розвиток зони пластичних деформацій по довжині балки при збільшенні інтенсивності зовнішнього навантаження.

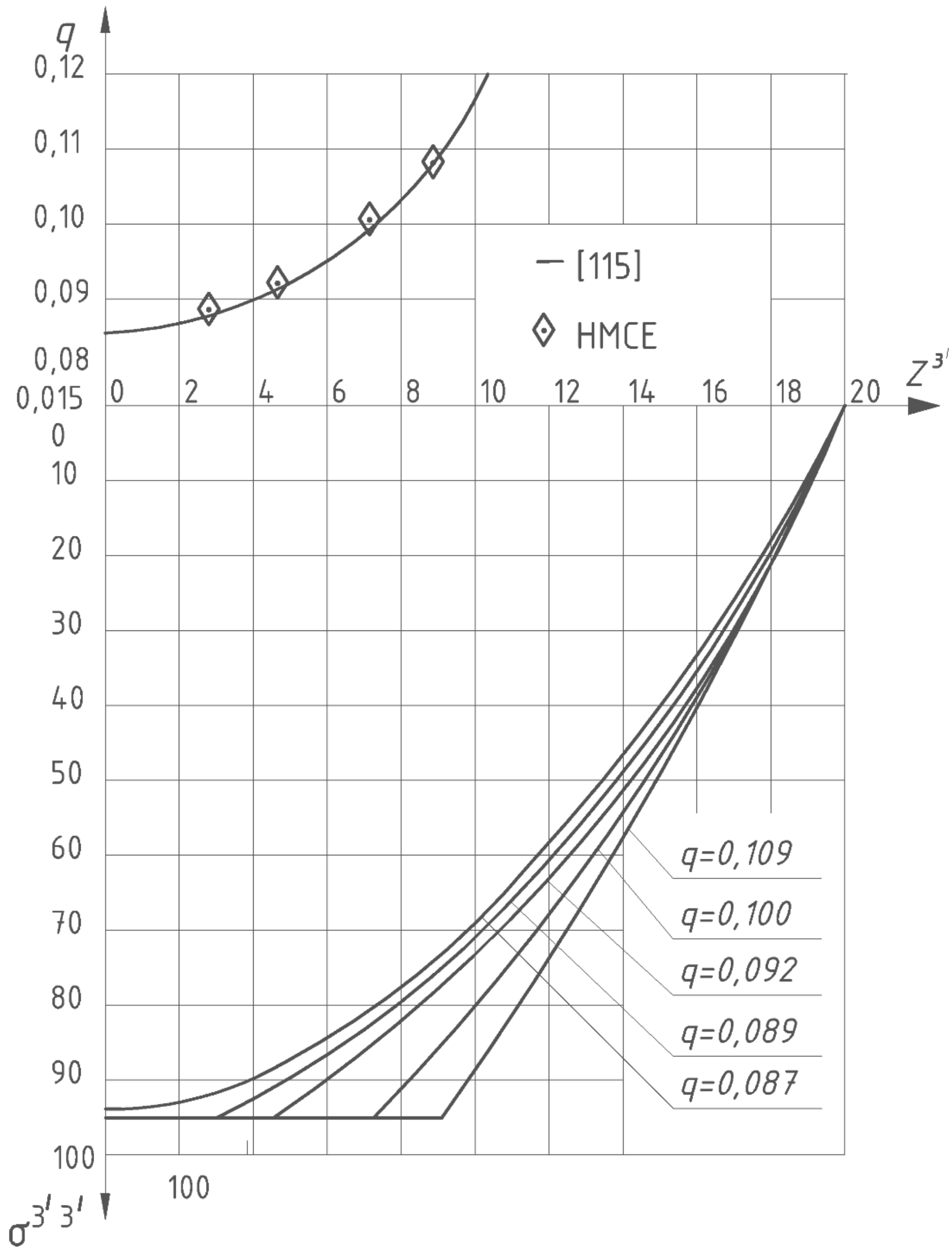


Рис. 6.20. Графік розвитку зони пластичних деформацій по довжині балки

Суцільною лінією позначена крива, отримана за допомогою співвідношення (6.3), ромбиками позначені результати розв’язання даної задачі на основі НМСЕ. У всьому діапазоні зміни інтенсивності навантаження q похибка чисельного розв’язання не перевищує 1%.

Там же наведені графіки, що ілюструють зміну розподіленого напруження $\sigma^{3'3'}$ по довжині балки в найближчій до поверхні точці інтегрування при збільшенні зовнішнього навантаження. Виникнення пластичних деформацій в балці відбувається при значенні нормальних навантажень $\sigma = 9{,}5$МПа, що відповідає граничній інтенсивності зовнішнього навантаження $q_0 = 0{,}0875 МПа$.

Таким чином, розроблена методика дозволяє з високою точністю визначати напружено-деформований стан тонкостінних конструкцій у пружно-пластичній області деформації. Аналіз можливостей методики для розв’язання фізично нелінійних задач у масивних об’єктах з довільними кінематичними граничними умовами виконано на прикладі призматичного бруса зі складним поперечним перерізом, який має круглі отвори та перебуває під дією внутрішнього тиску. Розрахункову схему конструкції подано на рис. 6.21.

Інтенсивність внутрішнього тиску змінювалася в межах $q = 0{,}667\tau_s - 1{,}524\tau_s$, де τ_s- межа текучості матеріалу при чистому зсуві. КіНМСЕатичні граничні умови задачі формуються наступним чином: торець $Z^{3'} = 0$ -вільний, торець $Z^{3'} = a$ - жорстко закріплений. Матеріал ідеально пластичний.

Розв’язання задачі отримано по розробленій методиці на основі НМСЕ і за допомогою скінчено елементної дискредитації у трьох напрямках [32]. У свою чергу, число членів розкладання відповідало кількості СЕ вздовж осі $Z^{3'}$.

Результати приведені у вигляді епюр відносних напружень $\bar{\sigma}_{(A)}^{3'3'} = \frac{\sigma^{3'3'}}{\tau_s}$ (рис.6.21) і $\bar{\sigma}_{(A)}^{2'2'} = \frac{\sigma^{2'2'}}{\tau_s}$ (рис.6.22), побудованих вздовж лінії, що проходить через точку A паралельно осі $Z^{3'}$.

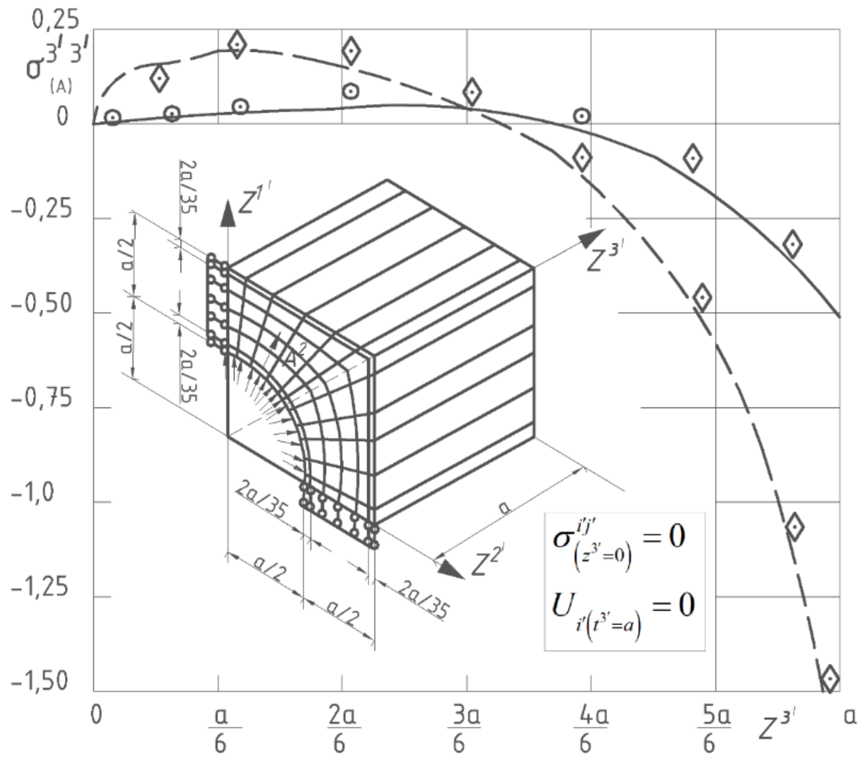


Рис.6.21. Епюри відносних напружень $\bar{\sigma}^{3'3'}_{(A)} = \frac{\sigma^{3'3'}}{\tau_s}$

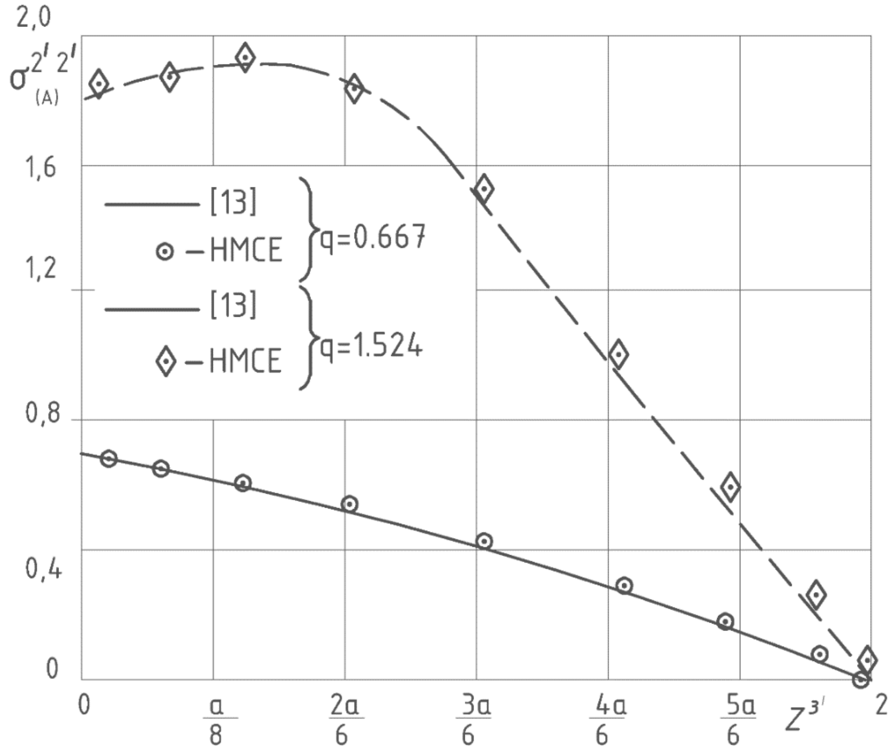


Рис. 6.22. Епюри відносних напружень $\bar{\sigma}^{2'2'}_{(A)} = \frac{\sigma^{2'2'}}{\tau_s}$

Суцільними лініями зображені криві, що відображають скінчено елементні розв'язання при інтенсивності зовнішнього навантаження $q = 0{,}667\tau_s$, штрихові – теж саме при $q = 1{,}524\tau_s$. Ромбиками позначені напруження обчисленні НМСЕ при $q = 0{,}667\tau_s$, кружечками – $q = 1{,}524\tau_s$. Спостерігається повна збіжність результатів, отриманих різними методами.

6.5 Збіжність методу скінченних елементів та напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл зі змінними фізичними та геометричними параметрами

Надійність розробленого НМСЕ у порівнянні з традиційним МСЕ перевіряється дослідженням впливу напружень і деформацій на криволінійні та нерівномірні об'єкти. Для цього розглянуто низку контрольних прикладів. НМСЕ і МСЕ порівнюються для об'єктів, де спостерігаються поступові зміни геометричних і матеріальних характеристик уздовж осі декомпозиції. Збіжність при збільшенні кількості невідомих оцінюється шляхом порівняння з еталонним розв'язком, отриманим або з інших досліджень, або за допомогою МСЕ.

Проведено аналіз збіжності НМСЕ і МСЕ для об'єктів із поступовою зміною геометричних і матеріальних характеристик уздовж осі розтягування. Виявлено, що такі зміни не призводять до суттєвих відхилень напружень та деформацій.

На рис. 6.23 представлено пружну рівновагу бруска, нижня поверхня якого описана параболою, а його висота є плавною та неперервною функцією відносно осі $Z^{3'}$:

$$h\left(Z^{3'}\right) = h_0 - 0.4\left(Z^{3'}\right)^2 \tag{6.5}$$

Граничні умови на торцях $Z^{3'} = -1$ і +1 підтримуються жорсткими діафрагмами, тоді як інші осі є гнучкими.

$$\frac{U^{1'}}{Z^{3'}} = \pm 1 = \frac{\sigma^{3'3'}}{Z^{3'}} = \pm 1 = 0 \tag{6.6}$$

Для моделювання умов плоскої деформації в тестових прикладах було обрано шар у напрямку Z товщиною приблизно в один СЕ, який було закріплено, щоб уникнути зсувів у напрямку U2'.

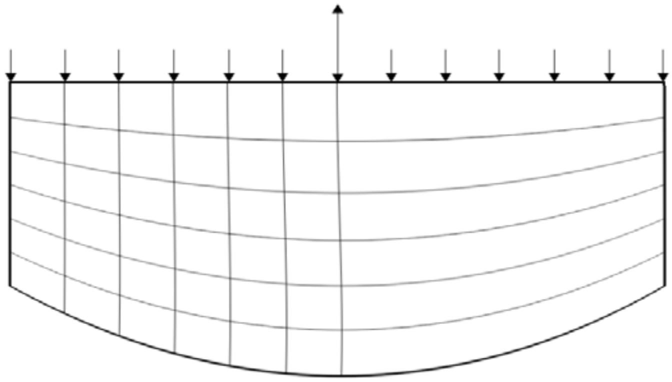


Рис. 6.23. Об’єкт під рівномірно розподіленим навантаженням одиничної інтенсивності

Рівномірно розподілене навантаження одиничної інтенсивності $q = 1$ і одиничний модуль пружності, що прикладається до верхньої поверхні об’єкта. Об’єкт розбивається на скінченні елементи, як показано в лівій частині рис. 6.23. Результати збіжності, наведені в таблиці 6.9, показують, що 144 скінченних елементів є достатніми, оскільки подальше збільшення їх кількості не дає суттєвого ефекту. Ефект від утримання елементів в ряду m3 спостерігається при збереженні $Z^1 = 8$.

Таблиця 6.9

m	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{2'}$	%
25	$1.535 \cdot 10^2$	3.3	$9.109 \cdot 10^3$	5.2
81	$1.579 \cdot 10^2$	0.6	$9.503 \cdot 10^3$	1.1
169	$1.588 \cdot 10^2$	–	$9.608 \cdot 10^3$	–

Характер збіжності НМСЕ представлений на рис. 6.24 у вигляді графіка (суцільна лінія), що відображає залежність похибки обчислення максимального відносного зсуву $\left(V_{max}^{1'} = \frac{U_{max}'}{h_0}\right)$, $h_0 = 0.11m$ від числа утримуваних членів розкладання третьому напрямку. Поліноміальна апроксимація для збіжності МСЕ показана штриховою лінією на рис. 6.24. Очевидно, що похибка більш ніж удвічі перевищує похибку кусково-лінійної апроксимації.

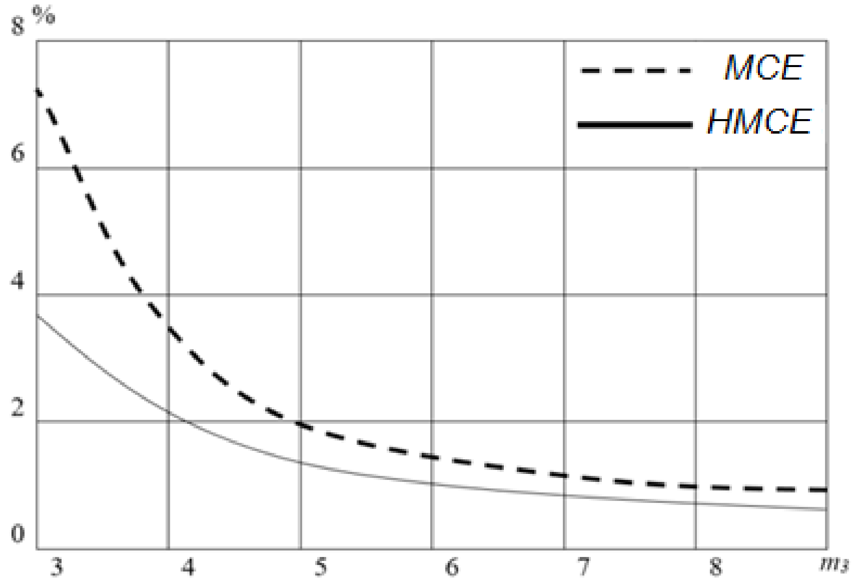


Рис. 6.24. Збіжність МСЕ з використанням поліноміальної апроксимації порівняно з кусково-лінійною апроксимацією

На прикладі призматичних тіл з поступовою зміною форми і характеристик матеріалу, а також швидкості збіжності розв’язку представлено дослідження призматичних тіл зі змінним модулем пружності.

$$E\left(Z^{3'}\right) = E_0 - (E_0 - E_1)\left|Z^{3'}\right| \qquad (6.7)$$

$$E_0 = 2E_1.10^5, E_1 = 1.4 \cdot 10^5$$

На рис. 6.25 показана розрахункова схема і скінченоелементні сітки для аналізу НМСЕ та МСЕ. Граничні умови на кінцях тіла визначаються згідно з рівнянням 6.6. До верхньої поверхні прикладається рівномірно розподілене навантаження одиничної інтенсивності.

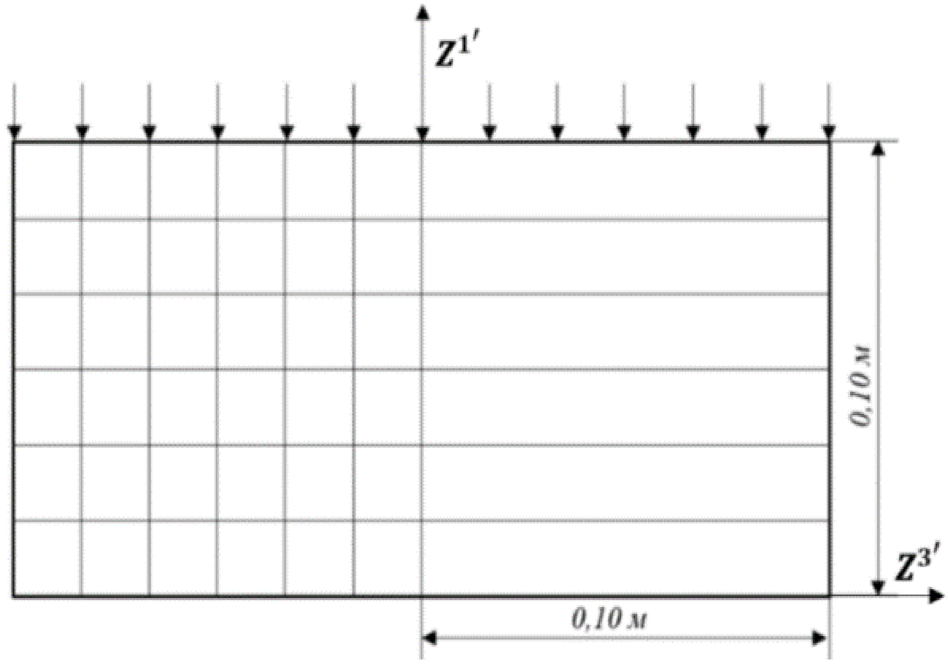


Рис. 6.25. Призматичне тіло з змінним модулем пружності

Метод скінченних елементів дав розв'язок з сіткою 169 вузлів, як показано в таблиці 6.10, при використанні 8 скінченних елементів у напрямку Z^1 напрямку.

Таблиця 6.10

m	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{2'}$	%
25	$1.517 \cdot 10^{-2}$	3.3	$8.762 \cdot 10^{-3}$	5.2
81	$1.557 \cdot 10^{-2}$	0.6	$9.239 \cdot 10^{-3}$	1.1
169	$1.565 \cdot 10^{-2}$	–	$9.373 \cdot 10^{-3}$	–

На рисунку 6.26 показано залежність між відсотковою похибкою визначення максимального відносного зміщення та кількістю невідомих.

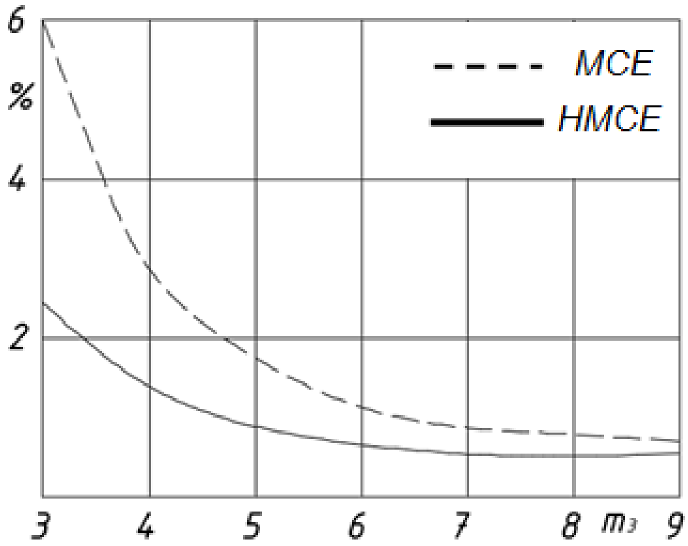


Рис. 6.26. Величини похибок при різній кількості невідомих

Спостерігається подібна картина збіжності, як і раніше отримана для об'єктів різної форми зі змінною геометрією. Методи НМСЕ та МСЕ застосовуються для аналізу неоднорідних криволінійних об’єктів з різними типами вставок, вирізів та отворів. Матеріал таких об’єктів характеризується кусково-лінійними функціями, що призводить до локального перерозподілу напружень. Оскільки наявність концентраторів призводить до локального перерозподілу напружень, то для апроксимації об'єктів даного типу потрібно збільшувати кількість членів розкладання, що утримуються.

Щоб побачити, як глибина вирізу впливає на збіжність НМСЕ і МСЕ, проаналізовано завдання про розтягнення смуги з дугоподібним вирізом радіусом z аналізується з плавним збільшенням глибини вирізу, як показано на рисунку 6.27. Смуга має $0.4\ m$ довга $0.2\ m$ ширина, а довжина вирізу дорівнює $0.1\ m$. Ширину горловини позначено через d.

Відношення максимального напруження в ослабленому перерізі до середнього напруження визначається як коефіцієнт концентрації.

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}} \tag{6.8}$$

Номінальні напруженьи σ_{HOM} знаходять за формулою:

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{P}{bd}, \tag{6.9}$$

де, $P = qD$.

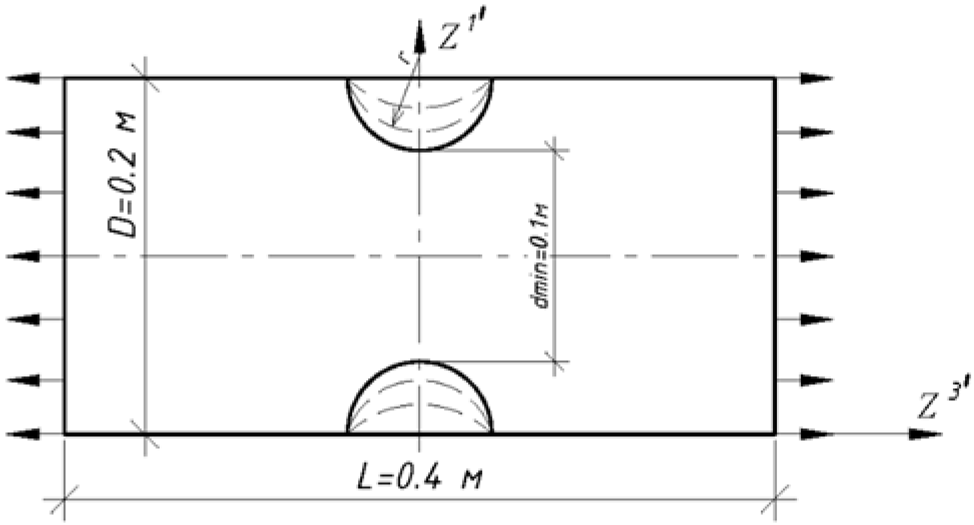


Рис. 6.27. Смуга з радіальним фігурним вирізом

Коефіцієнти концентрації, знайдені для $\frac{D}{d}$ для НМСЕ варіюють від 1 до 2 і порівнюються з коефіцієнтами, представленими в [48]. Результати, наведені в таблиці 6.11, свідчать про те, що метод НМСЕ є менш надійним, оскільки існує 2% похибки в розрахунках K_t за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів.

Таблиця 6.11.

$\frac{D}{d}$		L	1.1	1.54	2
K_t	НМСЕ	1,01	1,215	1,44	1,485
	МСЕ	1,0	1,23	1,46	1,51
	%	1	1,2	1,4	1,65

Збіжність НМСЕ та МСЕ порівнювали з еталонною [48] для випадку лінійних напівкруглих розрізів. У таблиці 6.12 показано зміну похибки розрахунків зі збільшенням точності апроксимації $Z^{3'}$.

Таблиця 6.12.

m_3	НМСЕ		МСЕ	
	σ_{max}	%	σ_{max}	%
7	2.81	7.1	2.73	9.8
9	3.01	0.3	2.9	4
13	2.97	1.6	2.98	1.3

У цьому тестовому прикладі, для фіксованої кількості невідомих, як НМСЕ, так і МСЕ дають однаковий розв’язок.

Порівняння швидкості збіжності традиційного МСЕ та НМСЕ при ступінчастій зміні модуля пружності на прямокутній пластині з квадратною вставкою, як показано на рис.6.28. Модуль пружності матеріалу вставки E поступово зменшується від початкового значення E_0 до утворення отвору і знаходження розв’язку.

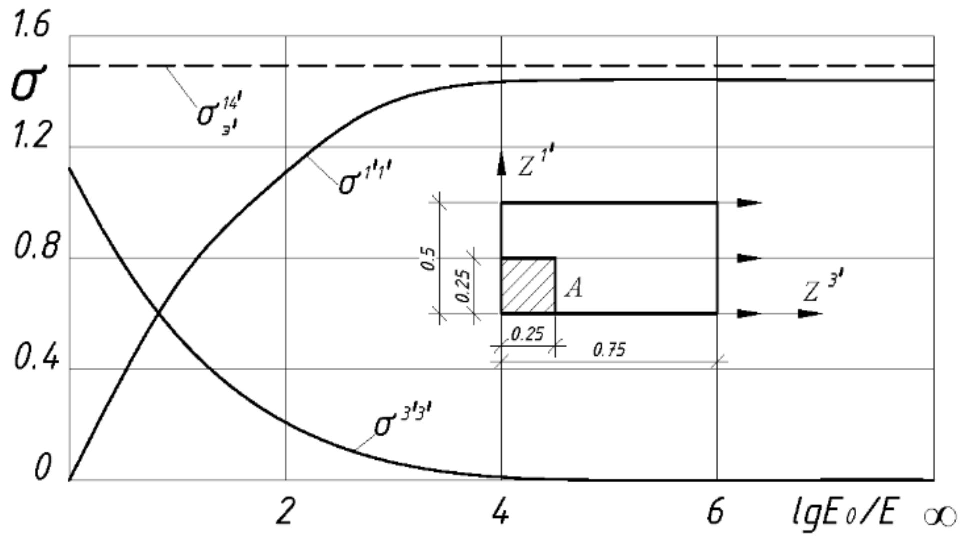


Рис. 6.28. Прямокутна пластина з квадратною вставкою під дією одиничного навантаження рівномірної інтенсивності

Рівномірне навантаження з однаковою інтенсивністю $q = 1$ прикладається з протилежних сторін пластини. Еталонне рішення було отримано за допомогою МСЕ з використанням рівномірної сітки вздовж $Z^{1'}$та $Z^{3'}$ та числом вузлів рівним 247. Розв'язок задачі НМСЕ було отримано з використанням 12 елементів у кожному напрямку.

Зміна напружень на контурі вирізу (точка А) досліджувалась при зменшенні модуля пружності від E_0 до E. Модуль пружності пластини залишався незмінним, як і для еталонного розв'язку, в якому для оцінки збіжності розв'язку за допомогою МСЕ використовувалася пластина з квадратним отвором. За відношення модулів пружності пластини до вставки, яке становить близько чотирьох порядків, параметри напружено-деформованого стану наближаються до еталонних значень, як показано на рис. 6.28. Для достовірності результатів при моделюванні вирізу прямокутної форми без пружності дуже важливо забезпечити коректність природних граничних умов на внутрішній поверхні.

Розглянемо розподіл напружень у скінченних елементах, як показано на рисунку 6.29, при проходженні через вирізи.

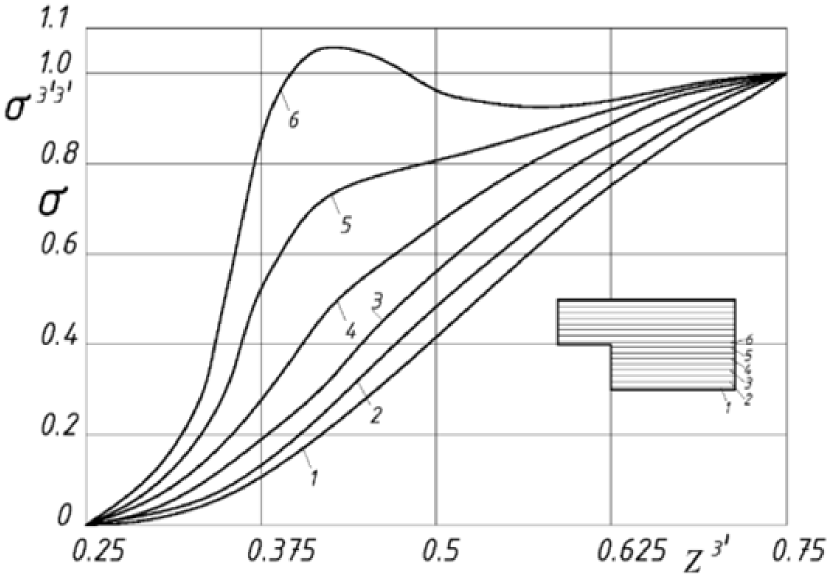


Рис. 6.29. Розподіл напружень у скінченних елементах в межах вирізів

З рис. 6.29 видно, що граничні умови на вільній поверхні є коректними, оскільки напруження наближаються до нуля поблизу контуру отвору. Для перевірки результатів напіваналітичного методу для пластини з квадратним отвором порівнюються діаграми напружень у різних перерізах, отримані в роботі [48].

На рисунку 6.30 показано узгодження між цими двома методами.

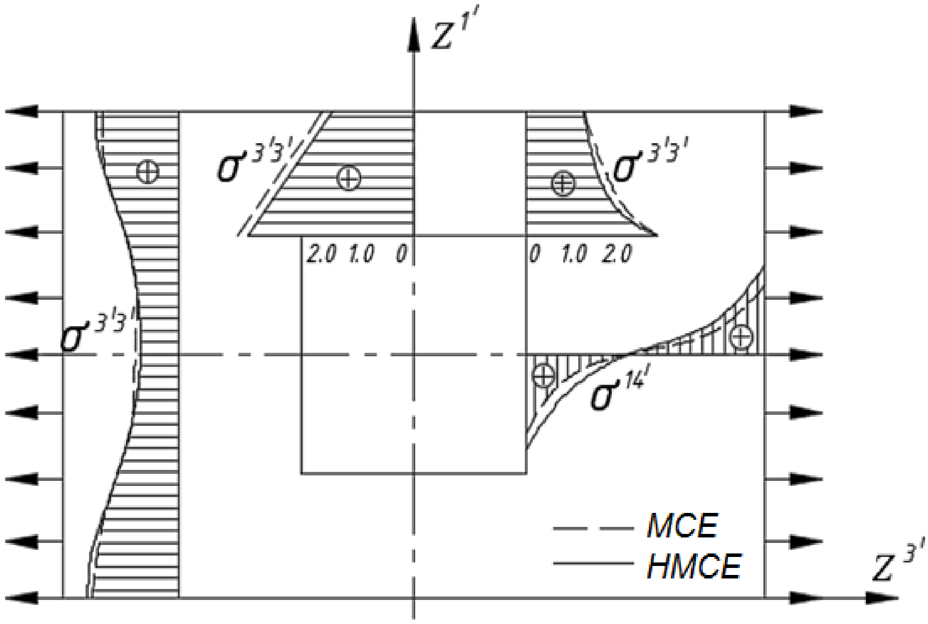


Рис. 6.30. Діаграми напружень

У таблиці 6.13 показано результати збіжності НМСЕ і МСЕ, оскільки збережені члени ряду представляють $Z^{3'}$ зміни осей.

Таблиця 6.13.

m_3	НМСЕ		МСЕ	
	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{2'}$	%
4	$7.645 \cdot 10^{-6}$	2.6	$7.452 \cdot 10^{-6}$	5.2
7	$7.913 \cdot 10^{-6}$	-0.8	$7.737 \cdot 10^{-6}$	1.44
10	$7.920 \cdot 10^{-6}$	-0.9	$7.806 \cdot 10^{-6}$	0.6

Дані показують, що НМСЕ досягає кращих результатів чим МСЕ для тієї ж кількості невідомих. Розмір пластини, при наявності вирізу, відіграє важливу роль у визначенні характеру напружено-деформованого стану. Діаграми напружень $\sigma^{1'1'}$ у перерізі, що проходить через вісь Z^3 показано на рисунку 6.31 при зміні довжини вирізу.

Суцільні лінії на рис. 6.32 представляють НМСЕ, а пунктирні лінії - МСЕ, де в обох випадках можна спостерігати схожі результати. Для співвідношення $\frac{I}{L}$ що дорівнює $\frac{5}{6}$, то $\sigma^{1'1'}$ представляє собою лінію, а полиця може бути розрахована як защемлена балка. У цьому випадку обидві версії МСЕ повинні мати однакову кількість апроксимуючих функцій у напрямку Z^3 для досягнення певної точності.

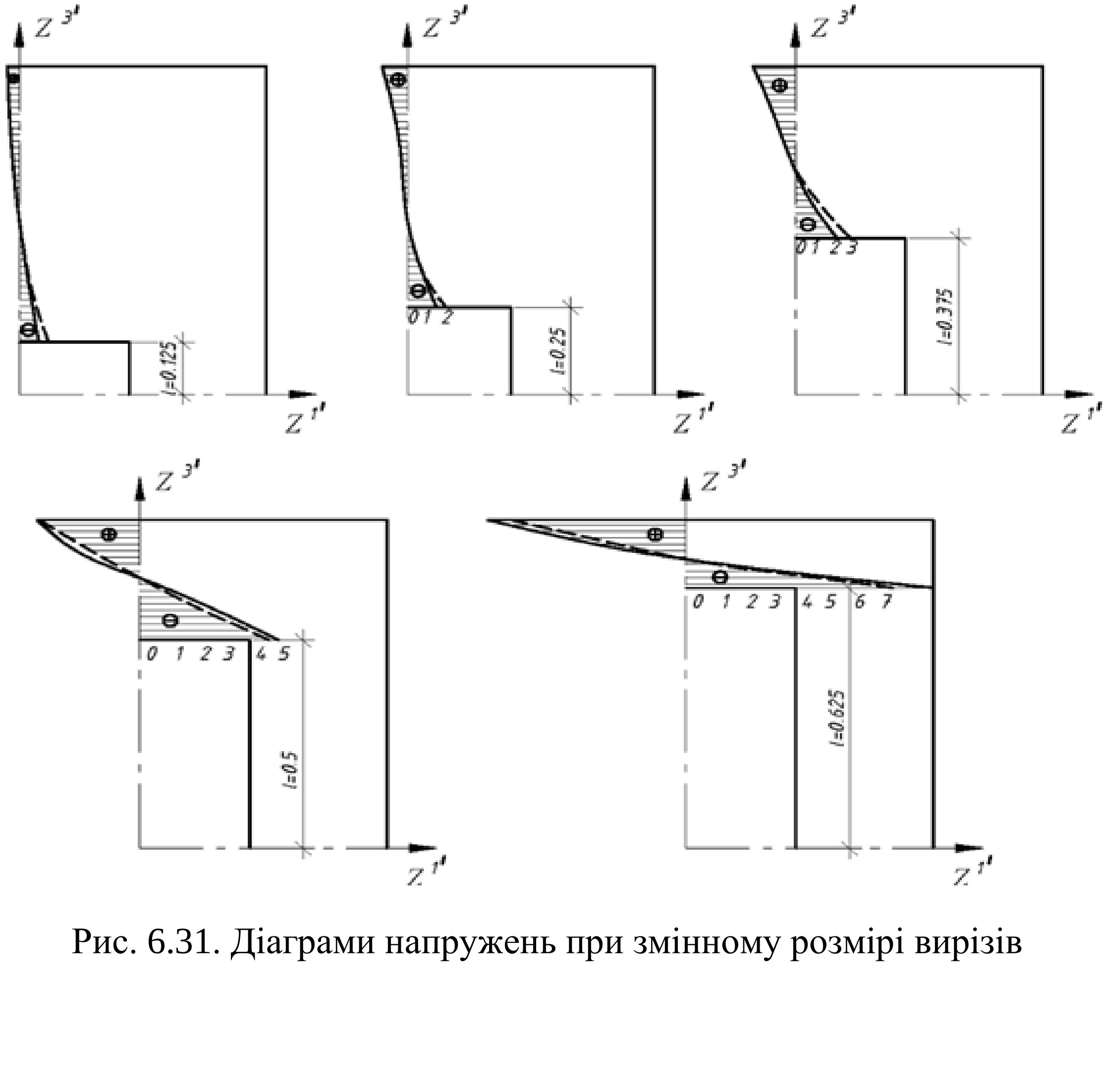


Рис. 6.31. Діаграми напружень при змінному розмірі вирізів

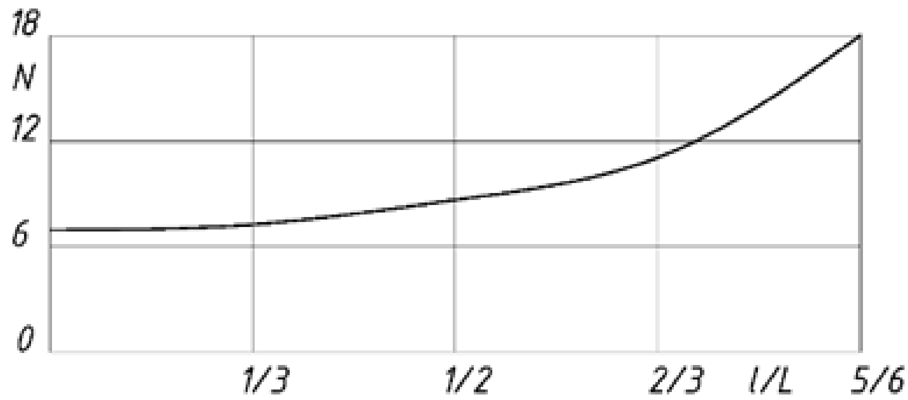


Рис. 6.32. Узгодження між НМСЕ (суцільний) та МСЕ (пунктир) з урахуванням лінії напружень

Очевидно, що для призматичних об’єктів з кусково-неперервними змінами геометричних та фізико-математичних параметрів, матеріалу та математичних параметрів метод поліномного розкладання є настільки ж точним або навіть більш точним, ніж кусково-лінійна апроксимація.

Пластична деформація в об'єкті викликає більше складнощів у розумінні напруження та деформації.

У наступному прикладі порівнюється збіжність НМСЕ і МСЕ для прямокутної смуги з пружною і пластичною деформацією, яка має виріз, як показано на рисунку 6.33. До верхньої поверхні прикладається рівномірне навантаження $q = 0.5\tau_s$. Межі смуги фіксовані і визначаються формулою (6.6).

У табл. 6.14 наведено результати апроксимації максимальних відносних переміщень методом МСЕ. З неї випливає, що розв’язок з 289 вузлами можна вважати еталонним.

Експеримент на збіжність проводився з використанням 13 елементів у напрямку Z^1. На рис. 6.34 показано зміну відсоткової похибки для апроксимацій НМСЕ і МСЕ для пружно-пластичних тіл. Характер збіжності подібний до того, що спостерігається для пружних тіл.

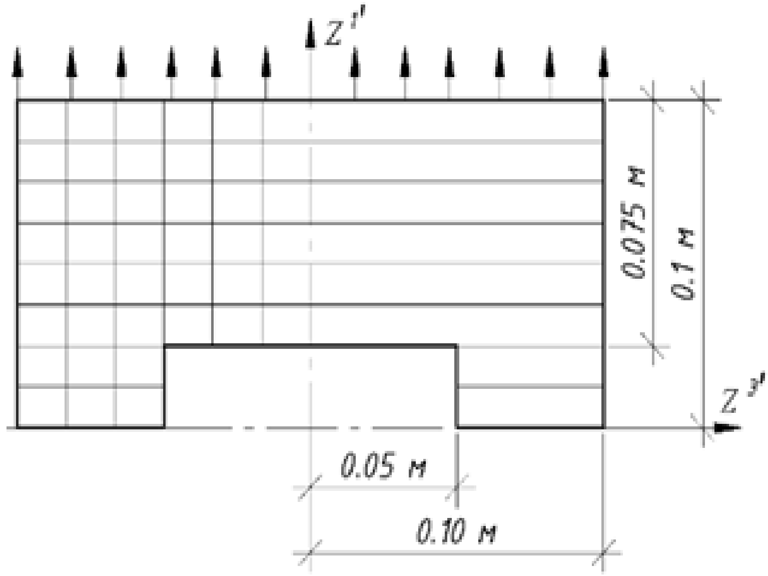


Рис. 6.33. Прямокутна смуга з пружно-пластичною деформацією та вирізом

Таблиця 6.14

m	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{3'}$	%
25	$1.460\cdot10^{-2}$	3.3	$-1.075\cdot10^{-2}$	5.2
81	$1.508\cdot10^{-2}$	0.6	$-1.129\cdot10^{-2}$	1.1
169	$1.519\cdot10^{-2}$	0.6	$-1.144\cdot10^{-2}$	1.1
289	$1.523\cdot10^{-2}$	–	$-1.149\cdot10^{-2}$	–

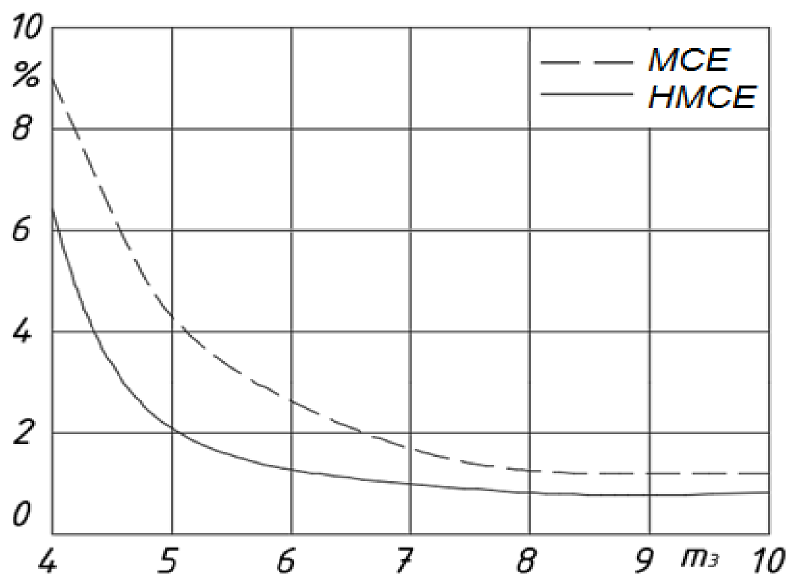


Рис. 6.34. Порівняння похибок у відсотках для пружно-пластичних тіл

Таким чином, рішення для апроксимації переміщень за допомогою традиційних МСЕ та НМСЕ є подібним як для пружних, так і для пружно-пластичних випадків.

Порівнюючи збіжність напіваналітичного методу [48-54] та традиційних МСЕ для багатьох криволінійних, нерівномірних призматичних об’єктів зі змінними властивостями матеріалу різноманітних методів, було виявлено, що поліноміальні апроксимації є або однаково точними, або точнішими за кусково-лінійну апроксимацію як для пружних, так і для пружно-пластичних задач.

Отже, можна зробити висновок, що НМСЕ забезпечує розв’язок із меншою кількістю невідомих, зберігаючи певний рівень точності для об'єктів з геометричними і фізичними параметрами, що плавно змінюються. Швидкість збіжності НМСЕ, що використовує ітераційний метод, також є вищою порівняно з МСЕ при розв’язанні як лінійних, так і нелінійних рівнянь [41-42; 48-51]. Зокрема, НМСЕ ефективніше підходить для аналізу криволінійних, призматичних об’єктів зі змінними характеристиками матеріалу та вирізами.

6.6 Обґрунтування достовірності результатів, отриманих на основі НМСЕ

Для апробації розробленого чисельного методу при дослідженні призматичних тіл зі змінними фізичними та геометричними параметрами отримано розв’язки тестових задач на пружну, пружно-пластичну з урахуванням великих пластичних деформацій. Рисунок 6.35 ілюструє пружний підхід для просторово нерівномірно навантаженої оболонки, де серединна поверхня представлена у вигляді еліптичної параболи.

$$Z^{1'} = \left[1 - \frac{\left(2Z^{3'} - a\right)^2}{2a^2} - \frac{\left(2Z^{2'} - b\right)^2}{2b^2}\right] \tag{6.10}$$

Оболонка має довжину 12 м, ширину 10 м і товщину 2 м. Модуль пружності матеріалу $E = 1$, і коефіцієнт Пуассона $\upsilon = 0.3$.

Для середнього шару граничні умови розглядаються наступним чином:

$$\text{за адресою } Z^{3'}=0, Z^{3'}=a, \sigma^{3'3'}=U^{1'}=U^{2'}=0,$$
$$\text{при } Z^{2'}=0, Z^{2'}=b, \sigma^{2'2'}=U^{1'}=U^{3'}=0, \tag{6.11}$$

З огляду на симетрії розглядається одна четверта частина оболонки. Зовнішня поверхня тіла навантажена рівномірним навантаженням, що визначається як:

$$q^{1'}\left(Z^{2'}, Z^{3'}\right)=-\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi Z^{3'}}{a}\sin\frac{\pi Z^{2'}}{b} \tag{6.12}$$

Григоренко Я. М. та ін. вирішили подібну проблему [8].

Форма була розбита на 9 скінченних елементів як в $Z^{1'}$ і $Z^{2'}$ напрямку. Переміщення у напрямку $Z^{3'}$ було оцінено за допомогою розкладу в ряд поліномів.

Для оцінки кількості членів ряду в синусоїді для розв’язання задачі із зовнішнім навантаженням вздовж третьої осі було проведено дослідження збіжності, результати якого наведено в табл. 6.15. Результати для розрахунків переміщень у напрямку $Z^{1'}$ наведено у відсотках точності для порівняння з результатами [8].

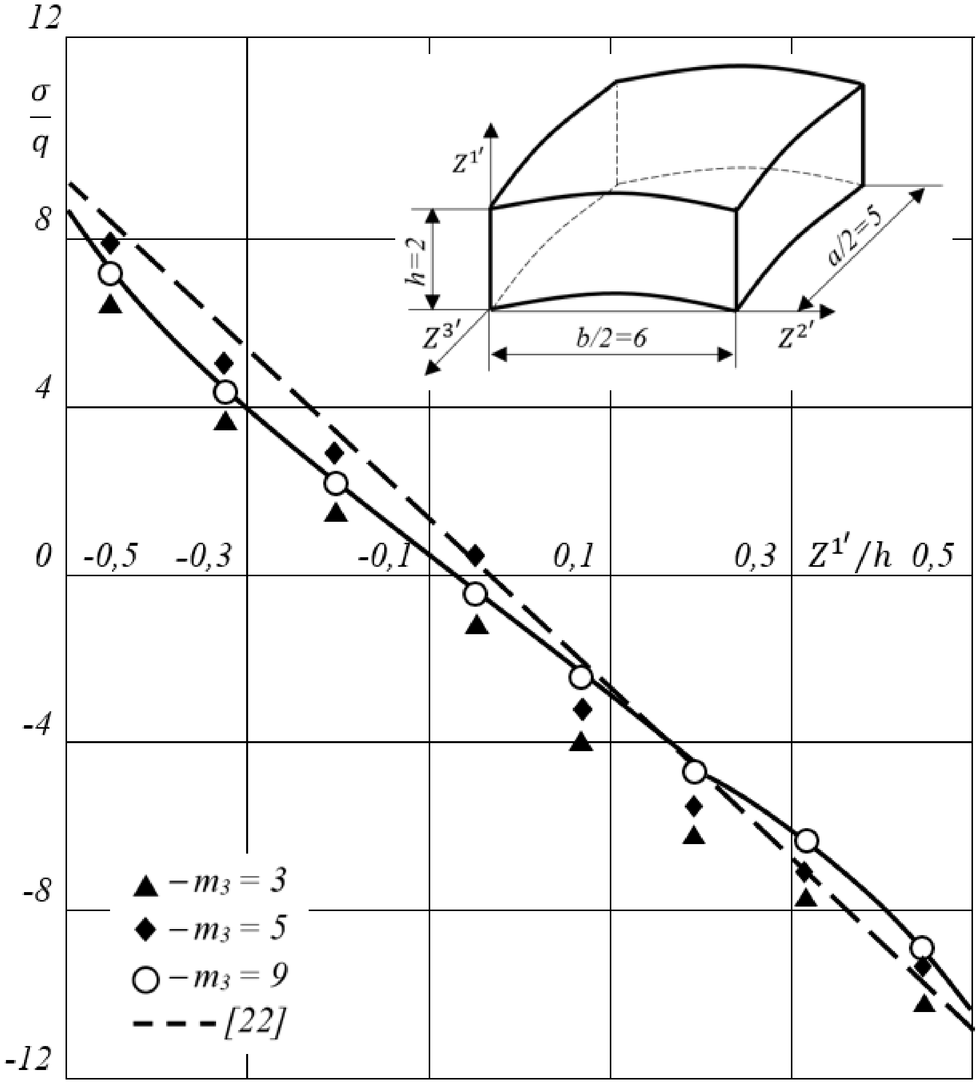


Рис. 6.35. Порівняльний аналіз найбільших напружень на товстостінній оболонці (оболонка зображена у верхньому правому куті)

Таблиця 6.15

m_3	$z^{1'} = 0$		$z^{1'} = 0.4$		$z^{1'} = 0.8$	
	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%
3	0.794	8.6	0.808	8.5	0.814	8.4
5	0.839	3.3	0.850	3.7	0.858	3.5
9	0.841	3.2	0.853	3.4	0.862	3.0
11	0.850	-	0.883	-	0.889	-

m_3	$z^{1'} = 1.4$		$z^{1'} = 1.6$		$z^{1'} = 2$	
	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%
3	0.874	8.3	0.808	8.2	0.796	7.7
5	0.859	3.3	0.852	3.2	0.844	2.4
9	0.861	3.0	0.857	2.6	0.849	1.8
11	0.888	-	0.880	-	0.885	-

Результати в табл. 6.15 показують, що розв’язок з 5 членами розкладання є дещо менш точним порівняно з розв’язком при $U^{1'}$. Однак, результати все ще близькі до результатів, представлених в [8], з різницею лише в 3%.

Аналогічні результати отримано і при порівнянні інших характеристик напружень і деформацій товстостінної оболонки, зокрема, найбільших напружень $\sigma^{3'3'}$ у цьому випадку див. рис. 6.35.

Обґрунтованість розв’язків НМСЕ для фізично нелінійних задач представлена за допомогою пружно-пластичного аналізу куба, що нагрівається в залежності від температури. Куб виготовлено зі сталі ЕІ 395 з довжиною сторони 0,5. Куб знаходиться в неоднорідному гетерогенному температурному полі, де зміна температури визначається наступним чином:

$$T = 800\cos(\pi Z^{1'})\cos(\pi Z^{2'})\cos(\pi Z^{3'}) \tag{6.13}$$

Розв’язок порівнюється з традиційними результатами МСЕ в [100].

Рисунок 6.36 ілюструє розрахункову схему об’єкта та розподіл температури. Результати збіжності пропонують сітку з 16 рівномірно розподілених елементів у площині поперечного перерізу. Більше того, зміна менше 2% спостерігається, якщо сітку розділити навпіл вздовж осі координат. Розв’язки представлені у вигляді діаграм максимальних напружень для пружного та пружно-пластичного варіантів, де криві позначають межі зони пластичної деформації, як показано на рисунку 6.37.

Розподіл напружень $\sigma^{\,3'3'}$ зображено поблизу вертикальної осі симетрії куба, тобто $Z^{2'} = Z^{3'} = 0.06$.

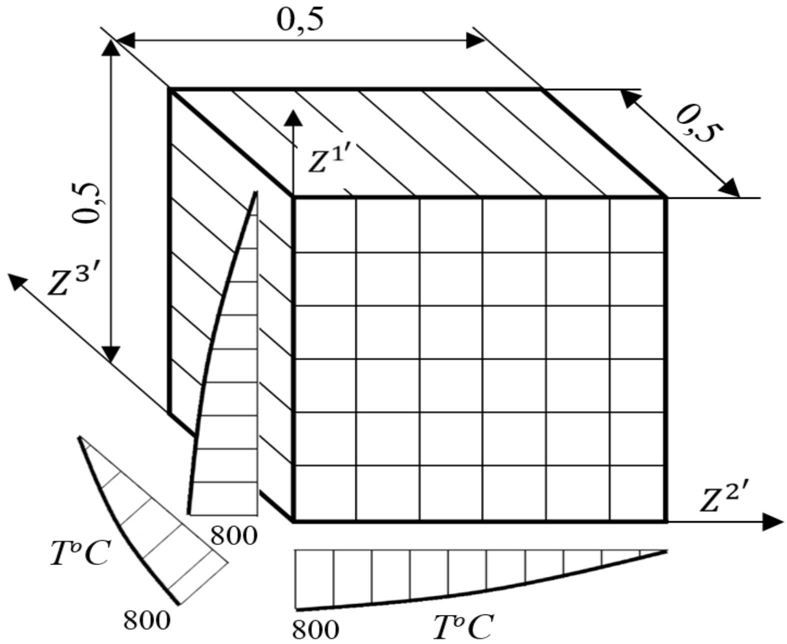


Рис. 6.36. Розрахункова схема та температурний розподіл об’єкта

Розв’язок представлено суцільною лінією для пружно-пластичного випадку та пунктирною лінією для пружного випадку на рис. 6.37. Колами позначені значення $\sigma^{\,3'3'}$ з використанням НМСЕ. Очевидно, що результати для пружно-пластичної та пружної постановки задачі для нерівномірно нагрітого куба є подібними з різницею менше 2%.   Межа зони пластичних деформацій позначена в площині $Z^{2'} = 0$.

Для перевірки результатів розробленого підходу розглянуто випадок пружно-пластичної деформації паралельних пластин без тертя, показаний на рис. 6.38.

Початкові довжина, ширина і висота паралелепіпеда становили 18,5 мм, 22,5 мм і 20 мм відповідно. Висота зменшилася до 30%, тобто 14 мм в процесі осідання.

$$\varepsilon_1 = \frac{H - H_1}{H} \cdot 100\% \tag{6.14}$$

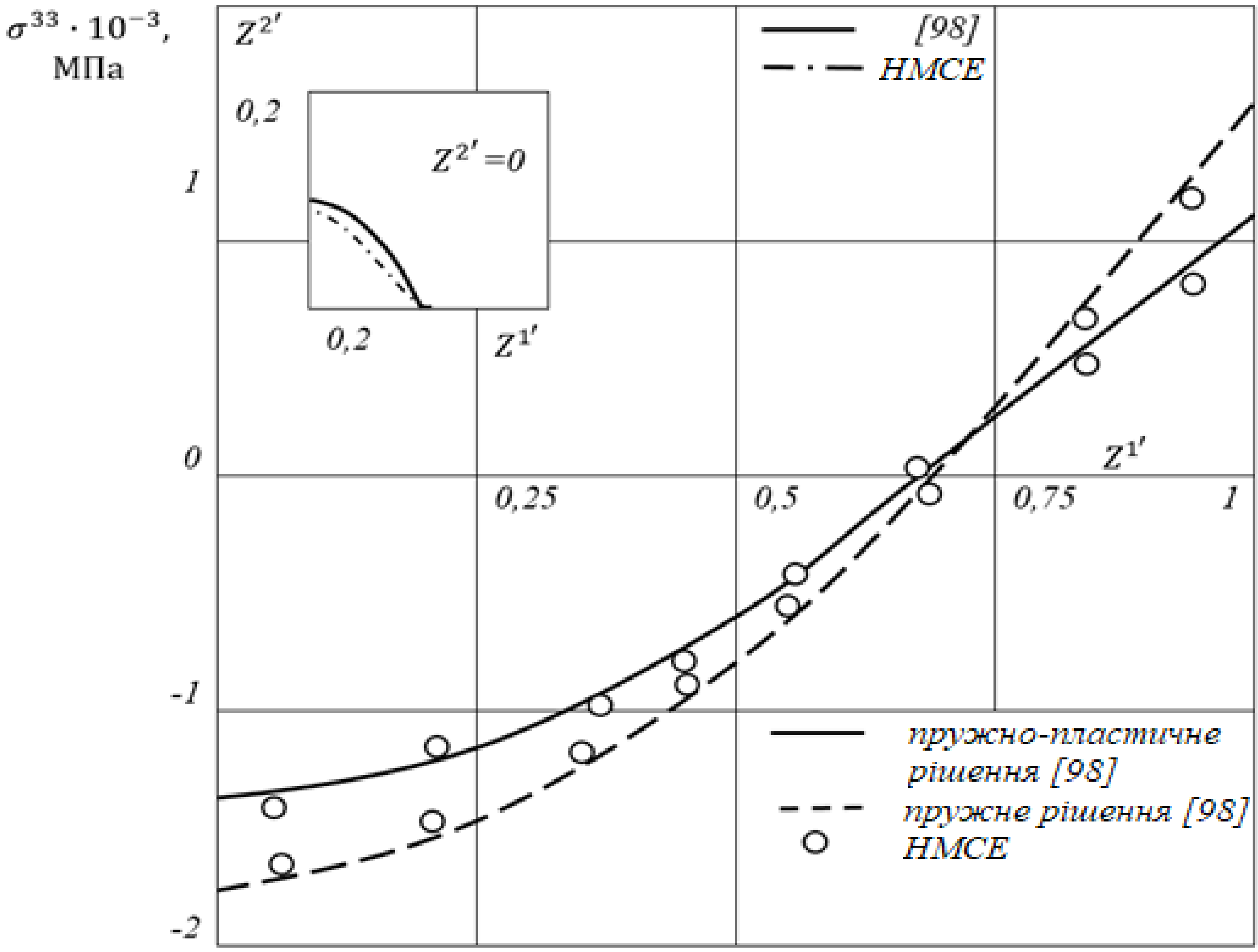


Рис. 6.37. Діаграма максимальних напружень для пластикового та пружно-пластикового розв’язку

На рисунку 6.38 показано розрахункову схему об’єкта. Для апроксимації форми тіла було використано серію призматичних скінченних елементів зі змінними фізико-геометричними параметрами матеріалу. Задача про вимушені переміщення $\Delta U^{1'}$ в площині ACDE була використана для моделювання процесу зсуву.

Точність розв’язку для нелінійної системи відображає достовірність результатів збіжності. Збіжність була досягнута $\varepsilon = 10^{-5}$ де подальше зменшення ε не дає суттєвого ефекту. Таким чином, похибка менше 1% була зафіксована при $\varepsilon = 10^{-5}$ порівняно з похибкою, зафіксованою при $\varepsilon = 10^{-6}$.

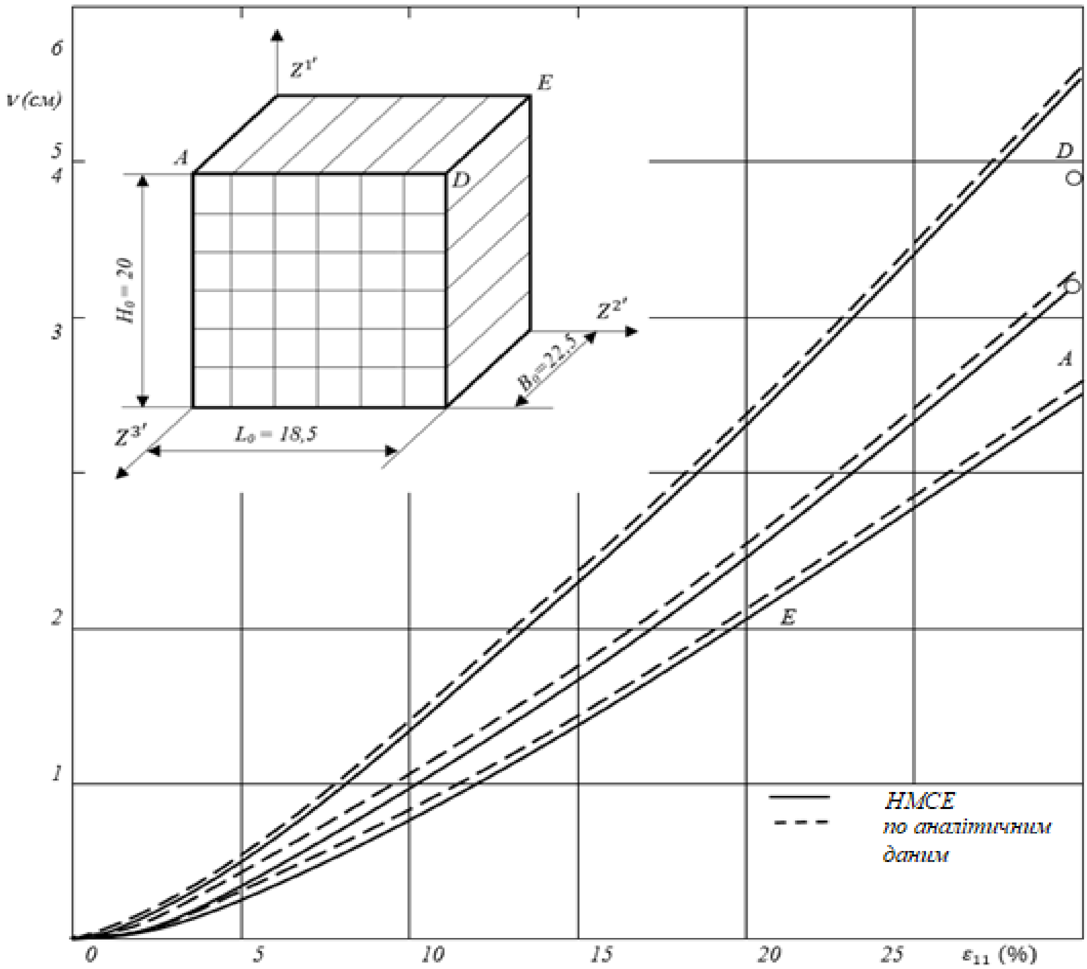


Рис. 6.38. Траєкторії руху точок A, D та E. У лівому верхньому куті зображено розрахункову схему об’єкта.

Криві A, D та E на рисунку 6.38 представляють траєкторії переміщень точок A, D та E відповідно. Траєкторії, побудовані на основі напіваналітичних даних, зображені суцільними лініями. Криві, отримані за допомогою НМСЕ, та еталонні криві є ідентичними.

Отже, продемонстровано ефективність методу НМСЕ для розрахунку деформованих, неоднорідних призматичних тіл, навіть із вставками, отворами та вирізами. Розв’язки, отримані для контрольних задач теорії пружності, термопружності, термопластичності та деформування, підтверджують надійність розробленого методу та його програмного комплексу для дослідження об'єктів обраних класів.

Виконання умови руйнування (2.29) при проведенні чисельних розрахунків реалізується з тим або іншим ступенем точності, який залежить від величини кроку за часом та особливостей напружено-деформованого стану конструкції. Тому, при наближенні до моменту початку руйнування, крок за часом треба зменшити, щоб умову (2.29) було виконано як можна точніше [42]. Таким чином, при розв'язанні задач про моделювання деформування в умовах повзучості важливого значення набуває аналіз збіжності результатів залежно від величини кроку за часом, особливо на третій стадії невстановленої повзучості.

Момент часу t*, коли хоч в одному із СЕ задовільняється умова (2.29), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і несуцільностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів. Моделювання їхнього розвитку до утворення початкових тріщин може бути продовжено на основі співвідношень континуальної механіки руйнування. Для подальшого моделювання процесу руйнування, пов'язаного з розвитком магістральних тріщин, необхідним є застосування підходів і співвідношень дискретної механіки руйнування.

При наявності деформацій повзучості на початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень σ_{ij} також обчислюються за формулами (5.29), (5.31) з урахуванням наявності деформацій повзучості. У цьому випадку

$$\begin{aligned} \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m &= \left(s^{ij}\right)_n^m - G_1\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m, \\ \left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m &= \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m \Delta\, t_m, \end{aligned} \qquad (6.15)$$

де $G_1 = E/(1-2\nu)$;

$\left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2}\left[\xi_i^c(\sigma_i)\right]_m^n \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{(\sigma_i)_m^n}$;

Δt_m – величина кроку за часом.

Аналогічно до випадку розгляду деформацій пластичності, проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^{c}\right)_{m}$ і пошкодженості $(\Delta\omega)_{m}$ із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин $\left(\varepsilon_{ij}^{c}\right)_{m}$ і ω_{m}:

$$\left(\varepsilon_{ij}^{c}\right)_{m}=\left(\varepsilon_{ij}^{c}\right)_{m-1}+\left(\Delta\varepsilon_{ij}^{c}\right)_{m}=\left(\varepsilon_{ij}^{c}\right)_{m-1}+\left(\xi_{ij}^{c}\right)_{m}\Delta t_{m}\,, \qquad (6.16)$$

$$\omega_{m}=\omega_{m-1}+(\Delta\omega)_{m}=\omega_{m-1}+\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{m}\Delta t_{m},$$

де $\left(\xi_{ij}^{c}\right)_{m}$ обчислюється відповідно до використовуваних законів стану матеріалу

При визначенні прирощень деформацій повзучості величина $\xi_{i}^{c}(\sigma_{i})$ в (6.15) може бути обчислена за формулою:

$$\xi_{i}^{c}(\sigma_{i})=(\xi_{i}^{c})_{m-1}(1-\lambda)+(\xi_{i}^{c})_{m}\lambda, \qquad (6.17)$$

де $(\xi_{i}^{c})_{m-1}$ і $(\xi_{i}^{c})_{m}$– значення швидкості інтенсивності деформацій повзучості обчислені на початку кроку і з урахуванням прирощення деформацій повзучості та на поточному кроці з використанням відповідних величин σ_{i} и ω; $0\leq\lambda\leq1$ – параметр, що визначає схему чисельного інтегрування обраних рівнянь стану матеріалу.

У роботі [42] розглянуто можливість обчислення прирощень деформацій повзучості з використанням значень $\sigma_{i}\ i\ \omega$, які визначені на попередньому кроці, що відповідає λ = 0 у формулі (6.17). Такий саме підхід застосовано у статті [11], де для обчислення параметрів напружено-деформованого стану використано закон:

$$S_{t+\Delta t}=S_{t}+(dS/dt)_{t}\Delta t, \qquad (6.18)$$

де S_{t} і $(dS/dt)_{t}$ – значення і швидкість змінення обчислюваного параметру S в момент часу t.

В роботах [11; 42] для обчислення деформацій повзучості використовуються величини напружень, що відповідають середині кроку ($\lambda = 0.5$). Обчислення величин деформацій повзучості може бути здійснено за поточними значеннями параметрів напружено-деформованого стану ($\lambda = 1$).

Як показали проведені дослідження, найбільш стійкою і ефективною є схема інтегрування, згідно з якою обчислення деформацій повзучості виконується за параметрами напружено-деформованого стану, що відповідають попередньому кроку ($\lambda = 0$, метод Ейлера).

При застосуванні НМСЕ розв'язання, як лінійних, так і нелінійних задач здійснюється на основі ітераційного процесу. У зв'язку з цим, необхідним є проведення дослідження збіжності розв'язку залежно від точності розв'язання системи рівнянь ζ, як при пружному деформуванні, так і з урахуванням нелінійної роботи матеріалу.

Для дослідження характеру збіжності ітераційного процесу при розв'язанні задач повзучості і підтвердження вірогідності отримуваних результатів розглянемо тестовий приклад про деформування в умовах повзучості тонкостінної труби, дискретна модель якої, побудована із використанням призматичних неоднорідних СЕ (рис. 6.39).

Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A\,\frac{Sh\,(\sigma/c)}{(1-\omega)^{\rightleftarrows k_1}} \;\; , \quad \frac{d\omega}{d\,t} = B\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^{k_2}, \tag{6.15}$$

де A = 3,12·10–4 год–1,

k_1 = 2,36, c = 20.5 МПа,

B = 0,58·10–7 МПа–3.17год–1,

k_2 = 3,17 – константи матеріалу при $T = 850°C$ [42].

Розв'язання задачі проведено при незмінному кроці за часом Δt_0. Проведені дослідження збіжності величин деформацій повзучості і параметра пошкодженості залежно від точності розв'язання системи рівнянь НМСЕ ζ свідчать, що похибка визначення інтенсивності деформацій повзучості δ_{ε_c} в межах 1% досягається при $\zeta = 10^{-4}$, похибка визначення параметра пошкодженості δ_ω – при $\zeta = 10^{-5}$ (рис. 6.39). При $\zeta = 10^{-5}$ похибка визначення часу до початку руйнування становить 2,1%. Крива повзучості, що отримана з використанням викладеного алгоритму розв'язання задач повзучості, при σ = 60МПа (рис. 6.40,), добре узгоджується з експериментальним результатом [42] (суцільна лінія).

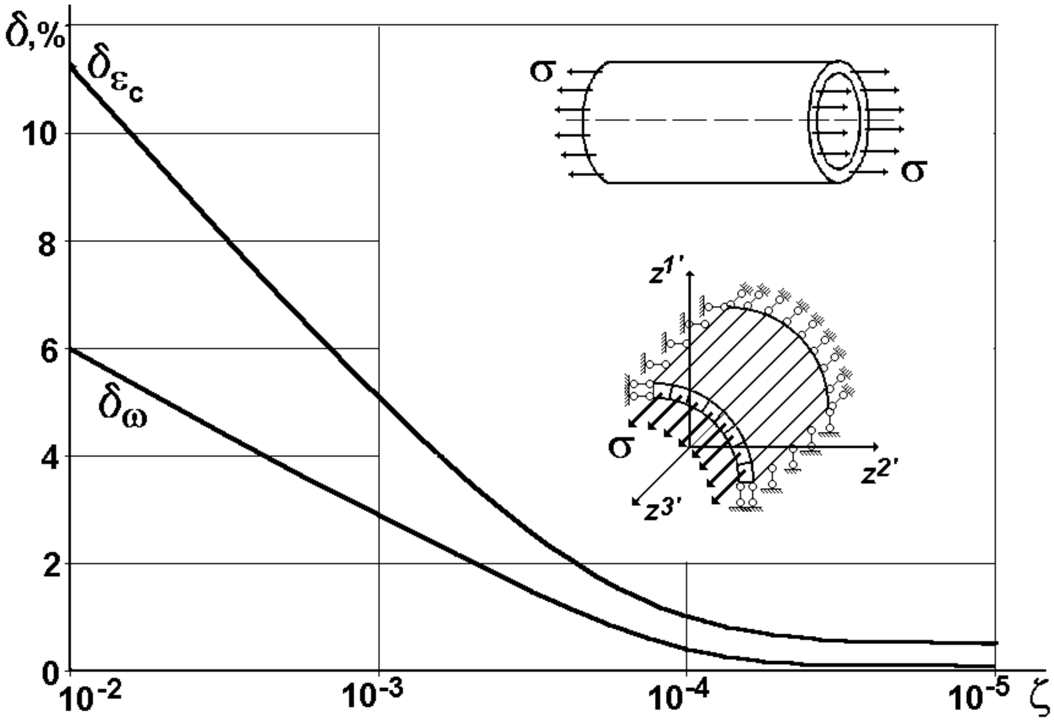


Рис. 6.39. Збіжність величин деформацій повзучості і пошкодженості в тонкостінній трубі

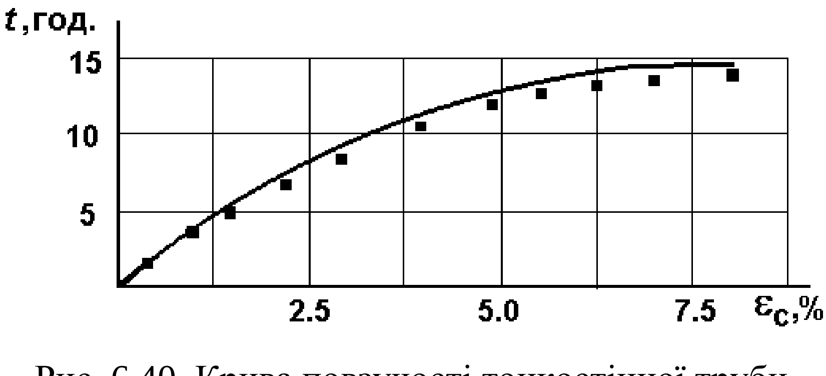


Рис. 6.40. Крива повзучості тонкостінної труби

Аналогічні результати отримані і при інших рівнях напружень. Зменшення обчислювальних витрат при розв'язанні задачі повзучості може бути досягнуто також за рахунок використання змінного кроку за часом: так, на другій стадії встановленої повзучості крок за часом може бути збільшений у декілька разів. Максимально припустиме значення кроку за часом визначається з умови збіжності отримуваних результатів при послідовному зменшенні (збільшенні) кроку за часом і залежить від властивостей повзучості матеріалу. Зокрема, для даного прикладу при збільшенні кроку за часом від Δt_0 до $2\Delta t_0$ похибки визначення величин деформацій повзучості, пошкодженості і часу до руйнування залишились в межах 5%, а кількість ітерацій зменшилась майже вдвічі.

Для апробації викладеного алгоритму моделювання розповсюдження зони континуального руйнування розглянуто наведену в роботі [42] задачу про розвиток зони континуального руйнування в товстостінній трубі. Загальний вигляд труби за наявності зони континуального руйнування радіусом $r*$ наведений на рис. 6.41, відповідна розрахункова схема – на рис. 6.42.

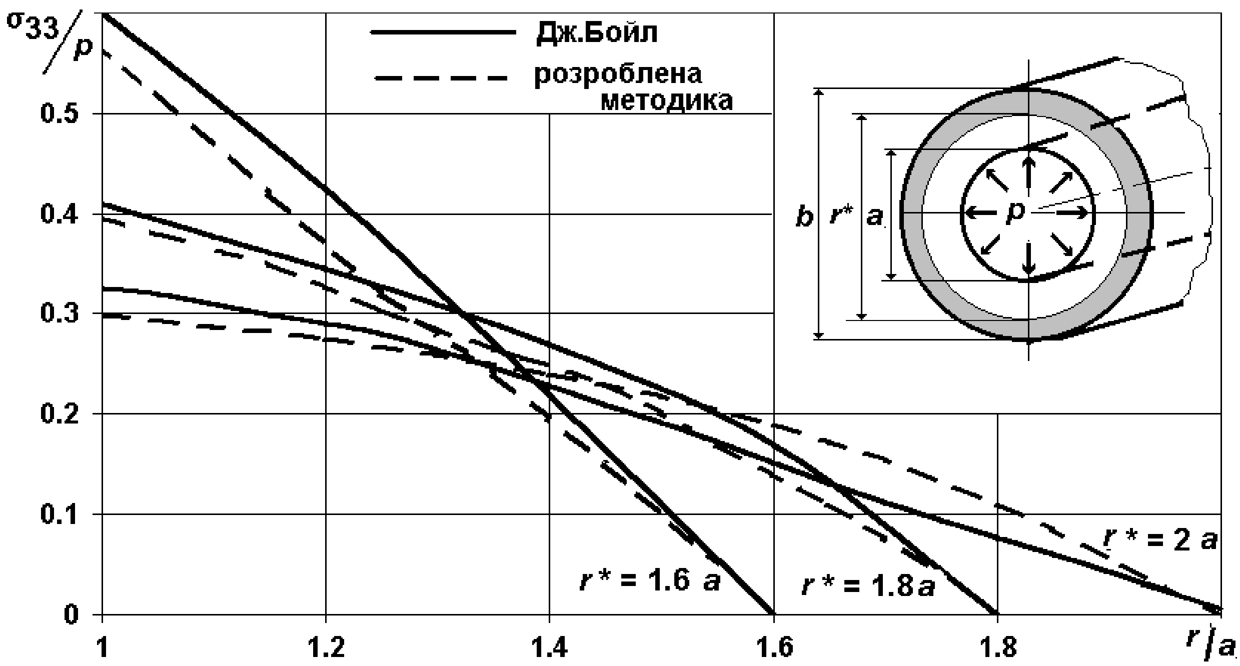


Рис. 6.41. Розподіл інтенсивності колових напружень
при різних розмірах зони руйнування

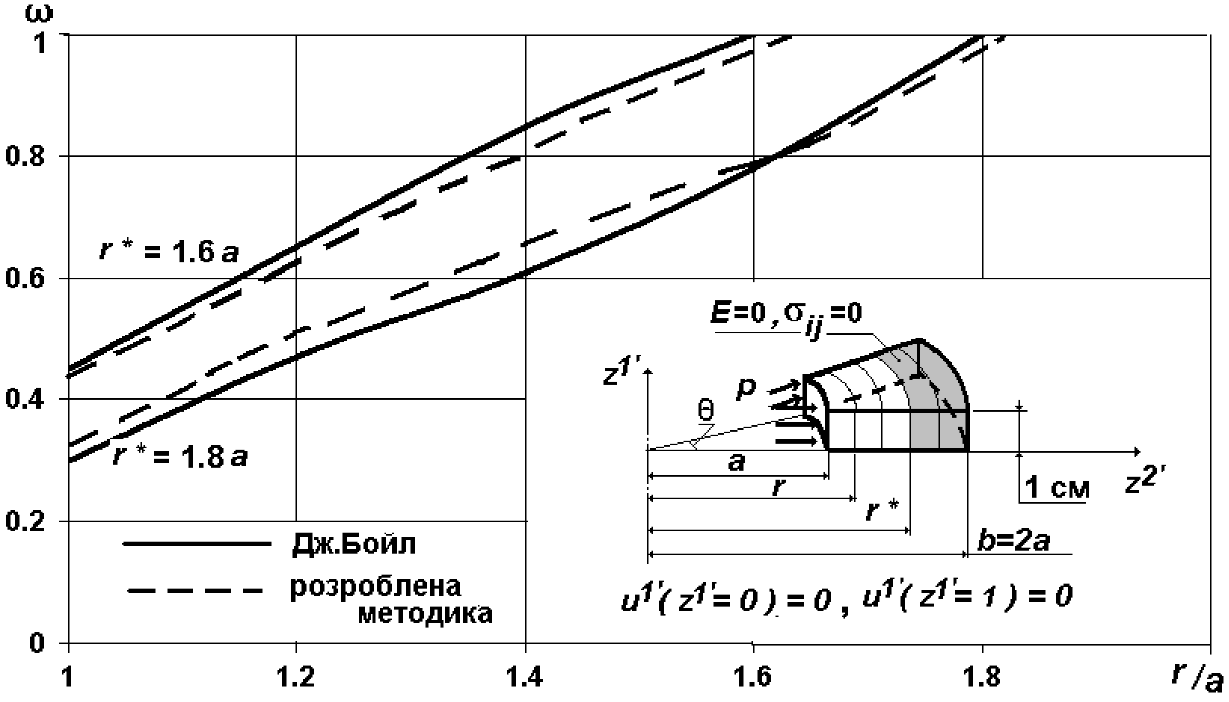


Рис. 6.42. Розподіл пошкодженості матеріалу при різних розмірах зони руйнування

Для опису деформування в умовах повзучості в роботі [42] використані кінетичні рівняння вигляду

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{d\tau} = B\left(\frac{\sigma_i}{1-\omega}\right)^{k_1} \quad , \quad \frac{d\omega}{d\,\tau} = D\left(\frac{\sigma_{3'3'}}{1-\omega}\right)^{k_2}, \tag{6.16}$$

де B = 1, D = 1, k1 = 5; k2 = 3.5 – константи матеріалу; τ – приведений безрозмірний час; $\sigma_{3'3'}$ – кільцеве напруження.

Результати розв’язання задачі до досягнення параметром пошкодженості критичного значення, проведеного за алгоритмом наведених вище збігаються з наведеними в роботі [42]. При деформуванні в умовах повзучості відбувається перерозподілення напружень, яке призводить до досягнення параметром пошкодженості критичного значення на зовнішній поверхні труби.

У подальшому зона руйнування радіусом r* просувається із зовні до внутрішньої поверхні труби. Отримані розподілення безрозмірного кільцевого напруження σ_{33}/σ_0 (рис. 6.41) і параметра пошкодженості матеріалу (рис. 6.42) по радіусу труби для різних стадій розвитку зони руйнування (величини r*) добре узгоджуються з отриманими в роботі [42].

Отже, розроблений алгоритм моделювання розвитку зони континуального руйнування дозволяє з високим ступенем точності визначати зміни розвитку зони континуального руйнування і відповідні параметри напружено-деформованого стану.

Висновки до розділу 6

На основі виконаних чисельних досліджень підтверджено ефективність і високу точність розробленої методики та програмного комплексу, спрямованих на розв’язання задач у пружній і пружно-пластичній постановках.

Розроблена модифікація призматичних скінченних елементів із усередненими механічними та геометричними параметрами дозволяє значно скоротити обчислювальний час при розв’язання лінійних і нелінійних задач, забезпечуючи високу точність результатів.

Проведений аналіз збіжності різних систем координатних функцій, включно з тригонометричними рядами, поліномами та кусково-лінійною апроксимацією, підтвердив ефективність напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) для розв’язання задач із довільними граничними умовами та локалізованими навантаженнями.

Виконані контрольні розрахунки, зокрема задачі Бусінеска та задачі пружно-пластичної рівноваги нескінченної смуги прямокутного перерізу, показали, що результати, отримані методом НМСЕ, корелюють із даними традиційного методу скінченних елементів (МСЕ), забезпечуючи водночас зменшення обчислювальних витрат.

Застосування розробленого підходу до моделювання масивних просторових конструкцій, таких як призматичні бруси та товсті плити, довело його універсальність і точність при розв’язання задач із різноманітними кінематичними граничними умовами.

У ході дослідження пластичних деформацій тонкостінних і масивних конструкцій, таких як шарнірно закріплені балки та призматичні бруси складного поперечного перерізу, розроблений програмний комплекс продемонстрував високу стабільність і збіжність результатів навіть за умов значного розвитку пластичних деформацій.

Проведений аналіз показав, що запропонована методика дозволяє ефективно моделювати напружено-деформований стан складних конструкцій у пружній та пружно-пластичній постановках, забезпечуючи відповідність отриманих результатів контрольним даним.

Таким чином, запропонована методика та програмний комплекс мають високий науковий і практичний потенціал, що дозволяє їх ефективно застосовувати для чисельного аналізу складних конструкцій із довільними граничними умовами.

РОЗДІЛ 7.
АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРИЗМАТИЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Однією з ключових проблем при розв’язанні нових задач є вибір оптимальної розрахункової схеми досліджуваного об'єкта та оцінка достовірності отриманих результатів. Досить часто просторові призматичні конструкції аналізуються в рамках плоскої постановки через значну складність і ресурсоємність тривимірного моделювання. Проте таке спрощення, засноване на припущенні про сталість параметрів напружено-деформованого стану вздовж довжини конструкції, може спричинити некоректну оцінку її реальних експлуатаційних умов. Це особливо критично для високо навантажених елементів, де необхідне всебічне врахування всіх факторів, що визначають просторову картину напружень і деформацій.

Перевірка достовірності отриманих результатів методом скінченних елементів зазвичай проводиться через поступове згущення обчислювальної сітки, що триває доти, доки подальше збільшення кількості елементів не перестане суттєво впливати на результати. Однак можливості класичного підходу МСЕ в цьому аспекті є досить обмеженими, що часто унеможливлює повне виконання зазначеної умови.

Розроблений у межах напіваналітичного підходу метод дослідження напружено-деформованого стану криволінійних неоднорідних призматичних тіл, що враховує як фізичну, так і геометричну нелінійність, потребує всебічного аналізу його ефективності порівняно з традиційним методом скінченних елементів, а також підтвердження точності та надійності отриманих на його основі розрахунків.

Для перевірки ефективності та надійності запропонованого методу представлено порівняння з традиційним методом скінченних елементів (МСЕ). У процесі порівняння НМСЕ і МСЕ важливо враховувати час збіжності, який вони потребують при збільшенні кількості невідомих, як для лінійних, так і для нелінійних рівнянь. Збіжність досягається за рахунок зміни геометричних і механічних характеристик об’єкта вздовж осі Z3'. Нерівномірний розподіл механічних характеристик пов’язане з наявністю початкової неоднорідності матеріалу, розвитком пластичних деформацій та залежністю властивостей матеріалу від температури. Ці фактори впливають і на збіжність ітераційного процесу, оскільки від них залежить обумовленість матриці НМСЕ.

7.1. Розрахунок Т-подібного хвостовика лопатки ротора парової турбіни

Хвостовики лопаток відносяться до числа найбільш відповідальних несучих елементів роторів парових турбін. Від рівня напружень, що виникають в хвостовику, суттєво залежить довговічність лопатки та режими експлуатації турбіни в цілому. Тому при дослідженні таких об’єктів потрібна особлива увага до вибору та обґрунтування розрахункових схем та постановки задачі. В теперішній час їхній розрахунок, як правило, виконується в рамках плоскої постановки. Однак, в реальних умовах параметри напружено-деформованого стану хвостовика під впливом ряду факторів можуть змінюватись по всіх трьох координатах. До їхнього числа відноситься нерівномірний характер розподілу навантажень по поверхні промтільної частини та умови взаємодії хвостовика та ободу диска.

Для зясування впливу на напружено-деформований стан вказаних факторів розглянемо один із варіантів конструкції Т-подібного хвостовика, приведений на рис. 7.1.

Хвостовик виготовлений зі сталі, модуль пружності матеріалу $E = 2{,}06 \cdot 10^5$МПа, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0{,}3$. Механічні характеристики при деформуванны в умовах пластичності у вигляді залежностей інтенсивності дотичних напружень T від інтенсивності деформацій ε_i^p, отриманих при температурі 300°С, приведені в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

$\varepsilon_i^p(\%)$	0,00	0,68	1,70	2,67	3,66
$T(МПа)$	265,6	326,2	360,8	386,8	401,2

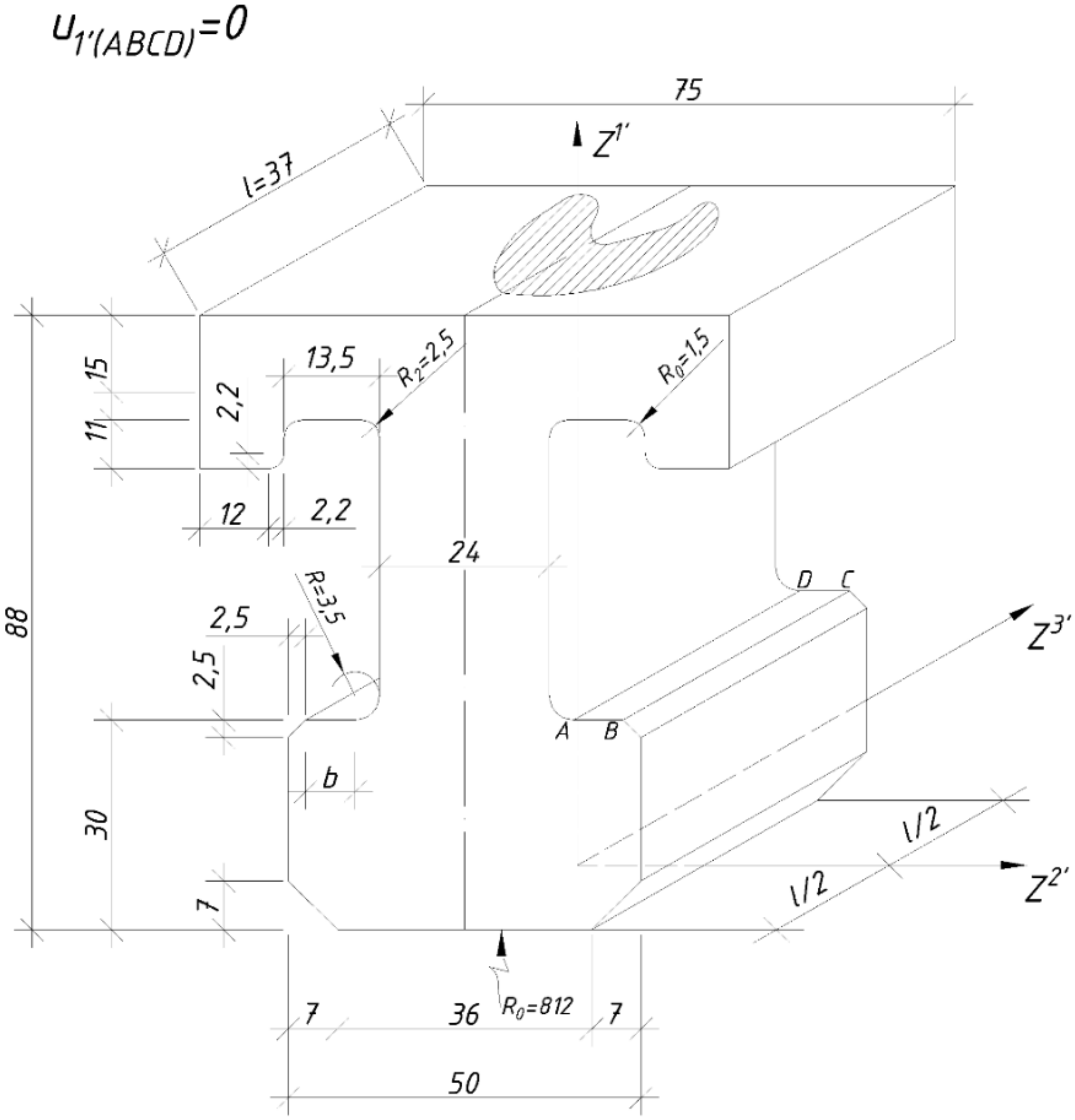


Рис. 7.1 Загальний вигляд хвостовика

Сили, що діють на хвостовик, зумовлені обертанням ротора з кутовою швидкістю $\omega = 314{,}16с^{-1}\left(\frac{3000об}{хв}\right)$. Вони складаються із розподіленого по площі кореневого перерізу лопатки (заштриховано на рис. 7.1) поверхневого навантаження інтенсивністю $q = 132{,}8$МПа та розподілених по об’єму хвостовика масових сил, рівнодійна яких C для деякого об’єму υможе бути визначена за формулою:

$$C = \rho \upsilon \omega^2 \left(R_0 + Z^{1'}\right) \qquad (7.1)$$

де: щільність матеріалу $\rho = 7{,}85\text{кН} \cdot \frac{\text{с}^2}{\text{м}^4}$, відстань від площини $Z^{1'} = 0$ до осі обертання ротора $R_0 = 812\textit{мм}$.

При розрахунку конструкцій методом скінченних елементів великого значення набуває правильний вибір апроксимувальної сітки, яка дозволяє отримувати стійкі результати при мінімальній кількості невідомих. Це досягається, в основному, застосуванням нерівномірних сіток, згущення яких виконується в зонах ймовірних концентраторів напружень. На рис. 7.2,а показана розбивка хвостовика на скінченні елементи, використана при дослідженні впливу характеру розподілення навантаження по поверхні промтільної частини. Особлива увага приділена зонам заокруглень, так як саме в цих місцях варто очікувати виникнення максимальних напружень. Виконано два варіанти розрахунку. В першому випадку поверхневе навантаження прикладене строго по площі кореневого перерізу лопатки (рис. 7.1), у другому – рівномірно розподілене по осі $Z^{3'}$ (площа прикладання показана штриховкою на рис. 7.2,а). Хвостовик закріплений від зміщень $u_{1'}$ по поверхні контактної площадки $ABCD$.

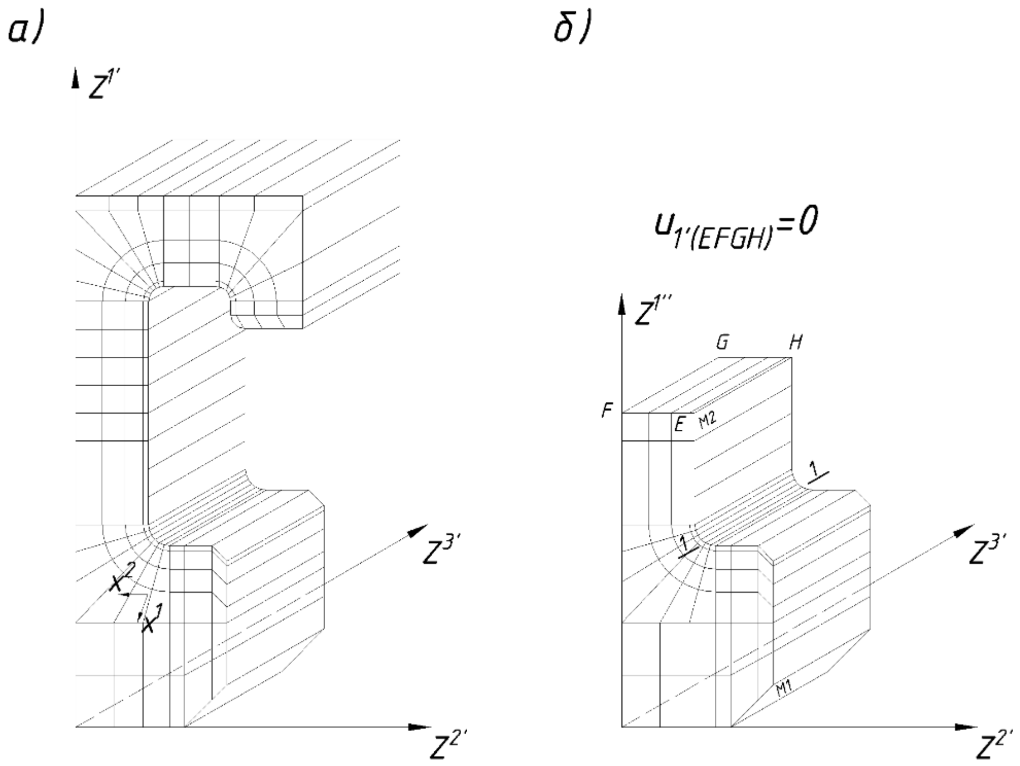


Рис. 7.2 Схема розбивки хвостовика на скінченні елементи

В таблиці 7.2 наведені значення максимальних розтягувальних напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ та інтенсивності дотичних напружень T, зафіксовані в області галтельного переходу між полицею та шийкою. Їхнє порівняння показує, що урахування нерівномірності прикладання поверхневого навантаження не здійснює помітного впливу на рівень максимальних напружень. Причому в обох варіантах розрахунку в центральній частині шийки картина напружено- деформованого стану виявилася близькою до однорідної.

Таблиця 7.2

Розрахункова схема	$\tilde{\sigma}^{22}$ ($МПа$)	%	T ($МПа$)	%
Рис. 7.1	683,5	-	333,6	-
Рис. 7.2, а	689,1	0,82	337,1	1,05
Рис. 7.2, б	679,5	0,58	331,4	0,66

Відмічена особливість дозволяє суттєво спростити розрахункову схему хвостовика та включати в неї тільки нижню частину шийки та полицю. Закріплення від зміщень $u_{1'}$ може здійснюватися по площі поперечного перерізу шийки $EFGH$, а навантаження прикладатися по поверхні контактної площадки, позначеної штриховкою на рис. 7.2,б. За даними таблиці 7.2 різниця результатів, вирахуваних у відповідності до цієї схеми, складає менше 1% по відношенню до вирахуваних раніше. Запропонована розрахункова схема крім значного скорочення числа невідомих забезпечує можливість дослідження впливу на величину максимальних напружень характеру розподілення зусиль по поверхні $ABCD$. У відповідності до технологічних особливостей виготовлення та збірки роторів взаємодія ободу та диску може здійснюватися не по всій довжині полиці l, а по деякій її центральній частині розміром а $\leq l$. Це призводить до нерівномірного характеру розподілу контактних зусиль по осі $Z^{3'}$, епюра яких для гранично допустимого випадку ($a = 0{,}84l$) приведена на рис 7.3.

В таблиці 7.3 представлені максимальні величини $\tilde{\sigma}^{22}$ та T, вирахувані при різній точності розв'язання систем рівнянь, визначеної ε, числі утримуваних членів ряду M та кількості вузлів сіткової області М1 та М2 вздовж осей x^1та x^2 відповідно.

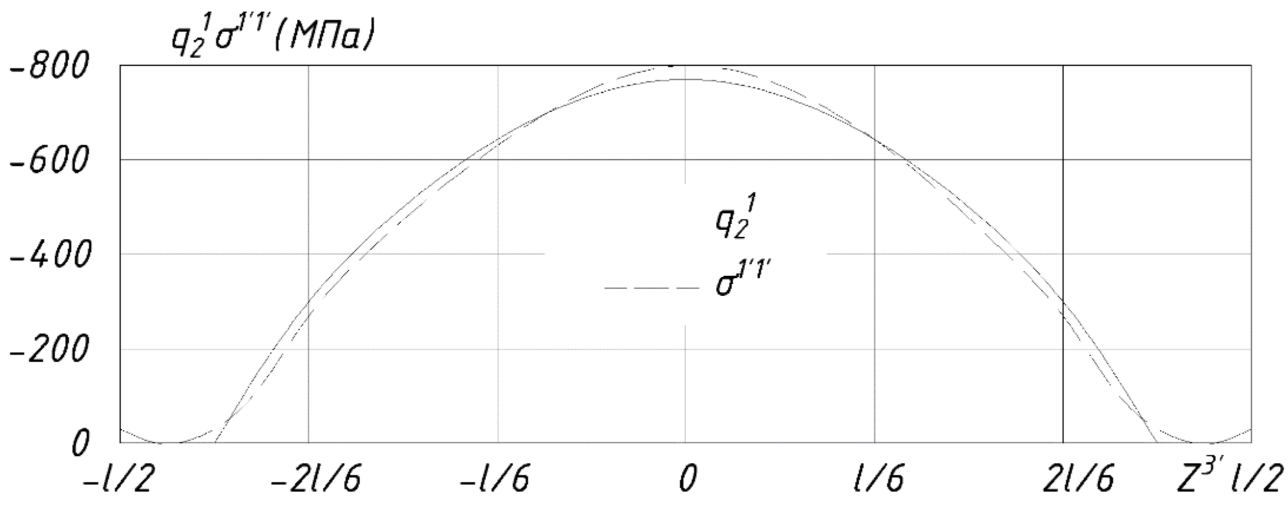


Рис. 7.3 Епюра контактних зусиль по осі $Z^{3'}$

Таблиця 7.3

<table>
<tr><th>Розрахункова схема</th><th>ε</th><th>M</th><th>M1</th><th>M2</th><th>$\tilde{\sigma}$ (МПа)</th><th>%</th><th>T (МПа)</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Рис. 7.2, б</td><td>10^{-3}</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">15</td><td>840,1</td><td>0,43</td><td>418,5</td><td>0,19</td></tr>
<tr><td>10^{-4}</td><td>842,0</td><td>0,21</td><td>418,9</td><td>0,09</td></tr>
<tr><td>10^{-5}</td><td>843,8</td><td>-</td><td>419,3</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="3">10^{-3}</td><td>3</td><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">15</td><td>843,0</td><td>1,22</td><td>413,1</td><td>2,27</td></tr>
<tr><td>5</td><td>840,1</td><td>0,87</td><td>418,5</td><td>0,99</td></tr>
<tr><td>8</td><td>832,8</td><td>-</td><td>422,7</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="3">10^{-3}</td><td rowspan="3">5</td><td>7</td><td>15</td><td>840,1</td><td>2,81</td><td>418,5</td><td>2,70</td></tr>
<tr><td>9</td><td>18</td><td>820,7</td><td>0,44</td><td>409,5</td><td>0,49</td></tr>
<tr><td>12</td><td>24</td><td>817,1</td><td>-</td><td>407,5</td><td>-</td></tr>
</table>

На основі цих даних можна зробити висновок, що стійкі результати досягаються при $\varepsilon = 10^{-3}$, $M = 5$, $M1 = 9$, $M2 = 18$. Так, суттєве збільшення числа невідомих (більше, ніж у 1,5 рази), зумовлене збільшенням числа утримуваних членів ряду або кількістю вузлів сіткової області призводить до незначної (менше 1%) зміни результатів. Як показав аналіз значень нормальних і дотичних напружень на вільній від навантажень поверхні хвостовика, їхня величина не перевищує 2% порівняно з максимальними значеннями $\tilde{\sigma}^{22}$. Епюра нормальних напружень $\sigma^{1'1'}$, побудована по довжині полиці та показана на рис. 7.3 пунктирною лінією, задовільно узгоджується з епюрою навантажень. Рівнодійна нормальних напружень, обчислена в площині $EFGH$, відрізняється менш ніж на 1% від рівнодійної поверхневих та об’ємних сил. Проведений аналіз дає підстави стверджувати, що прийняті параметри сіткової області та точність розв’язання систем рівнянь забезпечують отримання достовірних результатів.

Результати розрахунку в двовимірній та просторовій постановці приведені на рис. 7.4 у вигляді епюр $\tilde{\sigma}^{22}$ та T, які побудовані в перерізі I-I. Пунктирною лінією позначені результати розв'язання плоскої задачі, суцільною – тривимірної при дії нерівномірно розподіленого по довжині полиці навантаження. Їхнє співставлення дозволяє зробити висновок, що у випадку рівномірного навантаження визначення напружень можна проводити в рамках плоскої задачі, так як це призводить до порівняно невеликої (5-8%) похибки порівняно з просторовою постановкою. Врахування нерівномірного характеру розподілення зусиль по довжині полиці дозволяє суттєво уточнити рівень максимальних напружень в порівнянні з плоскою задачею. Так, величина інтенсивності дотичних напружень Tзросла більше, ніж на 30%, та перетнула межу текучості матеріалу. Граничне значення кутової швидкості, що відповідає пружній поведінці матеріалу, складає 2414 об/хв, що значно нижче за номінальну величину. Моделювання зміни картини напружено-деформованого стану хвостовика, обумовлене пружно-пластичною поведінкою матеріалу в процесі навантаження, проведене шляхом розв'язання послідовності нелінійних задач при поступовому зростанні швидкості обертання ротора. На рис. 7.5 і 7.6 приведені епюри $\tilde{\sigma}^{22}$ та ε_i^p відповідно, побудовані в перерізі І-І для різних значень кутової швидкості. Спостерігається поступове вирівнювання епюри напружень вздовж $Z^{3'}$ по мірі збільшення пластичних деформацій, які при $\omega = \frac{3000\text{об}}{\text{хв}}$ розподіляються на всю довжину полиці. На рис. 7.7 показана картина зміни області пластичних деформацій в площині $Z^{3'} = 0$. Її характерною особливістю є тенденція до розвитку пластичних деформацій в глибину полиці вздовж лінії, яка утворює з поверхнею полиці кут порядку 45◦, що повністю узгоджується з уявленнями про роботу Т-подібного хвостовика, викладеними в роботі [32].

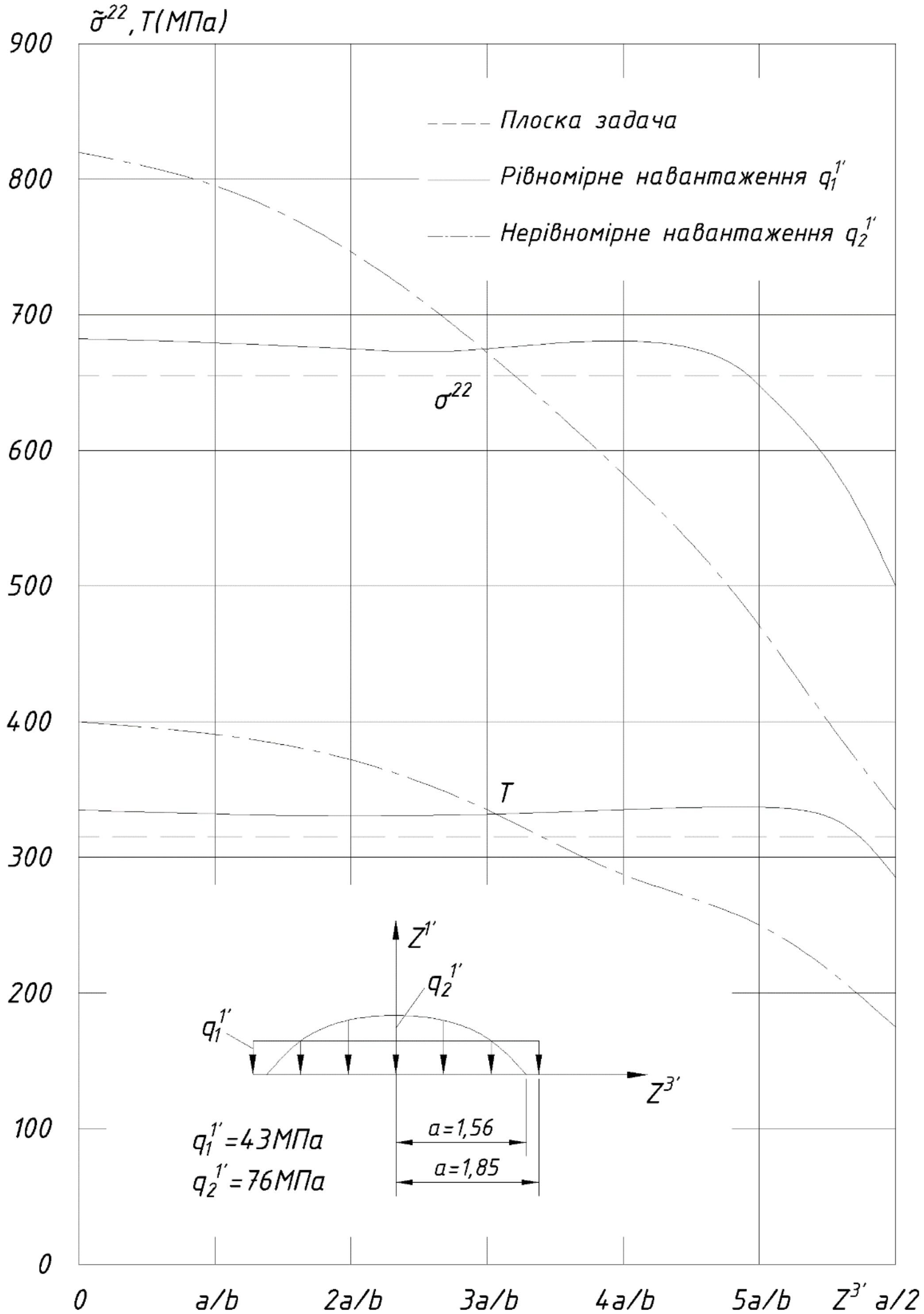


Рис. 7.4 Результати розрахунку хвостовика лопатки в двовимірній та просторовій постановці

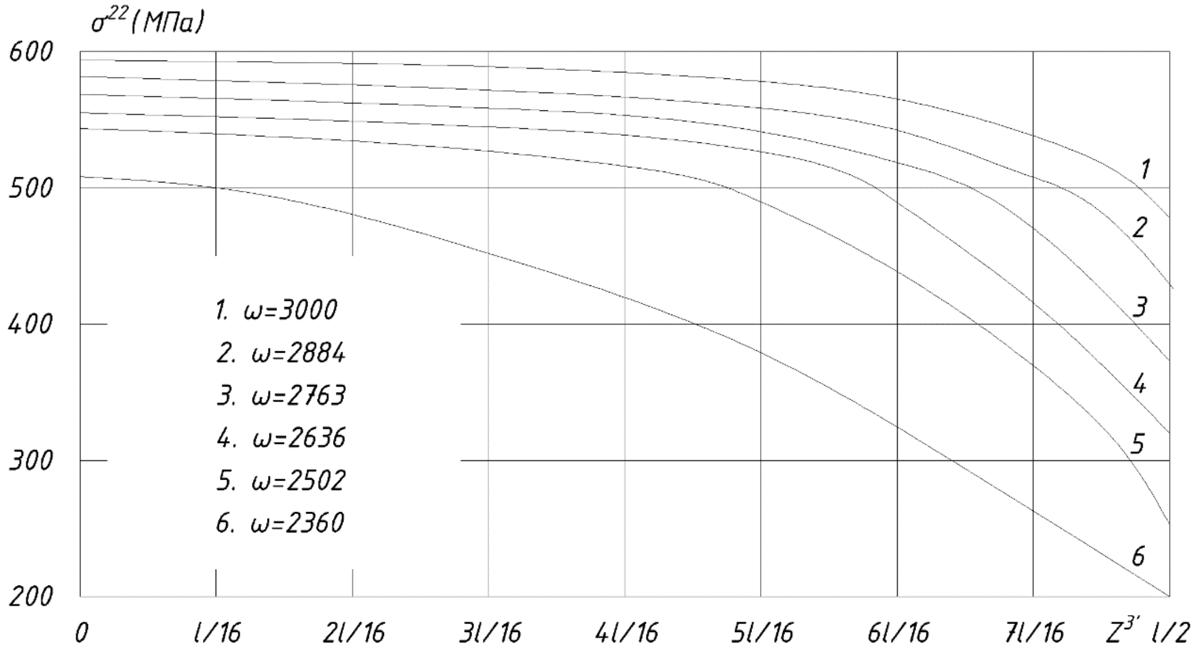


Рис. 7.5 Епюра $\tilde{\sigma}^{22}$побудована в перерізі I-I для різних значень кутової швидкості

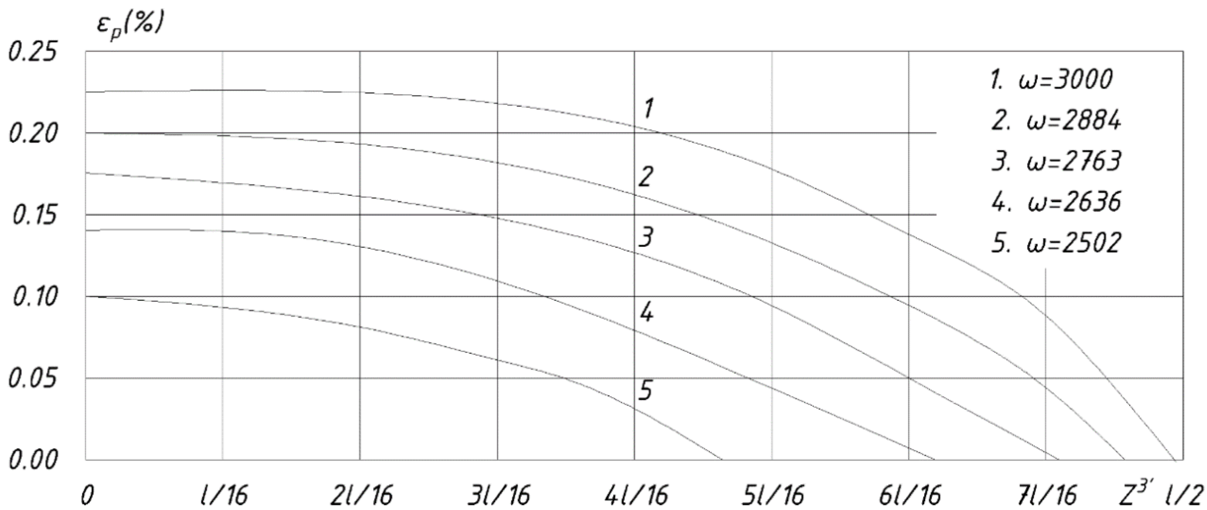


Рис. 7.6 Епюра ε_i^p побудована в перерізі I-I для різних значень кутової швидкості

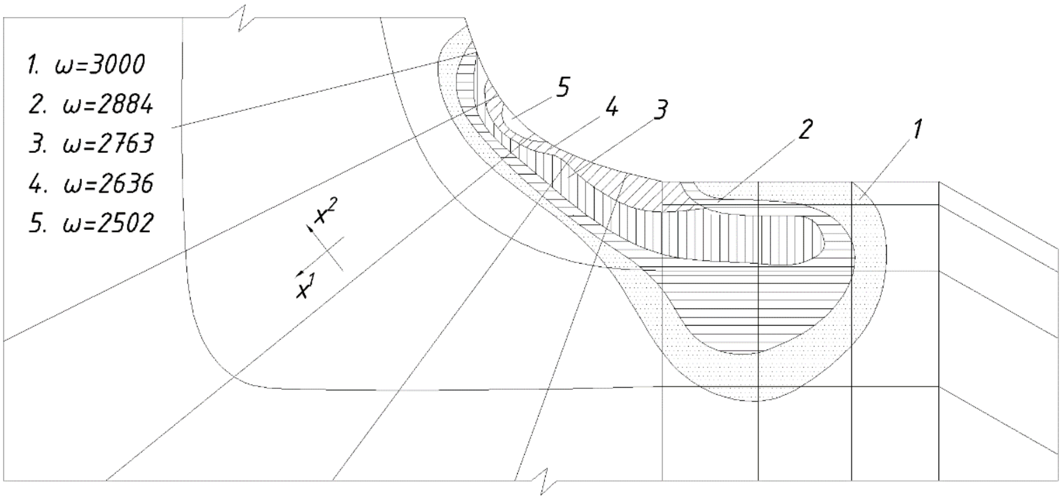


Рис. 7.7 Зміни області пластичних деформацій в площині $Z^{3'} = 0$

Не дивлячись на порівняно невелику величину пластичних деформацій, їхня наявність у такому відповідальному елементі, як хвостовик лопатки, досить небажана. Зниження напружень та покращення умов роботи концентратора досягається, як правило, шляхом збільшення радіуса закруглення R. Однак його збільшення призводить до зменшення ширини полиці b та зростанню у зв'язку з цим інтенсивності контактних зусиль. В той же час ресурси збільшення загальних розмірів нижньої частини хвостовика вздовж осі $Z^{2'}$ досить обмежені габаритами ободу диска. Тому для нового значення радіуса закруглення $R = 4{,}5$мм виконано два варіанти розрахунку. У першому випадку загальна ширина нижньої частини хвостовика лишилась незмінною і ширина полиці b зменшилась до 6 мм, у другому ширина полиці залишилась незмінною ($b = 7$мм). На рис. 7.8 та 7.9 показані в перерізі I-I епюри $\tilde{\sigma}^{22}$ і ε_i^p, побудовані при кутовій швидкості $\omega = \frac{3000об}{хв}$.

Їхній аналіз показує, що в даному перерізі результати розрахунків для обох варіантів досить близькі та збільшення R призводить тут до зниження напружень та деформацій. Однак в центральній частині області, що знаходиться в глибині полиці і показана на рис. 7.7 горизонтальною штриховкою, зменшення ширини полиці викликає збільшення у 2 рази рівня пластичних деформацій.

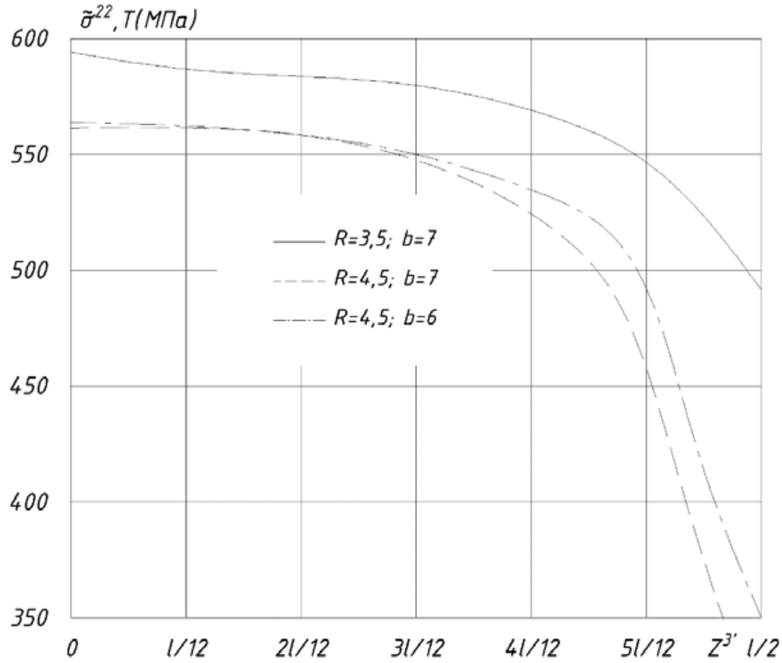


Рис. 7.8 Епюра $\tilde{\sigma}^{22}$ побудована при кутовій швидкості $\omega = \frac{3000об}{хв}$

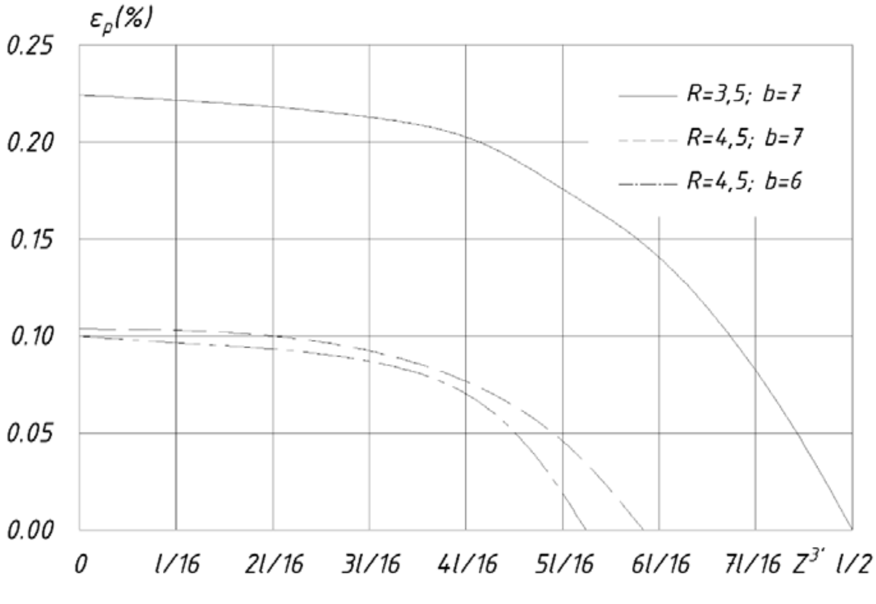


Рис. 7.9 Епюра ε_i^p побудована при кутовій швидкості $\omega = \frac{3000об}{хв}$

На основі приведених досліджень можна зробити висновок, що врахування умов взаємодії хвостовика з ободом диска призводить до суттєвого зростання максимальних значень напружень і деформацій, зниження яких може бути досягнуте за рахунок одночасного збільшення радіуса галтельного переходу та ширини полиці.

7.2 Дослідження напружено-деформованого стану демпфуючого елемента

Демпфуючий елемент представляє собою коробчасту конструкцію, підсилену двома поздовжніми ребрами, і відрізняється досить складною структурою. Він складається із тонкостінних та стержневих елементів, об'єднаних галтельними переходами, в області яких реалізується просторовий напружено-деформований стан. Граничні умови на торцях відповідають спиранню на абсолютно жорстку в своїй площині та гнучку із неї діафрагму. Розрахункова схема об'єкта приведена на рис. 7.10, де довжина $l = 30\delta_1$, висота $H = 24\delta_1$, ширина $B = 30\delta_1$, радіуси галтельних переходів $R_1 = \delta_1$, $R_2 = 0{,}25\delta_1$, розміри поперечного перерізу ребер $b = 4\delta_1$, $h = 2\delta_1$, товщина бокових стінок $\delta_2 = 3\delta_1$, верхнього та нижнього днища $\delta_1 = 0{,}05 м$.

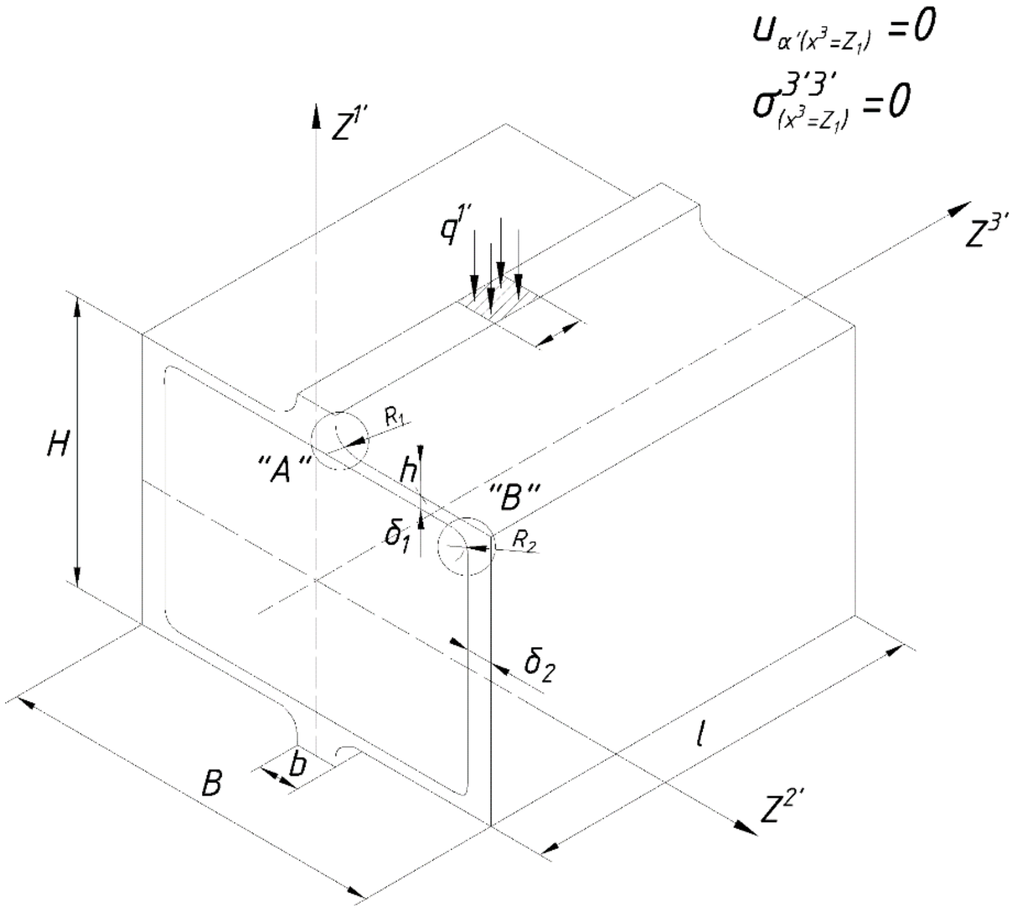


Рис. 7.10 Розрахункова схема об'єкта.

Зовнішня дія складається із розподіленого в центральній частині ребер та протилежно напрямленого навантаження, експлуатаційна інтенсивність якого складає $q^{1'} = 50$МПа, а в екстремальних режимах може досягати 65 МПа. Модуль пружності матеріалу конструкції $E = 2{,}1 \cdot 10^5$МПа, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0{,}3$, границя текучості при чистому зсуві $\tau_s = 210 МПа$.

На прикладі розглядуваного об'єкта наочно проявляється зручність використання розроблених універсальних елементів для розрахунку призматичних тіл складної структури. Їхнє застосування дозволило при формуванні сіткової області максимально деталізувати розбивку на елементи в зонах концентраторів (рис. 7.11), суттєво розряджаючи її в центральній частині стінок та днища.

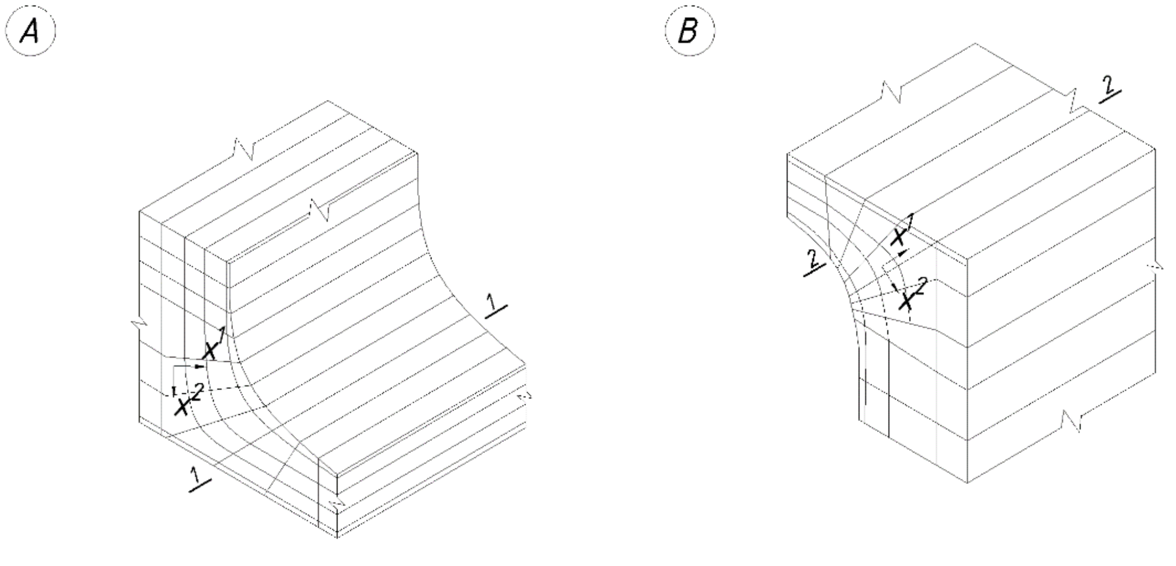


Рис. 7.11 Схема розбивки деталі на елементи в зонах концентраторів

Результати дослідження впливу кількості утримуваних членів ряду Фур'є M та числа вузлів m на ділянках розрахункової сітки, що безпосередньо примикають до місць закруглень, на величину максимальних значень напружень у вузлах A та B приведені в таблицях 7.4 та 7.5 відповідно. Вони показують, що для отримання достовірних результатів досить утримати 5 членів розкладу та обмежитись 42 вузлами на ділянках сіткової області, що апроксимують галтельні переходи.

Таблиця 7.4

m	M	σ^{22} (МПа)	%	σ^{33} (МПа)	%	T (МПа)	%
25	5	425,0	2,78	147,1	6,05	210,0	4,5
42		416,5	0,79	139,0	0,58	202,3	0,89
63		413,2	-	138,2	-	200,5	-
42	3	409,3	1,88	138,1	1,23	198,7	2,01
	5	416,5	0,12	139,0	0,57	202,3	0,20
	7	417,7	-	139,8	-	202,7	-

Таблиця 7.5

m	M	σ^{22} (МПа)	%	σ^{33} (МПа)	%	T (МПа)	%
25	5	465,0	7,27	149,0	7,32	216,0	8,24
42		439,9	1,98	139,7	1,15	202,3	2,03
63		431,2	-	138,1	-	198,2	-
42	3	439,8	0,02	139,7	0,00	202,1	0,02
	5	439,9	0,00	139,7	0,00	202,3	0,00
	7	439,9	-	139,7	-	202,3	-

Результати розрахунку, виконаного в пружній постановці при інтенсивності зовнішнього навантаження $q^{1'} = 50$МПа, зображені на рис. 7.12 у вигляді епюр напружень $\tilde{\sigma}^{22}$, $\tilde{\sigma}^{33}$ і T. Пунктирною лінією позначені графіки, побудовані в перерізі I-I, суцільною – в перерізі II-II. Спостерігається практично повна ідентичність як в характері розподілення, так і в кількісних значеннях розглядуваних параметрів напруженого стану. Наприклад, різниця максимальних величин $\tilde{\sigma}^{22}$ і $\tilde{\sigma}^{33}$, вирахуваних у різних перерізах, не перевищує 2-3%, а максимальні інтенсивності дотичних напружень повністю співпадають. Оскільки за рівня навантаження $q^{1'} = 65МПа$ їхня величина, вирахувана в рамках пружного розрахунку, перетнула межу текучості, для оцінки напружено-деформованого стану демпфуючого елементу в екстремальних режимах навантаження потрібно було отримати розв'язання даної задачі з урахуванням пластичних властивостей матеріалу.

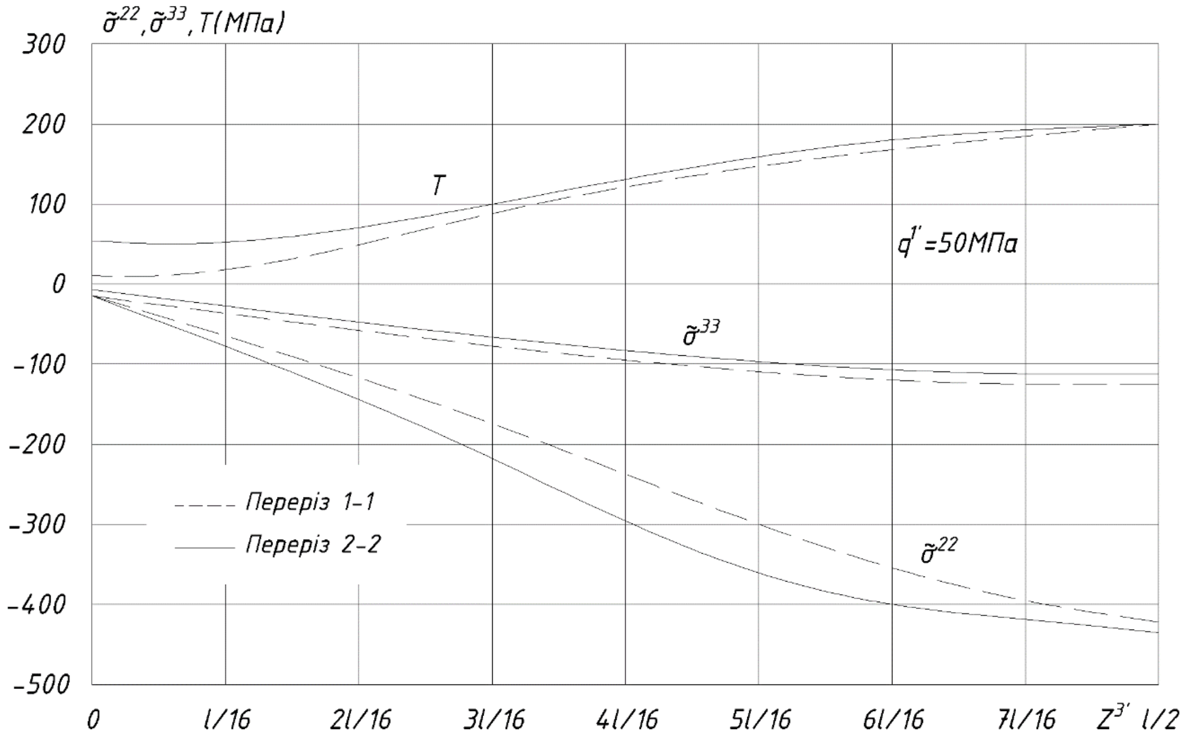


Рис. 7.12 Результати розрахунку в пружній постановці

Результати цього розв'язання, приведені на рис. 7.13, ілюструють отриманий перерозподіл $\tilde{\sigma}^{22}$ по $Z^{3'}$, пов'язаний з розвитком зон пластичних деформацій в центральній частині об'єкту. Як і в пружній постановці, максимальні значення напружень, зафіксовані в різних перерізах, досить близькі.

На рис. 7.14 представлені графіки, що характеризують зростання величини пластичних деформацій центральних точок перерізів 1-1 і 2-2 в процесі навантаження. Виявилось, що в цих точках темп їхнього зростання відрізняється та при $q^{1'} = 65$МПа ε_i^p в перерізі 2-2 на 32% вищий, ніж в перерізі 1-1. Відомо, що рівень пластичних деформацій в області галтельних переходів суттєво залежить від радіуса закруглення.

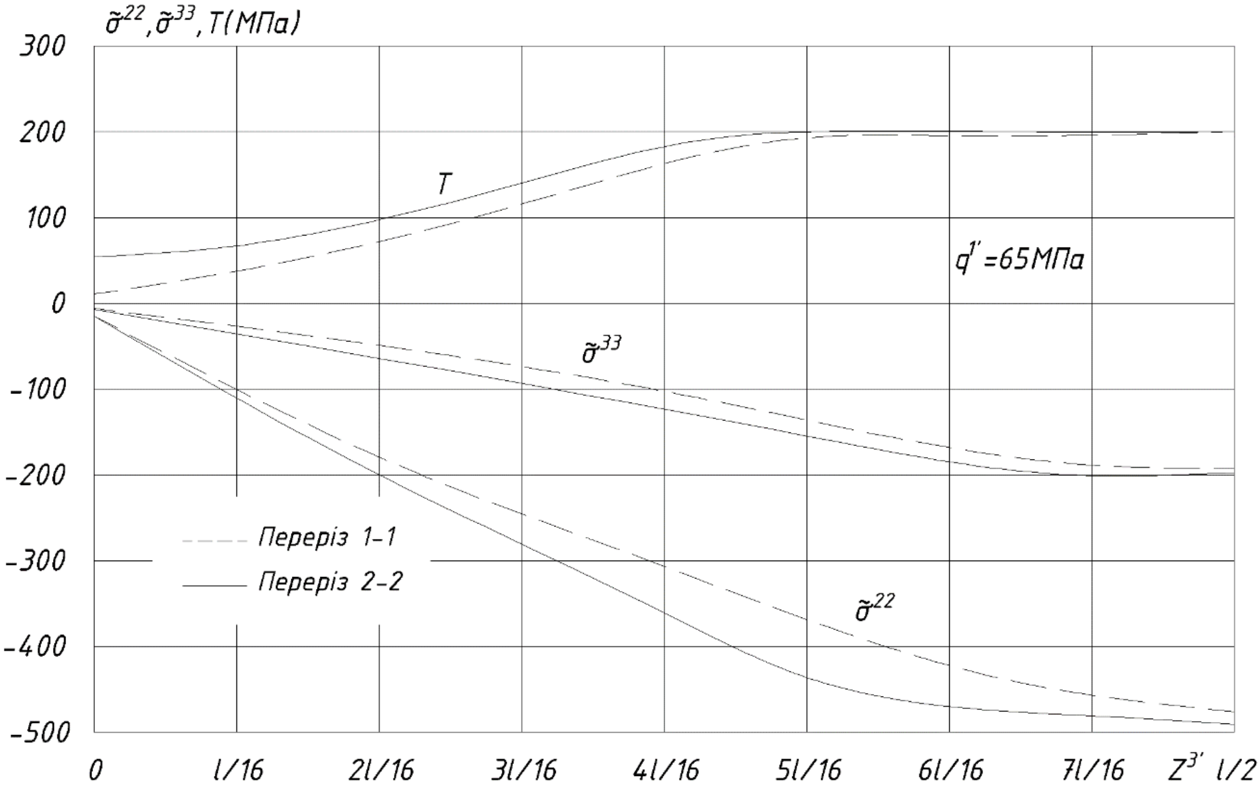


Рис. 7.13 Результати розв’язання значення епюр $\tilde{\sigma}^{22}$ по осі$Z^{3'}$

В зв’язку з цим були проведені дослідження впливу R_2 на ε_i^p, результати яких зображені на рис. 7.15. Вони дозволили встановити, що при максимальному навантаженні, СЕ діє на розглядуваний об’єкт, збільшення R_2 призводить до суттєвого зниження пластичних деформацій в області вузла B і не впливає на їхні значення у вузлі A. Зокрема, при $R_2 = 0{,}32\delta_1$ рівень пластичних деформацій у вузлі B залишається однаковим у порівнянні з вузлом A, а при $R_2 = 0{,}5\delta_1$ зменшується більше, ніж у 2 рази.

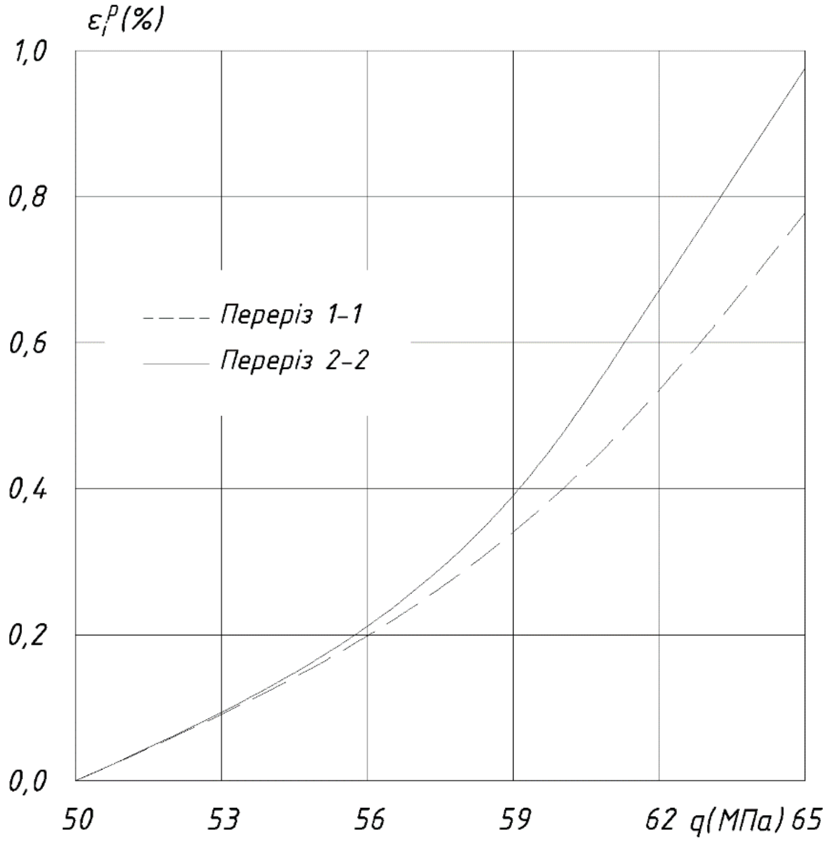


Рис. 7.14 Графік залежності зростання величини пластичних деформацій центральних точок перерізів 1-1 і 2-2 в процесі навантаження

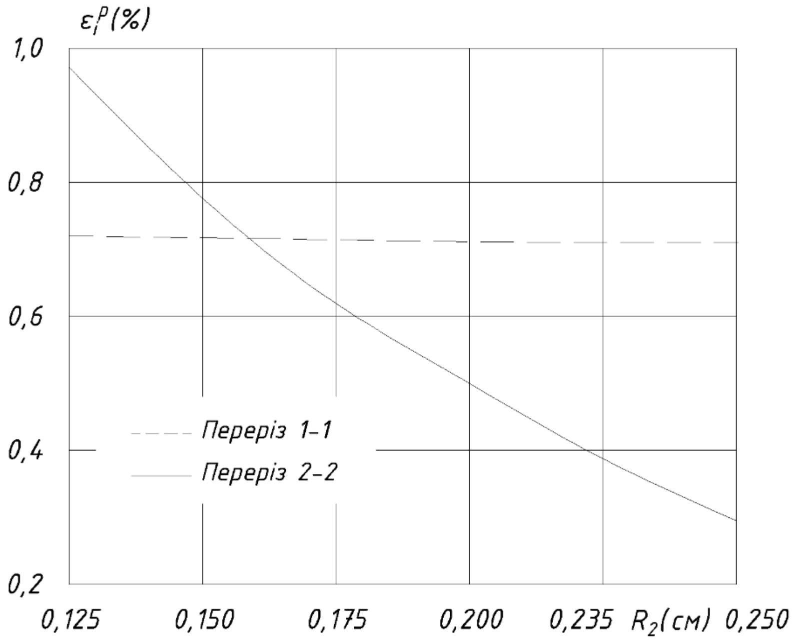


Рис. 7.15 Результати залежності ε_i^p від величини радіусів заокруглення R_2

Розглянутий приклад наочно демонструє, що для всебічної оцінки працездатності конструкції часто буває недостатньо лише інформації про її напружений стан. Так, аналіз епюр напружень, наведених вище для пружної та пружно-пластичної постановок, може призвести до хибного висновку, що початкові значення радіусів заокруглення R_1 і R_2 забезпечують рівноміцність вузлів А та В. Коректна оцінка реальних умов роботи галтельних переходів можлива лише після детального аналізу та порівняння графіків розвитку пластичних деформацій.

7.3 Розрахунок деталі кріплення поворотного пристрою

Деталь кріплення являється одним із найважливіших елементів поворотного пристрою, що забезпечують надійність його експлуатації. Вона представляє собою порожнистий циліндр, з'єднаний перехідною ділянкою з прямокутною пластиною, яка закріплена від зміщень по нижній поверхні (рис. 7.16).

В циліндричний корпус вставлена трубчата вісь, навантажена по торцях рівномірно розподіленим навантаженням $q^{1'}$, що досягає в режимах аварійних перевантажень інтенсивності. Довжина деталі $l = 8{,}4R_1$, висота $H = 8{,}9R_1$, внутрішній радіус циліндра $R_2 = 2{,}2R_1$, зовнішній $R_3 = 3{,}2R_1$, радіус закруглення перехідної ділянки $R_4 = R_1$, ширина опорної пластини $B = 5R_1$, висота $h = R_1$, внутрішній радіус осі $R_1 = 0{,}05$м. Модуль пружності матеріалу конструкції $E = 2 \cdot 10^5$МПа, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0{,}3$, границя текучості при чистому зсуві $\tau_s = 160 МПа$. По поверхні контакту між віссю та корпусом передаються тільки нормальні напруження стиску.

Традиційно, розрахунок розглядуваної конструкції виконувався в рамках плоскої постановки на основі припущення про порівняно рівномірний характер розподілу вздовж осі $Z^{3'}$ зусиль, що передаються на корпус. Однак, справедливість цієї гіпотези може бути перевірена тільки на основі співставлення результатів двовимірного та просторового розрахунків.

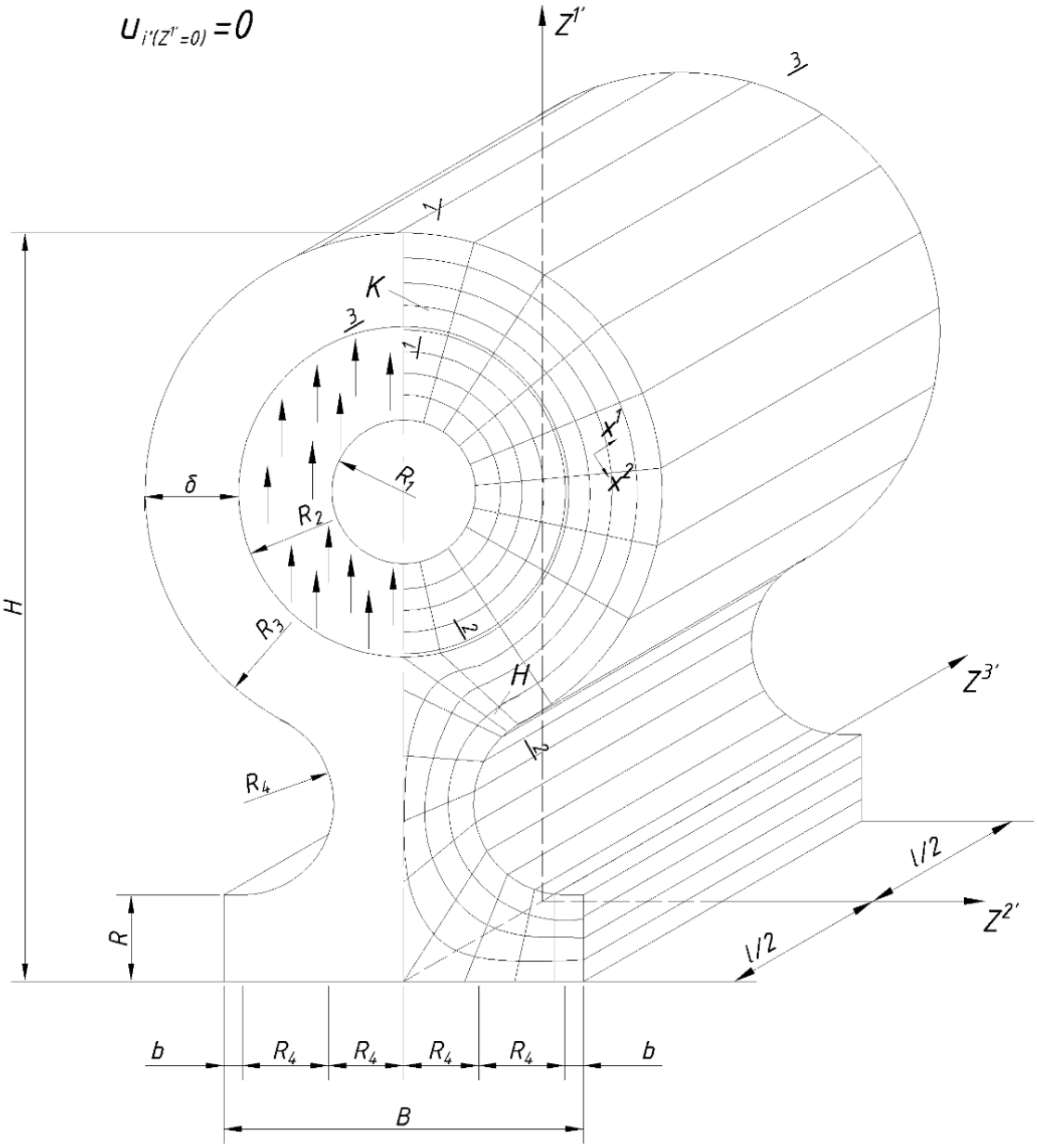


Рис. 7.16 Розрахункова схема деталі кріплення

Дискретизація деталі кріплення поворотного пристрою за допомогою призматичних скінченних елементів показана на рис. 7.16. Варто зазначити відносно складну конфігурацію поперечного перерізу об'єкта, що зумовило ретельне опрацювання принципів побудови сіткової області. Поверхня взаємодії осі та корпусу моделювалась досить тонким по відношенню до їхньої товщини шаром елементів, що сприймають виключно нормальні напруження. Виходячи з умови, що ці напруження можуть бути тільки стискаючими, в області розтягуючих напружень, яка визначається ітераційним шляхом, використовувались елементи з нульовою жорсткістю, показані на рис. 7.16 штриховкою. Дані з дослідження збіжності $\tilde{\sigma}^{22}$ таT в точках Kі H в залежності від загального числа вузлів сіткової області m, кількості утримуваних членів розкладу M та точності розв'язання системи рівнянь, визначеної ε, приведені в таблицях 7.6 і 7.7 відповідно.

Таблиця 7.6

ε	M	m	σ^{22} (МПа)	%	Т (МПа)	%
0,001	5	168	140,8	4,41	121,9	3,40
		260	145,5	1,22	124,2	1,13
		396	147,3	-	126,2	-
0,001	3	260	142,4	3,19	122,0	2,63
	5		145,5	1,09	124,2	0,88
	7		147,1	-	125,3	-
0,01	5	260	142	2,80	119,9	4,08
0,001			145,5	0,41	124,2	0,56
0,0001			146,1	-	124,9	-

Їхній аналіз дозволяє зробити висновок, що для розрахунку розглядуваної конструкції можна прийняти $m = 260$, $M = 5$ і $\varepsilon = 10^{-3}$. За цих значень параметрів проекції рівнодіючих на вісь $Z^{1'}$, обчислених по площі контакту та в перерізах корпусу площинами, що перпендикулярні осі $Z^{1'}$ та проходять через вісь обертання та центр перехідної ділянки, відрізняються від рівнодіючих зовнішніх навантажень на 2-3%.

Результати пружного розрахунку деталі кріплення, виконаного при $q^{1'} = 60$МПа, представлені на рис. 7.17 і 7.18 у вигляді епюр напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ та T, побудованих в перерізах 1-1 і 2-2 відповідно.

Таблиця 7.7

ε	M	m	σ^{22} (МПа)	%	T (МПа)	%
		168	251,3	4,70	155,6	3,95
0,001	5	260	260,1	1,36	160,3	1,04
		396	263,7	-	162,0	-
	3		252,4	4,03	157,1	2,96
0,001	5	260	260,1	1,10	160,3	0,98
	7		263,0	-	161,9	-
0,01			249,8	4,58	153,2	5,14
0,001	5	260	260,1	0,65	160,3	0,74
0,0001			261,8	-	161,5	-

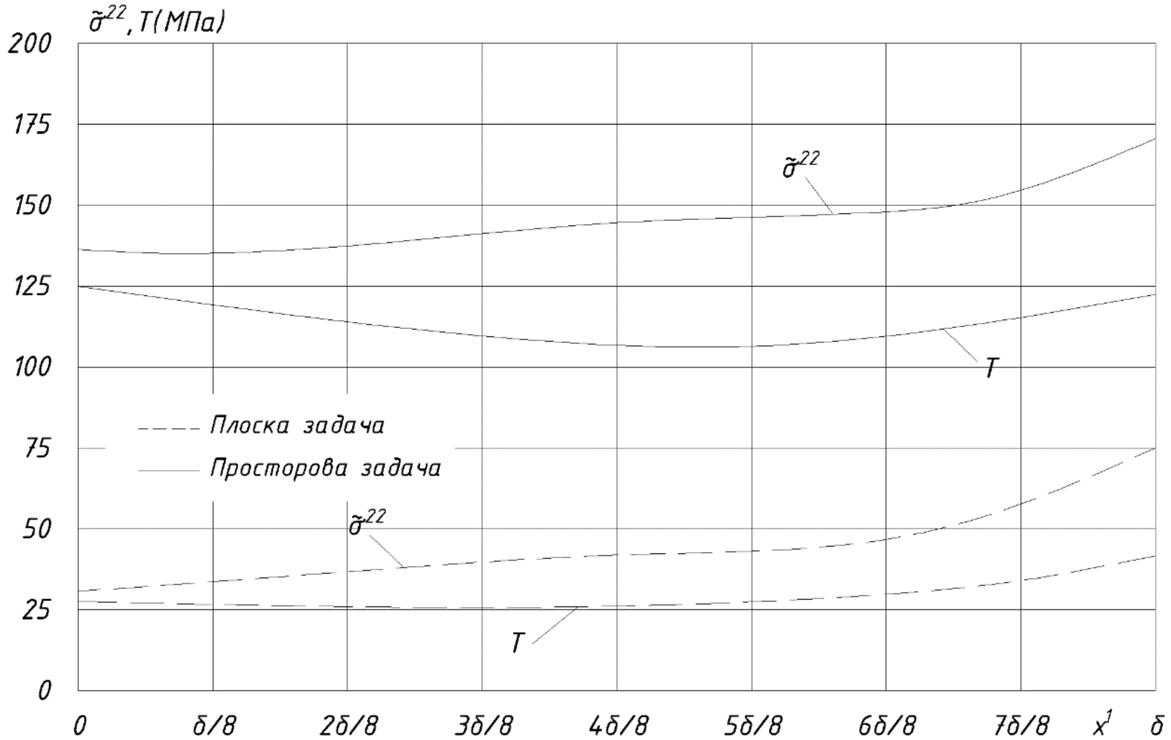


Рис. 7.17 Результати пружного розрахунку деталі кріплення у вигляді епюр напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ побудованих в перерізах 1-1 і 2-2

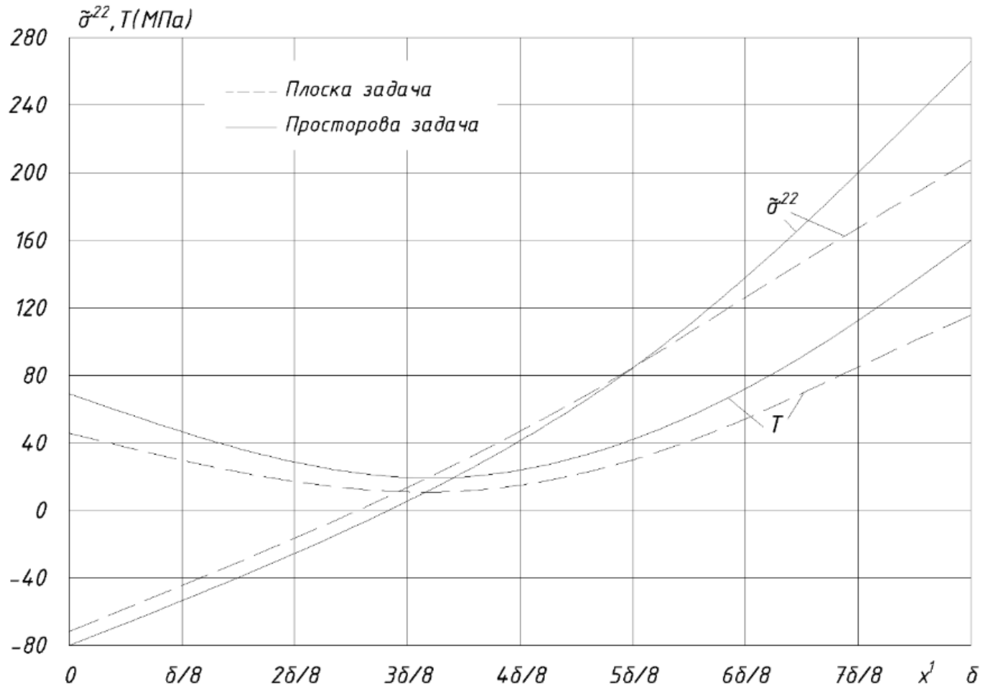


Рис. 7.18 Результати пружного розрахунку деталі кріплення у вигляді епюр напружень T побудованих в перерізах 1-1 і 2-2

Суцільними лініями позначені дані розв'язання просторової задачі, пунктирною – плоскої. Порівняння цих епюр показало, що тільки в перерізі 2-2 результати двовимірного і тривимірного рішень співставлені, а в околі точки K розрахунок в умовах плоскої деформації дає майже в 5 разів занижене значення T. Це пояснюється суттєво нерівномірним розподілом по довжині корпусу нормальних напружень $\tilde{\sigma}^{11}$, епюри яких в перерізі 3-3 показані на рис. 7.19. Там же приведені епюри напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ і T, характер яких визначається відміченою особливістю розподілу $\tilde{\sigma}^{11}$ вздовж осі $Z^{3'}$. На основі цих даних можна зробити висновок, що аналіз напружено-деформованого стану деталі кріплення поворотного пристрою необхідно виконувати в просторовій постановці. Причому за результатами пружного розрахунку більш навантаженими в порівнянні із зоною контактної взаємодії корпусу та осі виявилась перехідна ділянка між корпусом та опорною плитою.

Результати розрахунку, виконаного з урахуванням пластичних властивостей матеріалу при навантаженні об'єкта діями максимальної інтенсивності приведені на рис. 7.20 у вигляді напружень $\tilde{\sigma}^{11}$, $\tilde{\sigma}^{22}$ і Т, побудованих у перерізі 3-3.

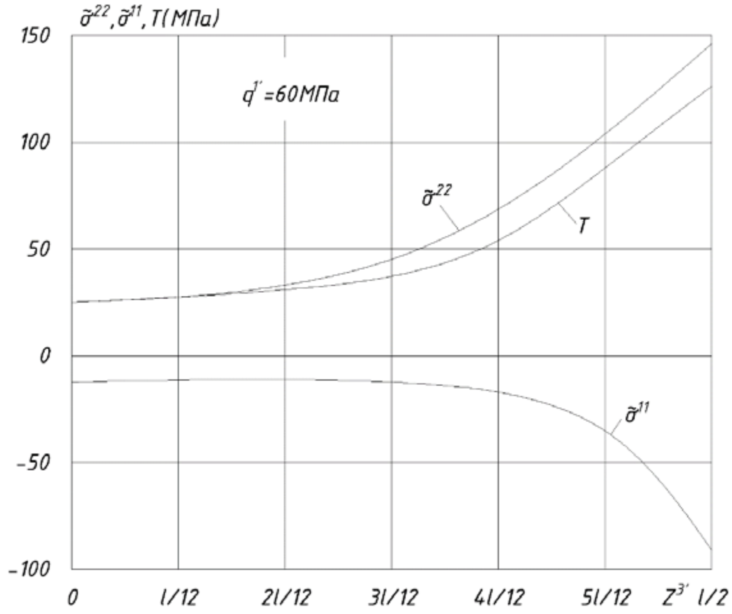


Рис. 7.19 Схема розподілу нормальних напружень по довжині корпусу

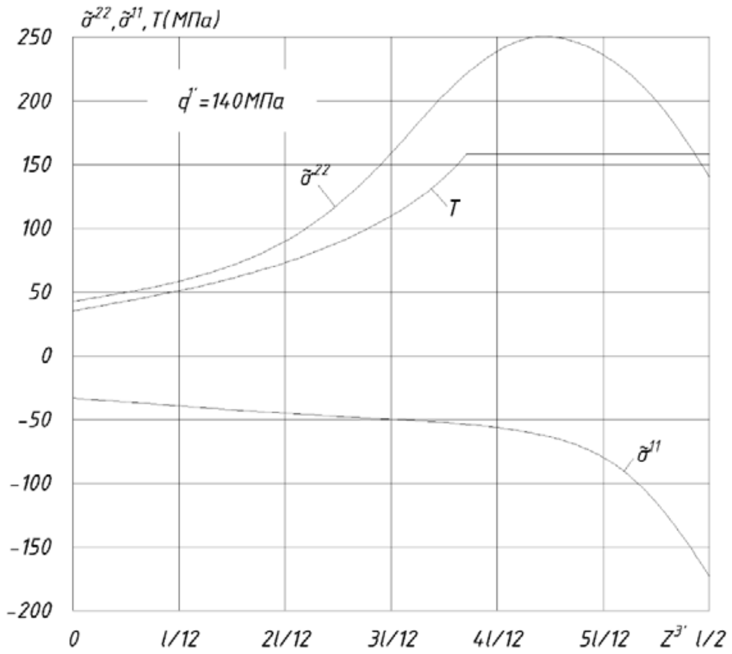


Рис. 7.20 Результати розрахунку у вигляді напружень з урахуванням пластичних властивостей матеріалу при навантаженні об'єкта діями максимальної інтенсивності

Спостерігається помітний порівняно з пружним розрахунком перерозподіл напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ поблизу торців корпусу, обумовлений розвитком у цій області пластичних деформацій.

На рис. 7.21 і 7.22 представлені епюри ε_i^p, побудовані в перерізах 2-2 і 3-3 при різних значеннях зовнішнього навантаження. Не дивлячись на те, що в області точки K пластичні деформації з'являються пізніше, ніж в області точки H, їхній розвиток в перерізі 3-3 проходить швидше і при $q^{1'} = 140$МПа величина ε_i^p в обох точках вирівнюється. Таким чином, дані розрахунку, виконаного в пружно-пластичній постановці, дозволили уточнити представлення про умови роботи окремих ділянок об'єкта і зробити висновок про рівноміцність корпусу.

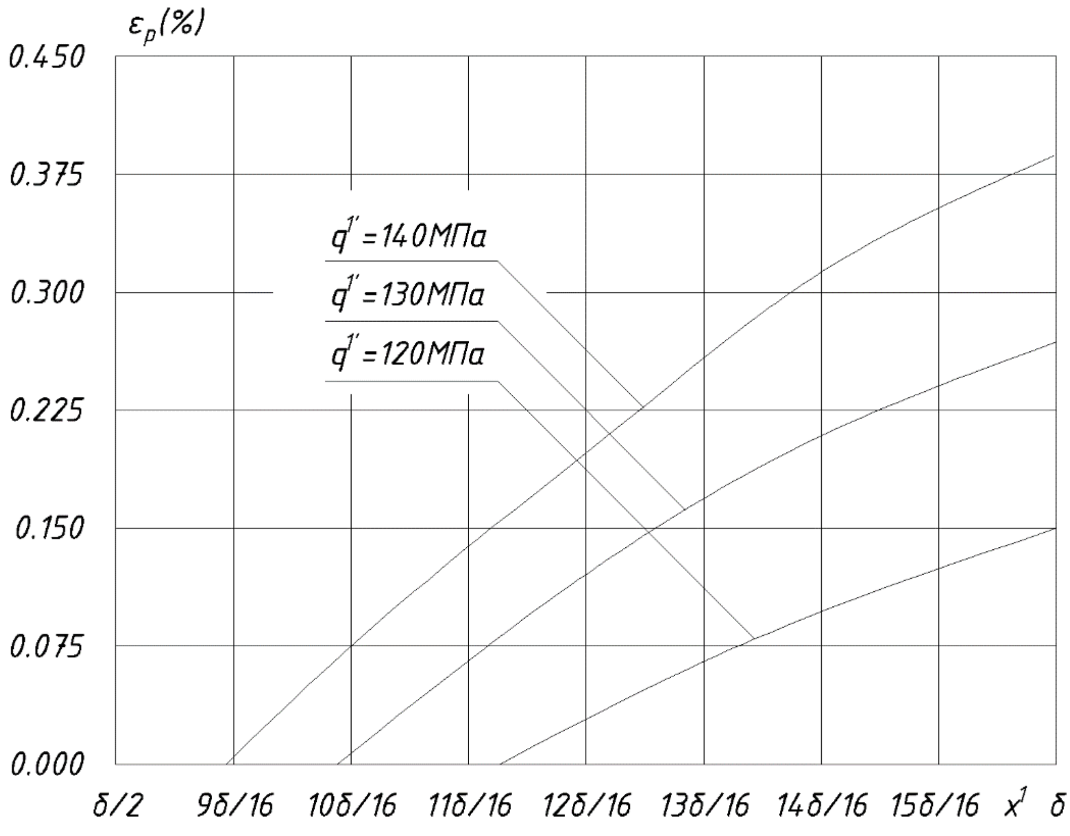


Рис. 7.21 Епюра ε_i^p в перерізі 2-2

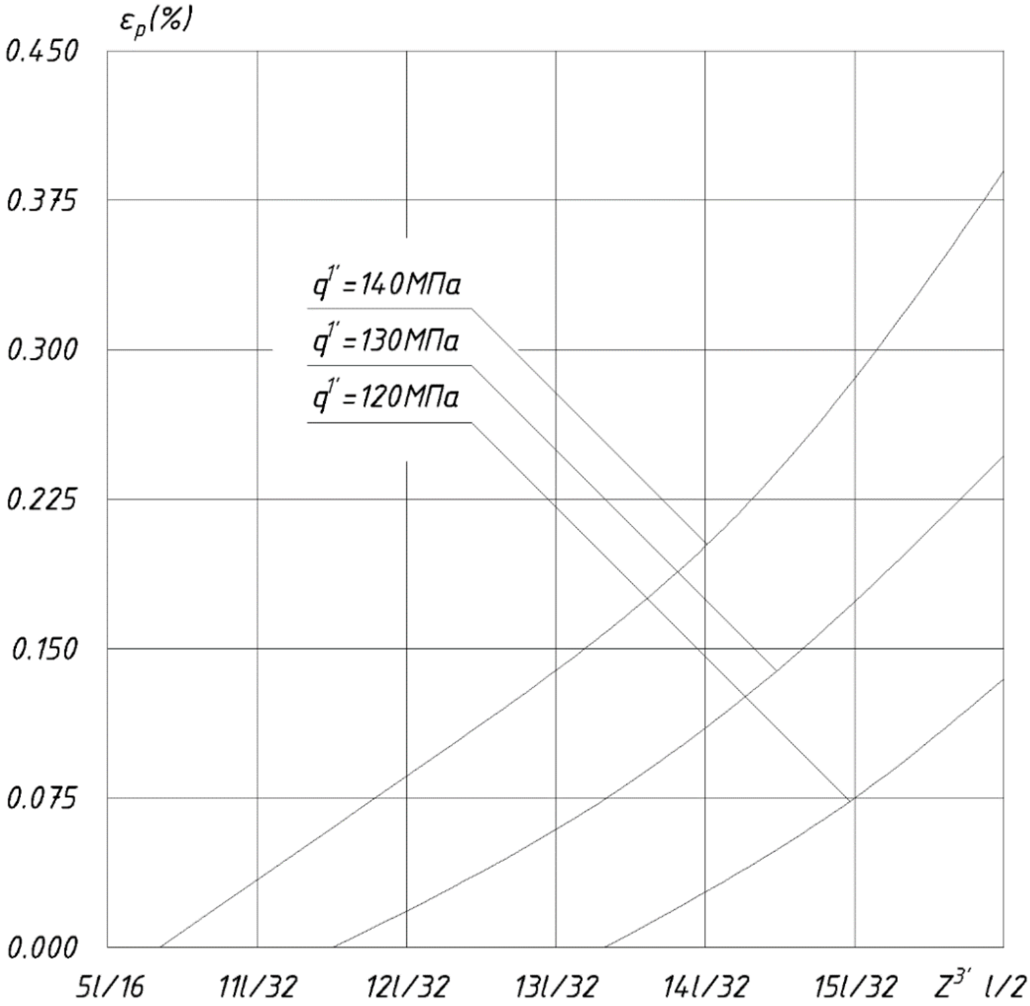


Рис. 7.22 Епюра ε_i^p в перерізі 3-3

7.4 Аналіз впливу товщини фланця на напружено-деформований стан корпусної деталі

Для аналізу напружено-деформованого стану корпусної деталі необхідно розглянути вплив товщини фланця на характеристики деформації, які виникають у відповідних сегментах конструкції. Вивчення впливу товщини фланця на напружено-деформований стан корпусної деталі дозволяє визначити оптимальні параметри конструкції для забезпечення її міцності та довговічності. Отже, частина деталі складається з сегментів, що чергуються, та наступних елементів. На рис. 7.23 наведено типове представлення одного з таких сегментів.

Досліджувана деталь – напівциліндр зі змінним радіусом, прикріплений до фланця, який жорстко закріплений на основі. Радіус внутрішньої поверхні циліндричного перерізу R становить 20 мм в області перешийка і збільшується до R = 30 мм в області максимального розширення. Товщина оболонки (h) становить 5 мм і є постійною на всьому протязі. Між перешийком і гніздом є перехідна ділянка, форма якої відображається двома дугами кола радіусом 16 мм (як показано на рис. 7.24). Довжина відрізка (L) становить 70 мм.

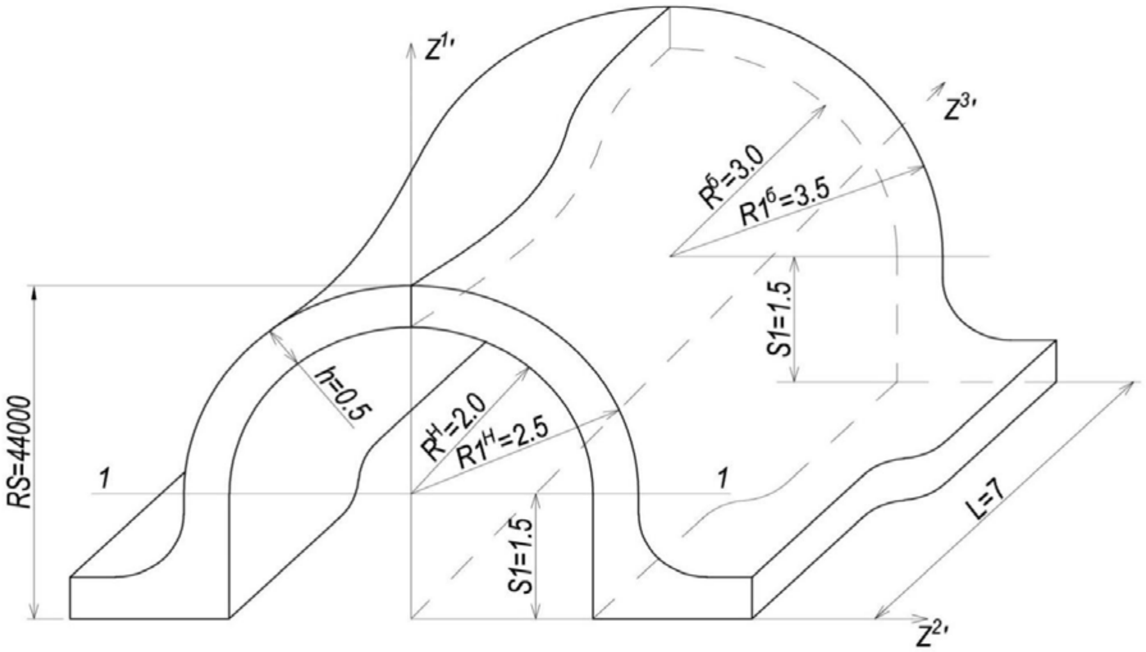


Рис. 7.23. Частини деталі

Можна легко спостерігати напружено-деформований стан деталі, яке містить відбортовку з густиною, що дорівнює товщині стінки циліндричного перерізу (h). Чисельне значення радіуса переходу галтелі (R_2) становить 75 мм. Крім того, на рис. 7.24 показано поперечний переріз фланця з усіма відповідними розмірами.

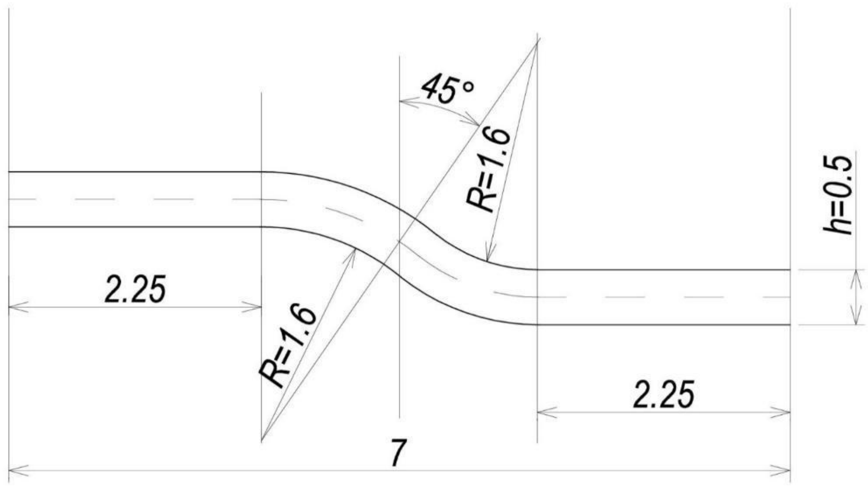


Рис. 7.24. Перехідна область між розтруб та
перешийок частини деталі

До внутрішньої поверхні частини деталі прикладено рівномірне навантаження 29 МПа. Коефіцієнт Пуассона та модуль пружності матеріалу дорівнюють $\upsilon = 0.3$ і $E = 2 \cdot 10^5$ МПа відповідно, межа текучості при чистому зсуві $\tau = 160$ МПа. Наступні граничні обмеження на кінцях сегментів моделюються для відображення площини симетрії, а фланець вважається вільним від переміщень у всіх трьох вимірах.

На рис. 7.25 зображено конструктивну схему об’єкта, тоді як рис. 7.26,а демонструє апроксимуючу сітку у поперечному перерізі фланця. Уздовж довжини і товщини об’єкта використовується нерівномірна сітка скінченних елементів для відображення геометрії корпусу. Вздовж осі $Z^{3'}$вздовж осі застосовується розкладання в ряд з використанням базових функцій.

Для підтвердження достовірності отриманих результатів було проведено аналіз збіжності, ґрунтуючись на різній кількості збережених членів у розкладі та числі скінченних елементів у поперечній площині. За результатами цього дослідження обрано сітку скінченних елементів із 102 вузлів, з утриманням 9 членів у розкладі вздовж осі $Z^{3'}$. Доречно наголосити, що подальші зміни цих параметрів призвели до відхилень у результатах розв'язку не більше ніж на 1,5%.

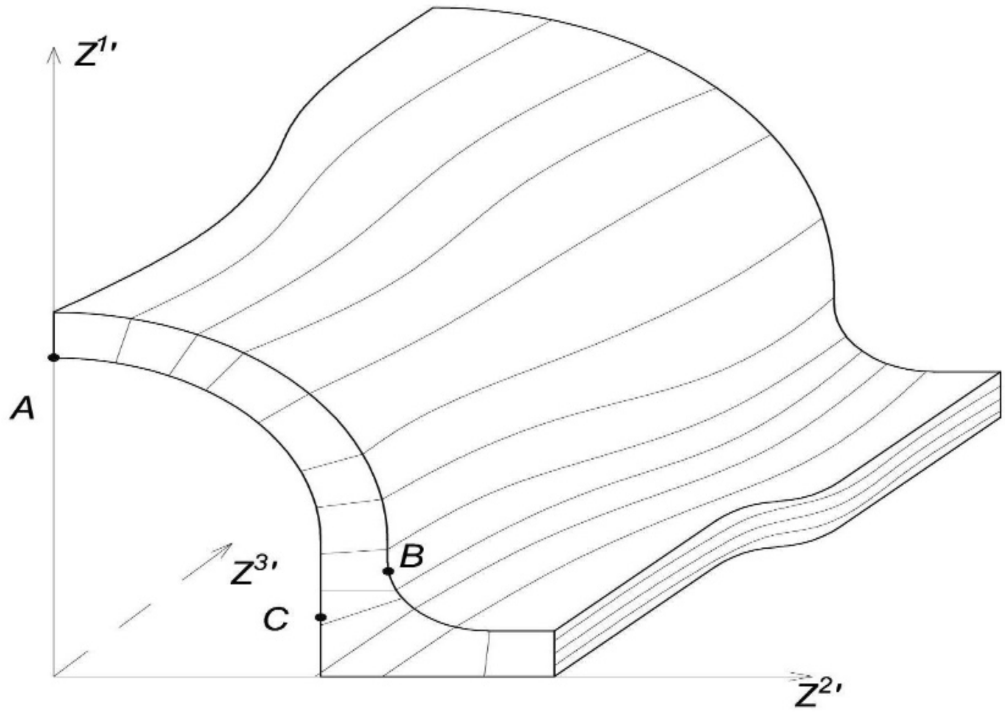


Рис. 7.25. Оцінювана схема об’єкта

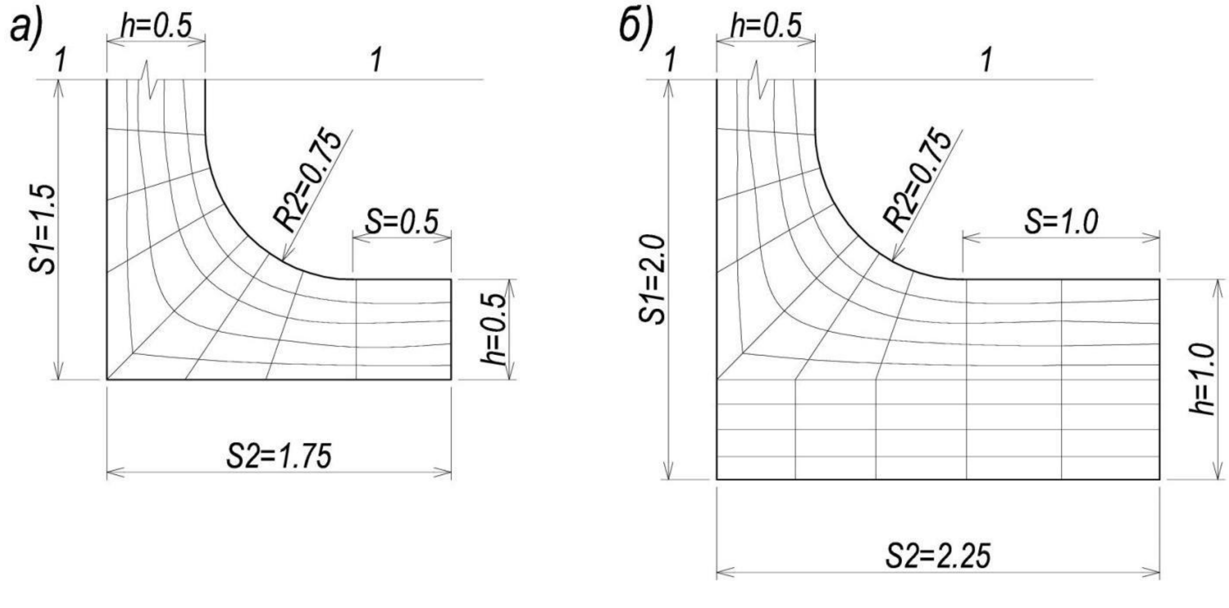


Рис. 7.26. Приблизна сітка у фланці перерізу

На першому етапі частина тіла була оцінена з використанням пружної формули. Результати аналізу демонструють, що максимальні рівні напружень на внутрішній поверхні досягаються в точках *A* і *C*, а також у точці на зовнішній поверхні (як показано на рис. 7.25). Крім того, на рис. 9.27 для вищезгаданих точок побудовано криві, що відображають інтенсивність дотичних напружень по довжині об’єкта.

Очевидно, що максимальний рівень інтенсивності напружень у всіх досліджуваних точках має місце в перерізі, розташованому в площині симетрії, збоку від дзвону. Враховуючи, що пластичні деформації почнуть розвиватися при досягненні відношення інтенсивності напружень $\frac{I}{q} = 4$, можна передбачити формування трьох чітко виражених пластичних зон.

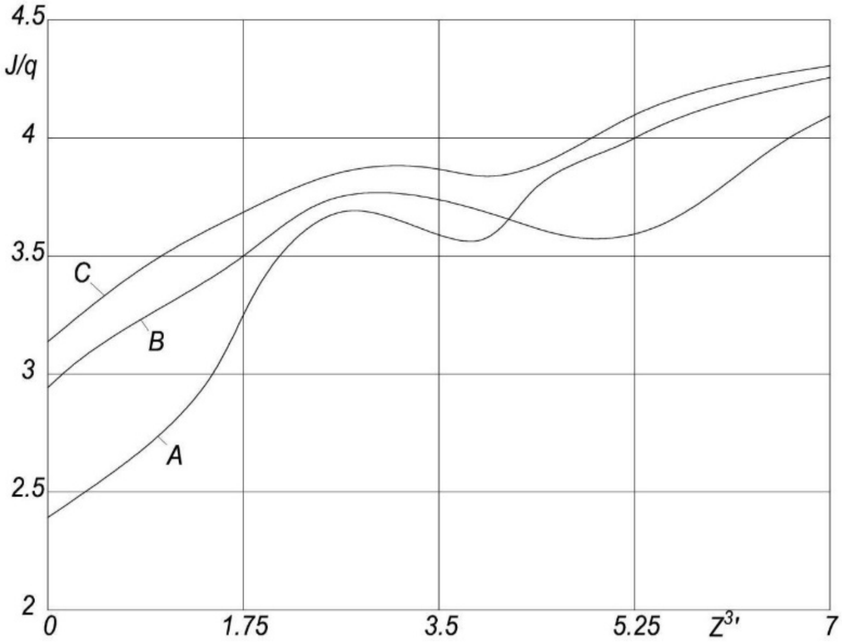


Рис. 7.27. Криві представляють інтенсивність дотичних напружень по довжині об’єкта

Оскільки максимальна інтенсивність дотичних напружень виникає вздовж внутрішнього контуру об’єкта (в точках *A* і *C)*, на рис. 7.28 показано розподіл інтенсивності дотичних напружень по колу для виявлення небезпечних зон. Діаграма ілюструє два чіткі максимуми, що вказують на потенційне існування двох областей пластичності, які становлять небезпеку: один з них розташований біля жорсткої вставки, а інший - у центральній частині циліндричного перерізу.

Для пояснення отриманих результатів було запропоновано пружно-пластичну формулу частини тіла.

Результати розв’язання задачі в рамках пружно-пластичного аналізу зображено за допомогою ізоліній пластичної деформації на рис. 7.29 та 7.30. Як і передбачалося, в процесі деформування утворилися три пластичні зони. Дві з них розташовані на внутрішній поверхні: одна - у жорстко закріпленій області (поблизу точки *C)*, а інша - в центрі циліндричної області (поблизу точки *A*). Третя зона знаходиться на зовнішній поверхні, на стику між прямою ділянкою і філе (точка *B)*. Зона *A* значно простягається вздовж $Z^{3'}$ і охоплює значну частину дзвону, хоча інтенсивність пластичності в ній відносно низька, не перевищуючи 0,15% на піку. Пластична зона в місці з’єднання фланця зі станиною, що виходить за межі довжини розтруба, становить більш критичний ризик. Зона *C* розташована поблизу защемленого кута фланця, де максимальна інтенсивність пластичності досягає 0,5%, що робить її частиною проблеми.

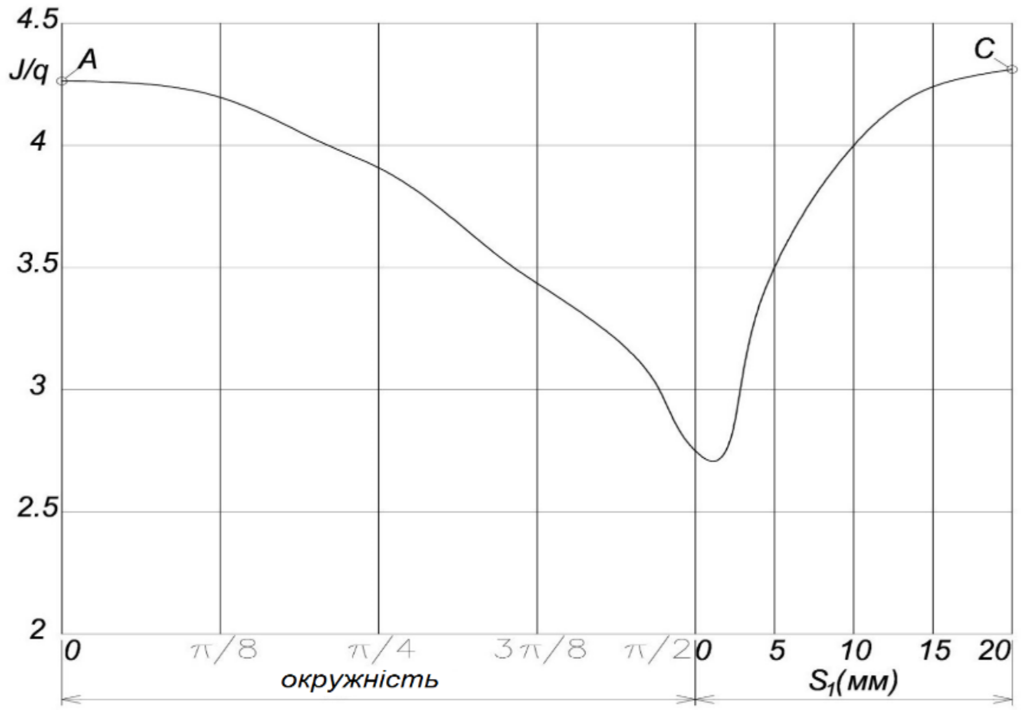


Рис. 7.28. Розподіл інтенсивності дотичних напружень у колі

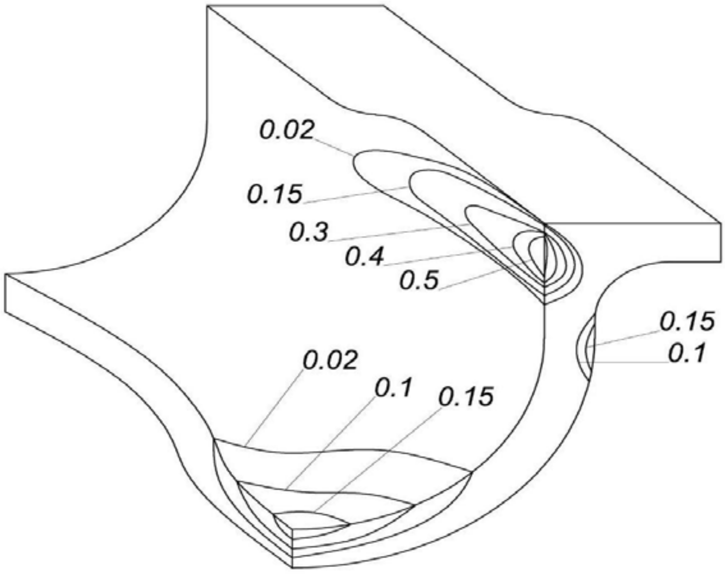


Рис. 7.29. Ізолінії пластичних деформацій

Для коректного оцінювання несучої здатності конструкції важливо враховувати можливі зони пластичних деформацій. Оцінки, які базуються лише на пружних розрахунках, здатні виявити потенційні області утворення пластичних зон, проте точне визначення небезпечних зон можливо лише завдяки пружно-пластичному аналізу. Одним із ефективних способів зменшення пластичних деформацій в зоні фіксації є збільшення геометричних параметрів фланця. Далі розглянемо напружено-деформований стан тіла з фланцем визначеної товщини $2h$.

Розміри поперечного перерізу потовщеного фланця та його скінченно-елементна сітка зображені на рис. 7.26 (б). У цьому випадку все ще виявляються три пластичні зони. Довжина вздовж осі $Z^{3'}$ та максимальна інтенсивність пластичної деформації в зонах A і B для потовщеного фланця (рис. 7.30) демонструють лише незначні відмінності порівняно з раніше отриманими результатами для фланця товщиною h. Далі обговорюються відмінності між фланцями з товщинами h і 2h. У зоні, близькій до жорсткого защемлення, інтенсивність пластичних деформацій для конструкції з фланцем товщиною 2h більш ніж утричі нижча, ніж для конструкції з тоншим фланцем, зменшуючись до значення 0,15%.

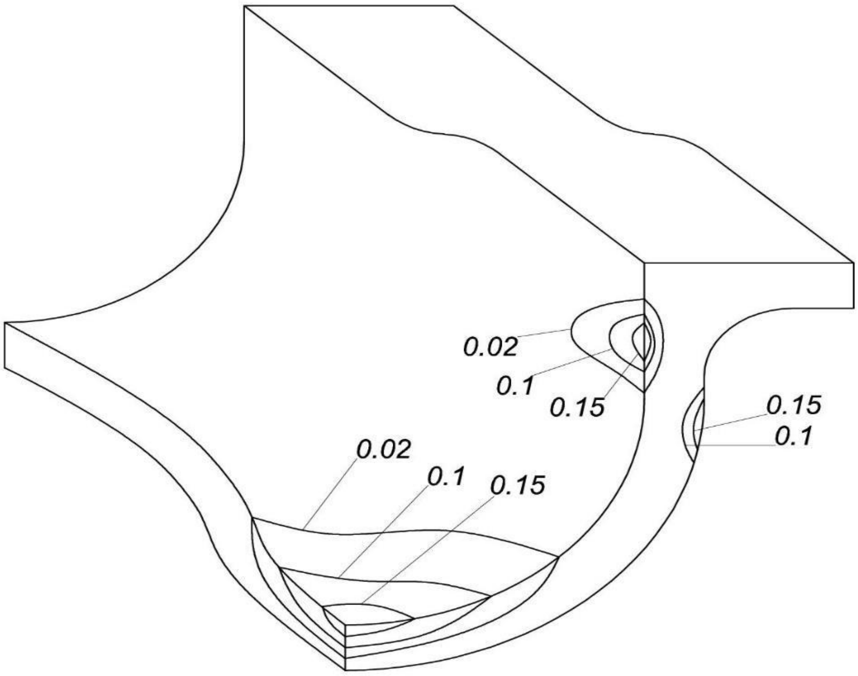


Рис. 7.30. Ізолінії пластичних деформацій

Отже, збільшення товщини фланця суттєво знизило інтенсивність пластичної деформації в небезпечній зоні. За умови такої модифікації конструкції рівень пластичної деформації залишається однаковим у всіх трьох зонах пластичності. Крім того, важливо зазначити, що застосування потовщеного фланця сприяло локалізації зони пластичності, довжина якої в цьому випадку не перевищувала половини довжини дзвону.

Також необхідно порівняти розподіл напружень уздовж контурів (внутрішнього та зовнішнього) області в площині симетрії з боку дзвону, де спостерігається найвищий рівень пластичної деформації. Розподіл окружних напружень уздовж внутрішнього та зовнішнього контурів конструкції зображено на рис. 7.31 та 7.32 відповідно.

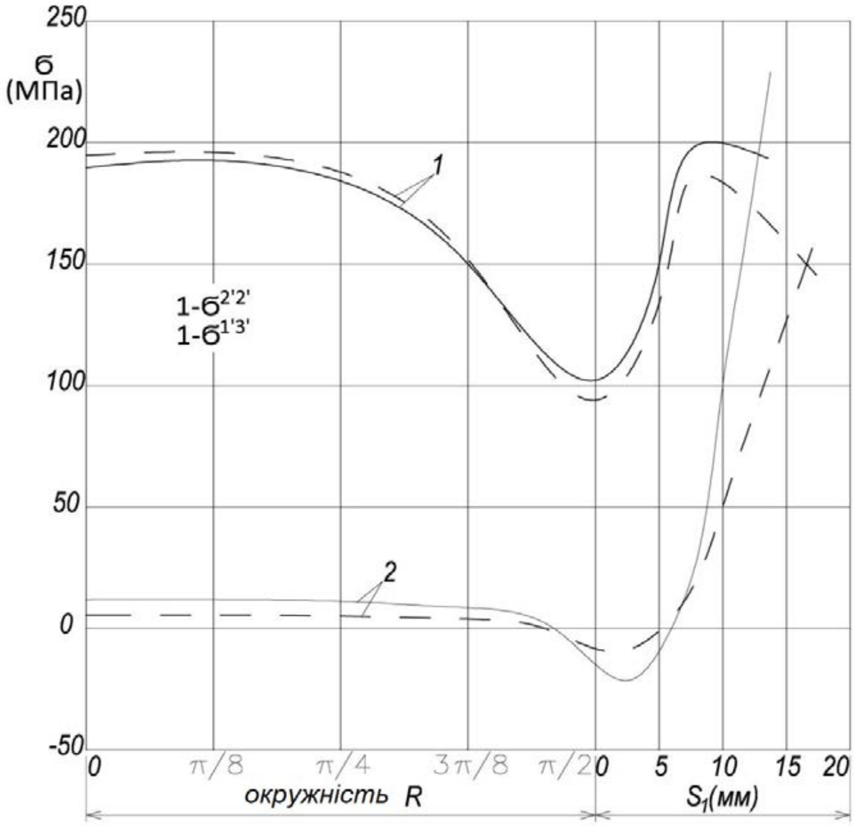


Рис. 7.31. Розподіл кільцевих напружень вздовж внутрішнього контуру деталі

На рис. 7.31 діаграми для нормальних напружень $\sigma^{2'2'}$позначені цифрою 1, а цифрою 2 - епюри дотичних напружень, що досягають значних значень в зоні жорсткого защемлення. На стику циліндричної та прямолінійної ділянок відбувається помітне зменшення величини $\sigma^{2'2'}$ відбувається помітне зменшення величини дотичних напружень, що супроводжується зростанням зовнішніх поверхневих напружень.

Важливо відзначити, що товщина фланця має мінімальний вплив на розподіл дотичних і нормальних напружень в циліндричних поверхнях. Зменшення $\sigma^{2'2'}$ і $\sigma^{3'1'}$ спостерігається за рахунок потовщення фланця в місцях, де їх значення максимальні на внутрішньому контурі, при незначному збільшенні стискаючих окружних напружень в зоні гальмування. Загалом, впровадження фланця № 2 не викликало суттєвих змін у картині напружено-деформованого стану ділянок, що не прилягають до жорсткого закладення.

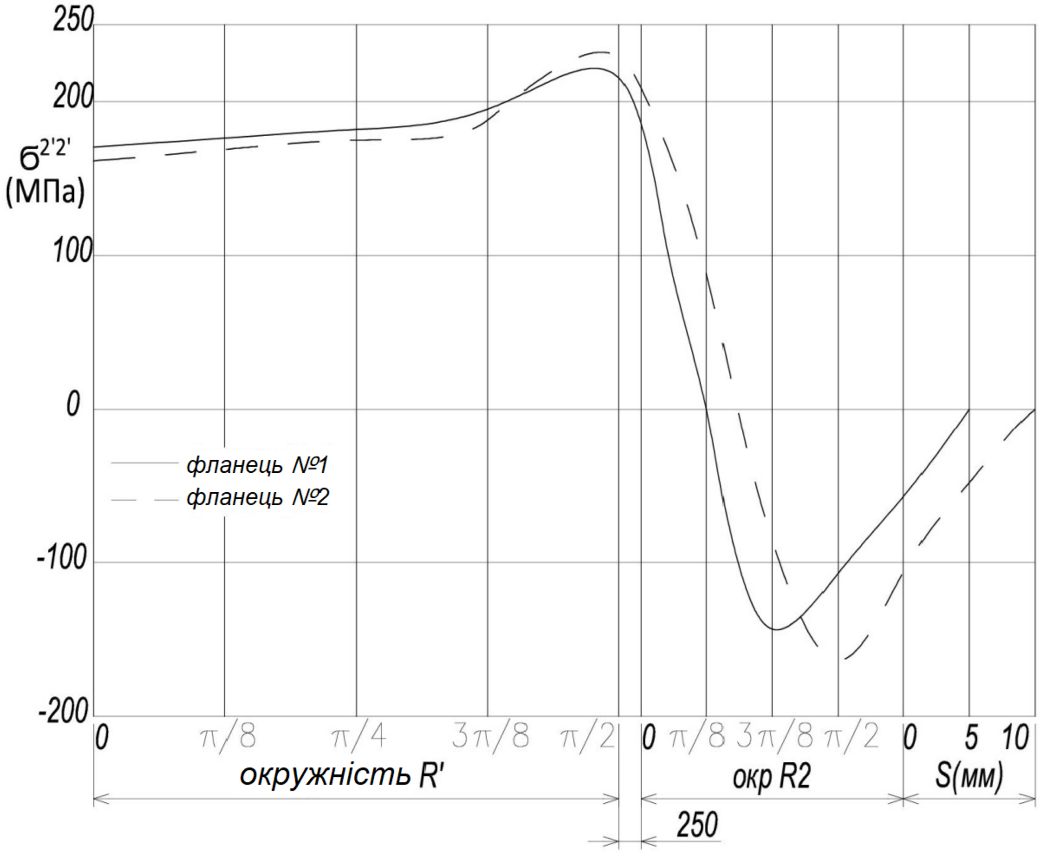


Рис. 7.32. Розподіл кільцевих напружень по зовнішньому контуру деталі

Очевидно, що додатковий матеріал, необхідний для виготовлення потовщеного фланця, повністю виправдовує себе в цьому сценарії. Ця модифікація ефективно зменшує рівень пластичної деформації та напруження в небезпечних зонах, тим самим подовжуючи термін служби компонента корпусу.

7.5 Дослідження процедури протяжки прямокутної смуги

Для ілюстрації застосування методу скінченних елементів у розв’язання просторових задач формозмінення призматичних тіл було досліджено процес протягування смуги. Згідно з даними на рис. 7.33 і 7.34, протягування використовується для подовження заготовки шляхом зменшення площі її поперечного перерізу. Під час протягування контакт між інструментом та заготовкою обмежується лише частиною поверхні заготовки, що призводить до утворення зовнішніх зон, не залучених у безпосередню взаємодію з інструментом.

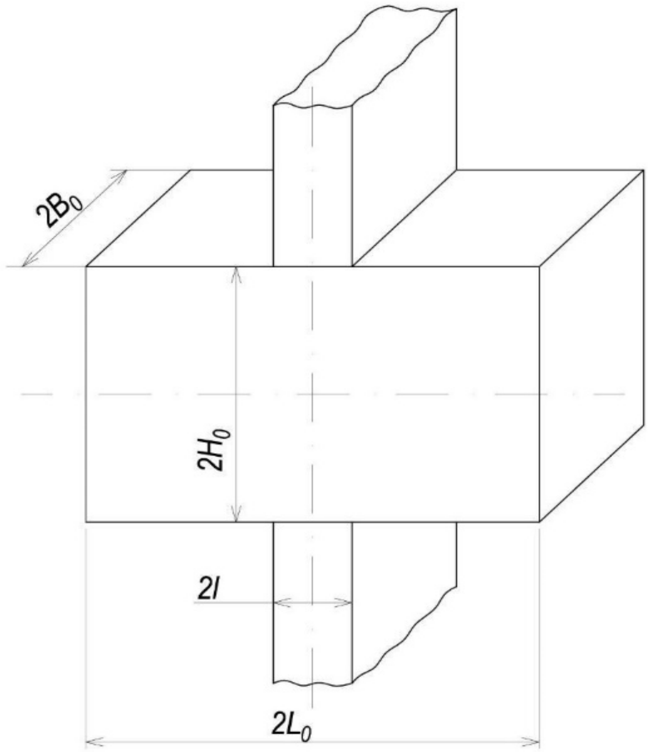


Рис. 7.33. Заготовка в недеформованому стані

Протягування є ключовою операцією металообробки, яка широко використовується у виробництві критично важливих компонентів для енергетичної та транспортної індустрій. Для оптимізації процесу протягування необхідно забезпечити точне оцінювання напружено-деформованого стану заготовки, що можливо лише за допомогою чисельних методів. Серед таких методів найпоширенішим є метод скінченних елементів (МСЕ). У низці досліджень представлено процедуру моделювання протягування з використанням МСЕ, однак у більшості випадків вона реалізована у двовимірному форматі.

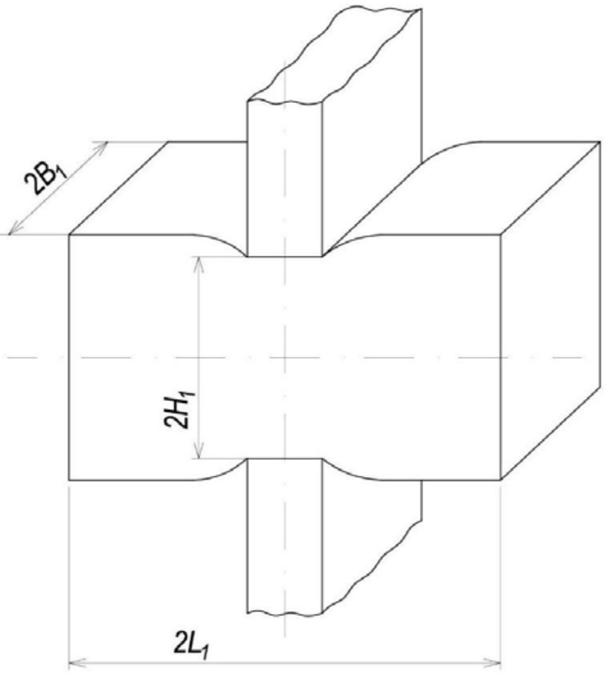


Рис. 7.34. Заготовка в деформованому стані

Таким чином, важливо виконати розрахунок просторового розподілу напружено-деформованого стану смуги під час процесу протягування та провести порівняльний аналіз просторового й плоского розв'язків. Припустимо, що стрічкова протяжка з розмірами поперечного перерізу в недеформованому стані $2H_0 = 2B = 80$ мм, довжиною $2L_0 = 130$ мм, а функціональна частина бойка має розміри $2L = 25$ мм. Матеріал заготовки - сплав Д16, а його фізичні характеристики взято з графіка кривих деформаційного зміцнення при температурі $T = 450\ ^oC$.

Для перевірки точності припущень процедури первинної деформації було побудовано траєкторії точок C і D, розташованих на поверхні тіла, що вільно деформується (як показано на рис. 7.35). Конфігурація цих траєкторій є майже лінійною, що свідчить про точність обраних рівнів стану.

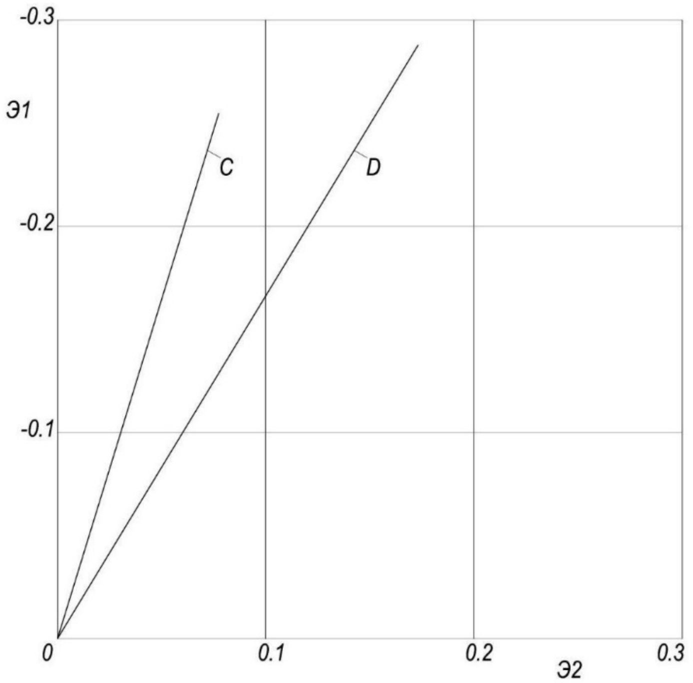


Рис. 7.35. Траєкторії точок C та D

На рис. 7.36 представлена розрахункова схема. У площині поздовжнього перерізу була реалізована неоднорідна сітка НМСЕ вздовж напрямку $Z^{2'}$ а вздовж осі $Z^{3'}$ вздовж осі. Рух інструмента моделювався шляхом накладання жорстких переміщень $\Delta U^{1'}$ вздовж $Z^{1'}$ віссю.

Експерименти, описані в роботах [28; 35], демонструють, що при певних геометричних співвідношеннях між функціональною частиною бойка та перерізом заготовки контактне ковзання між сухими чорновими пластинами під час протягування не відбувається. У зв’язку з цим до контактних поверхонь інструмента та заготовки були застосовані граничні умови, що відповідають повному прилипанню. Для розв’язання задачі в плоскому формулюванні були змодельовані плоскі деформаційні обмеження шляхом задання нульового переміщення $U^{3'}$ вздовж бічної поверхні тіла по осі $Z^{3'}$осі.

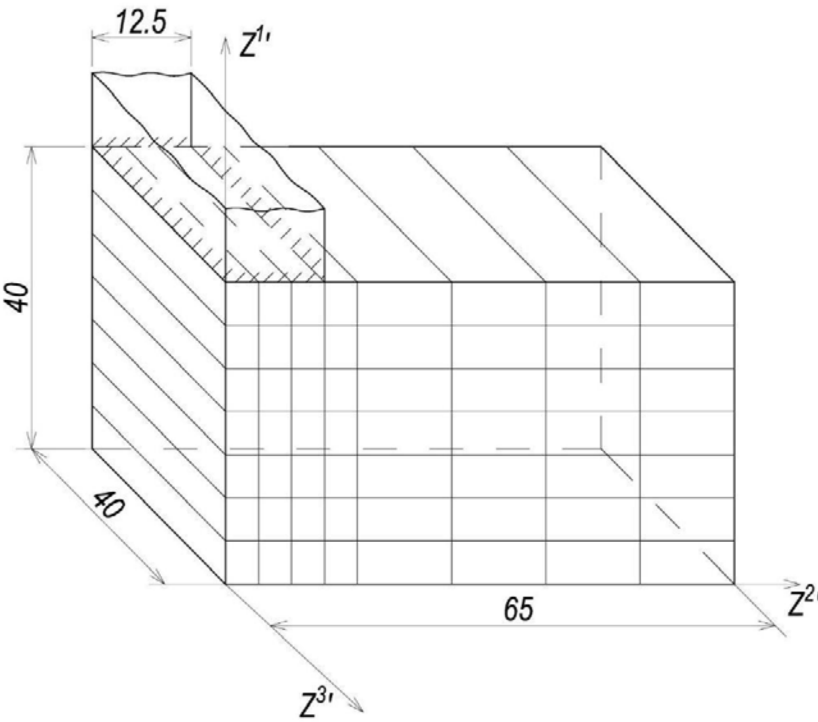


Рис. 7.36. Розрахункова схема

Процедура пластичної деформації аналізується до рівня стиснення по висоті 18,8%.

Для забезпечення достовірності отриманих результатів було проведено кілька досліджень збіжності, зосереджених на скінченній кількості об'єктів на площині $Z^{3'} = 0$ кількість залишкових членів у розкладанні вздовж осі $Z^{3'}$ осі, величині кроку зсуву в поперечному напрямку, а також точності розв'язання нелінійних рівнянь. Було виявлено, що адекватну апроксимацію об'єкта можна отримати за допомогою сітки з 96 вузлами в площині поздовжнього перерізу, яка зберігає перші п'ять членів розкладу в напрямку $Z^{3'}$. Збільшення густини сітки в 1,5 рази та подвоєння кількості збережених членів розкладу дало уточнення розв'язку менш ніж на 3%. Крок вимушеного зсуву $\Delta U^{1'}$ обраний рівним 1,5 мм, мав мінімальний вплив на збіжність результату, тому триразове збільшення кроку зменшило точність обчислень лише на 1%. Дослідження точності розв'язання систем нелінійних рівнянь показало, що збіжність досягається при $E = 10^{-5}$а збільшення E на порядок покращує точність на 1.7%.

На рис. 7.37 показано одну з конфігурацій апроксимуючої сітки в деформованому стані. Для більш детального пояснення змін форми тіла в процесі малювання розглянуто переміщення ключових частин тіла. На рис. 7.38-7.40 наведено діаграми переміщень, наприклад, $U^{3'}$ точки на бічній поверхні тіла в поперечній площині симетрії, $U^{3'c}$ у площині осі симетрії та $U^{2'}$ у напрямку лінії AB у центральній вертикальній площині на різних етапах процесу формування. Криві, позначені як 1, представляють результати при E_1= 3.8%, крива 2 - при E_1 = 11.3%, а крива 3 - при E_1 = 18.8%. На рис. 7.41 і 7.42 пунктирною лінією-сегментом зображено відповідну $U^{2'}$ діаграми залежно від розв'язку плоскої задачі.

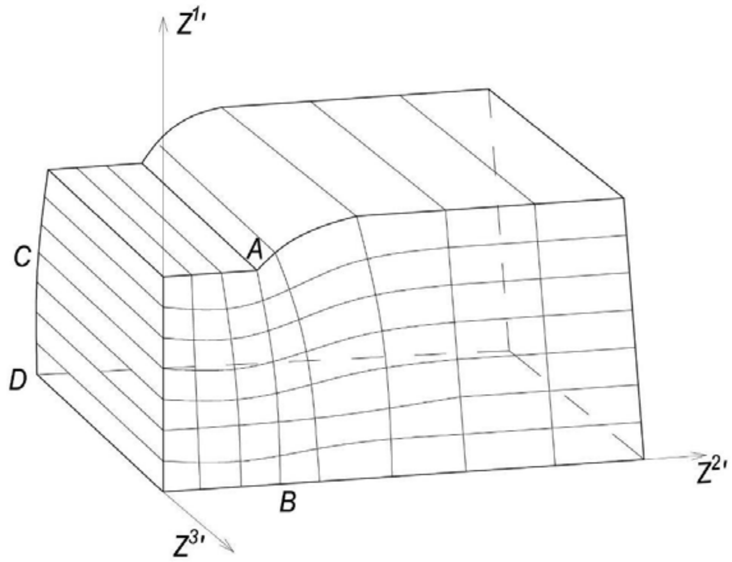


Рис. 7.37. Апроксимуюча сітка в деформованому стані

З рисунків 7.38 та 7.39 видно, що існує суттєва різниця між плоскими та просторовими розв'язками. Зокрема, бочкоподібна форма виникає не тільки в площині $Z^{3'}$ = 0, але й по всій бічній поверхні заготовки.

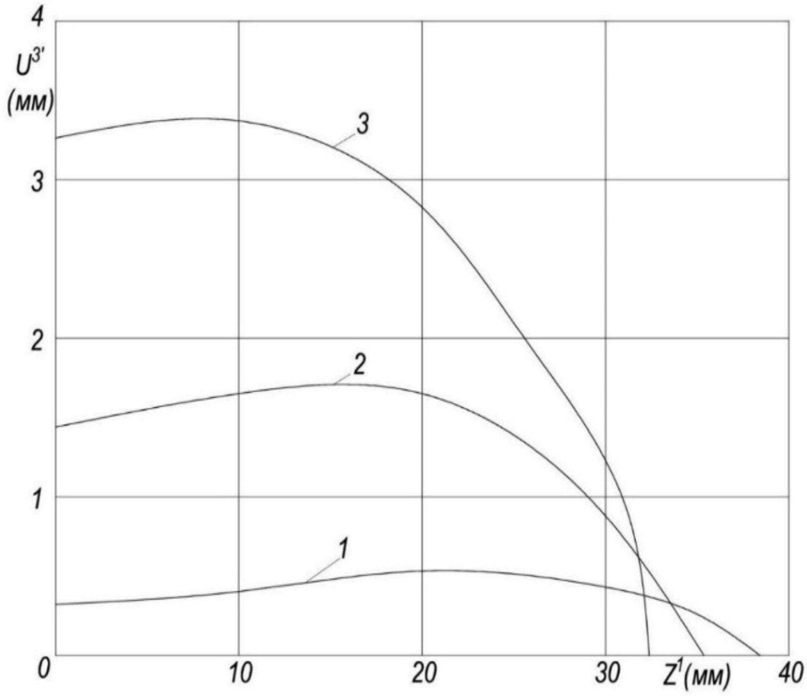


Рис. 7.38. Графіки переміщень $U^{3'}$

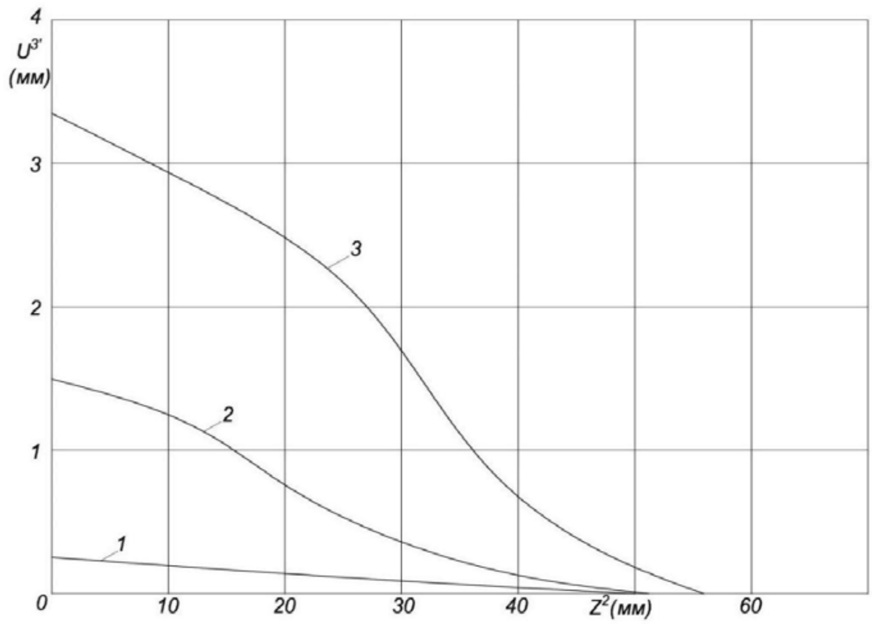


Рис. 7.39. Графіки зміщення $U^{3'}$

Врахування переміщень $U^{3'}$ призводить до суттєвої кількісної зміни схеми переміщень точок тіла в площині осьової симетрії (див. рис. 7.40). В області найбільших переміщень $U^{2'}$розв'язок МСЕ дає результат, який приблизно на 60% перевищує просторовий.

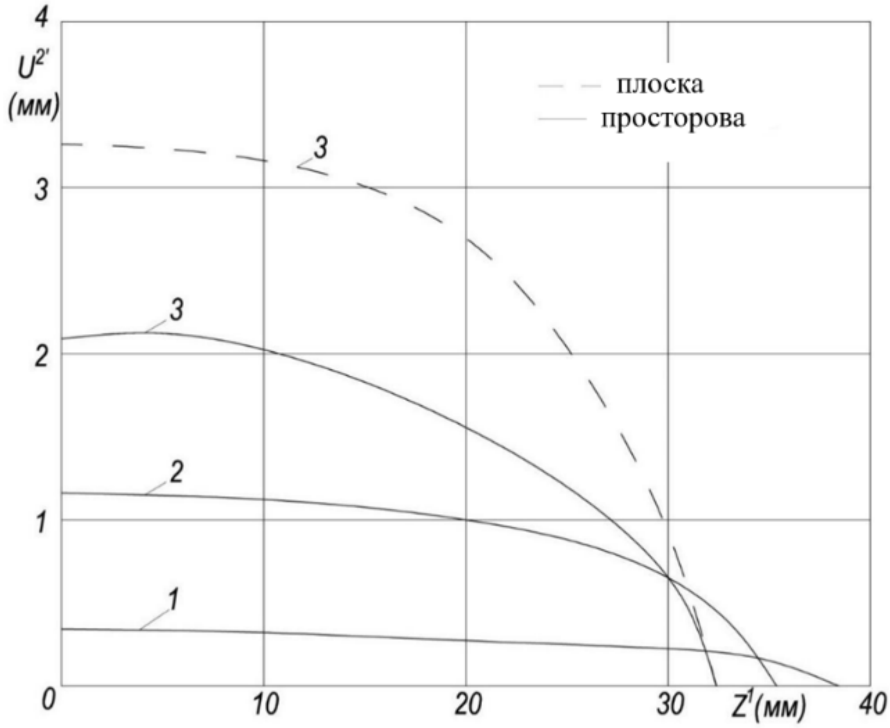


Рис. 7.40. Графіки переміщень $U^{2'}$

На рис. 7.41 представлені графіки деформацій у напрямку координати $Z^{1'}$ вздовж осі симетрії заготовки при найвищому ступені ущільнення. Плоский розв'язок, представлений пунктирною лінією, показує, що поздовжні деформації ε^{22} на осі симетрії на 60% більші, ніж у тривимірному аналізі. Зменшений рівень деформації ε^{22} що спостерігається в просторовій постановці, можна пояснити врахуванням деформації вздовж $Z^{3'}$, яка враховує наявність деформації вздовж ε^{33} деформації. Крім того, на рис. 7.42, ідентичний конфлікт у результатах очевидний при порівнянні графіків ε^{22} побудованих у площині осьової симетрії заготовки.

На рис. 7.43 і 7.44 показано ізолінії інтенсивності пластичної деформації в поздовжньому перерізі тіла при $Z^{3'} = 0$, для просторового та плоского розв'язків, відповідно. Крім того, розподіл пластичних деформацій, отриманий за допомогою обох методів розрахунку, є досить подібним у цій області.

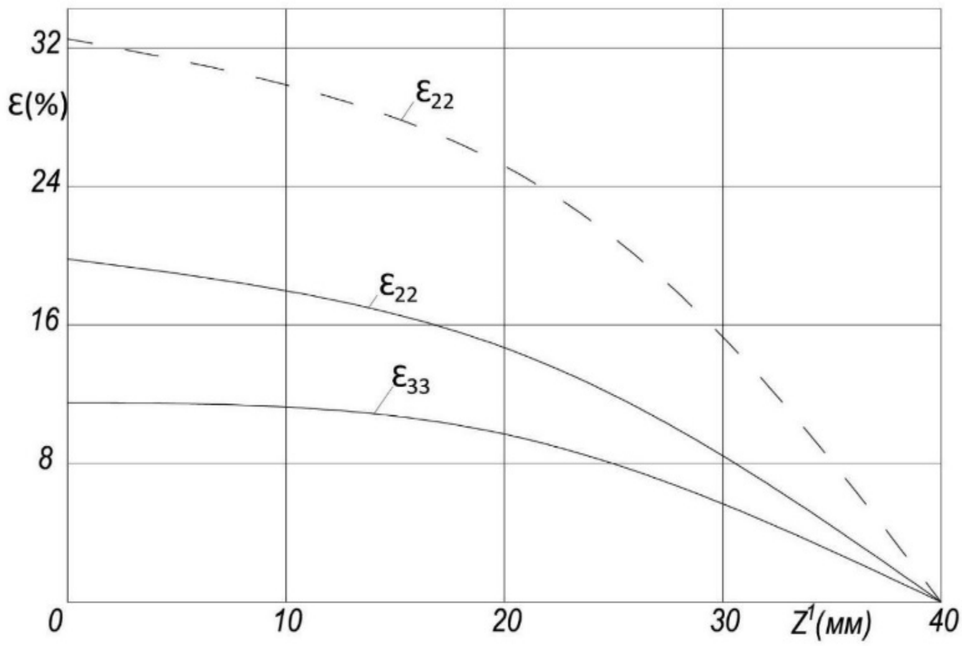


Рис. 7.41. Графіки деформацій вздовж осі симетрії заготовки

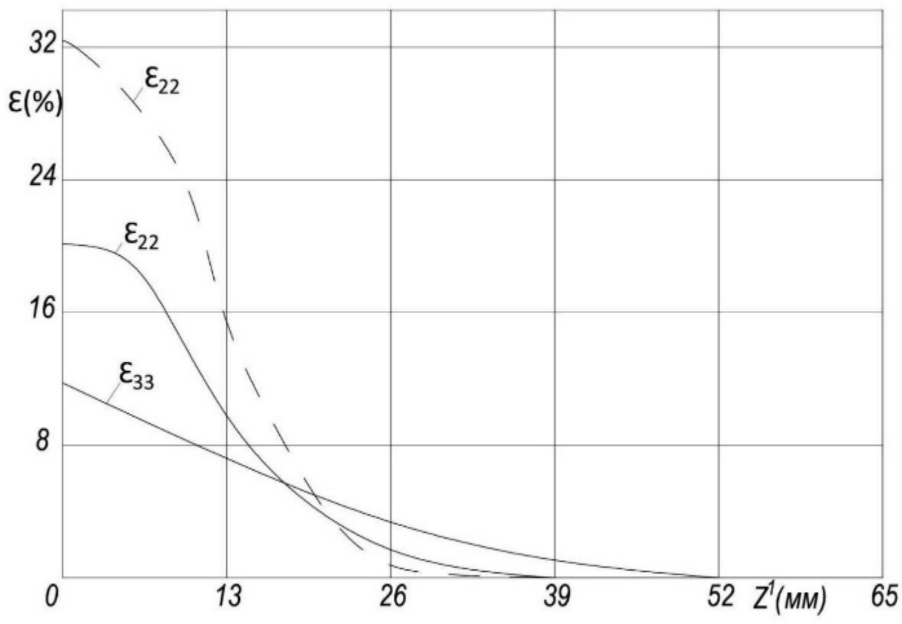


Рис. 7.42. Графіки деформацій у площині осьової симетрії заготовки

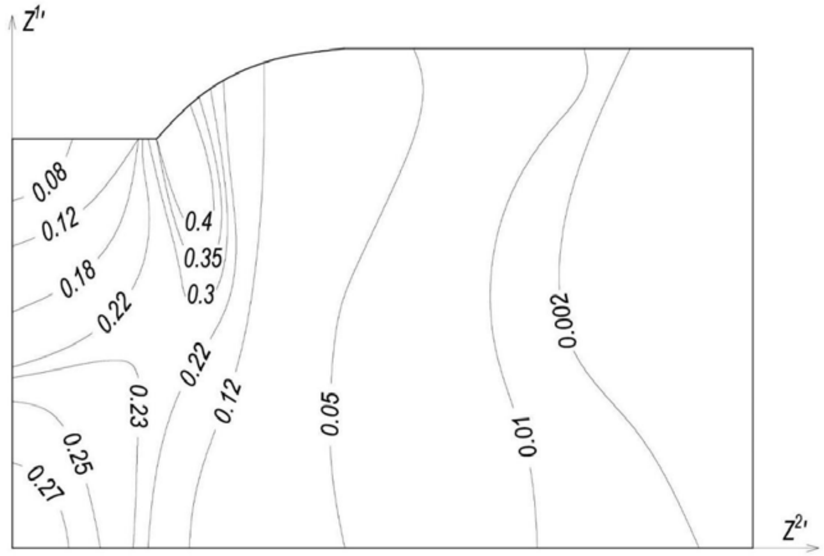


Рис. 7.43. Ізолінії інтенсивності пластичної деформації

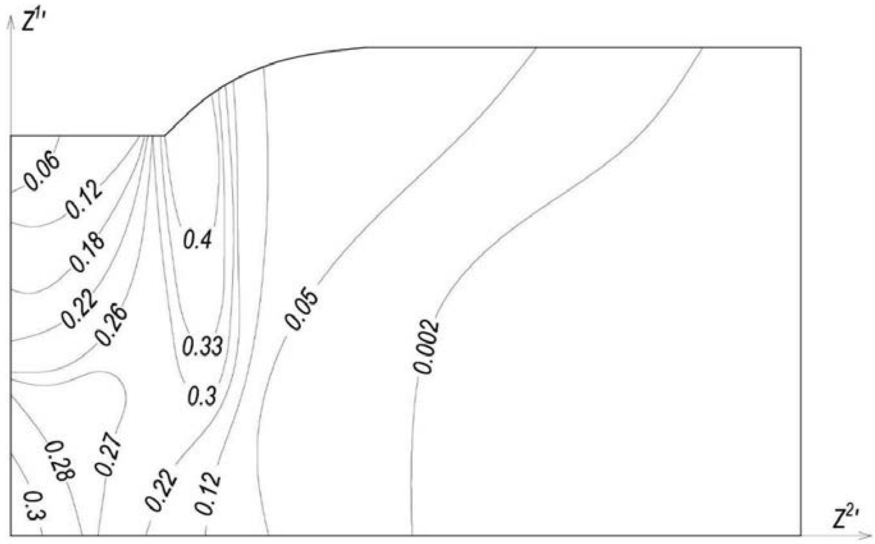


Рис. 7.44. Ізолінії інтенсивності пластичної деформації

На рисунку 7.45 графіки напружень $\sigma^{1'1'}$ побудовані вздовж перпендикуляра до напрямку симетрії області як для просторового, так і для плоского розв’язків, є якісно подібними. У кожному випадку спостерігається збільшення стискаючих напружень на межі області, що зазнає сильної деформації, з незначним зменшенням у приконтактній області. Ці результати добре узгоджуються з результатами, запропонованими в [5] на основі плоского розрахунку.

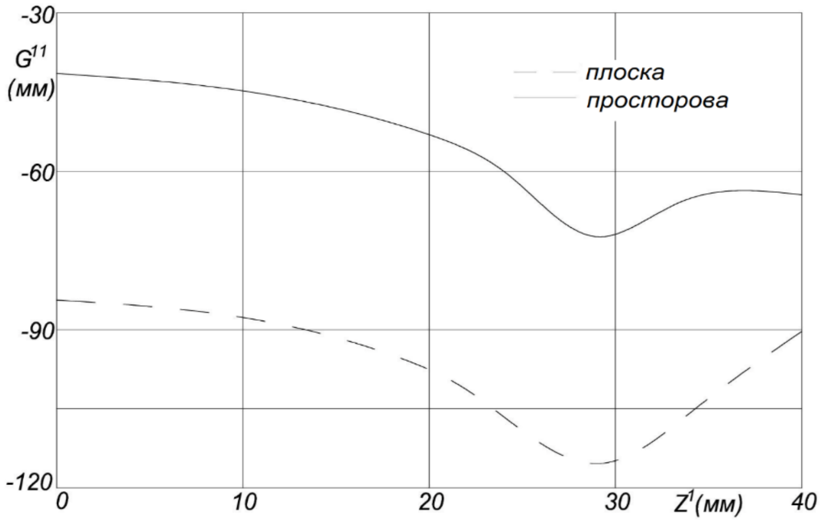


Рис. 7.45. Графіки значень $\sigma^{1'1'}$

Кількісна різниця між значеннями $\sigma^{1'1'}$ отриманими в тривимірній та плоскій постановці в області максимуму становить приблизно 60%.

Сила протягування є однією з ключових характеристик цієї процедури. На рис.7.46 представлено графіки залежності зусилля протягування від ступеня деформації по висоті.

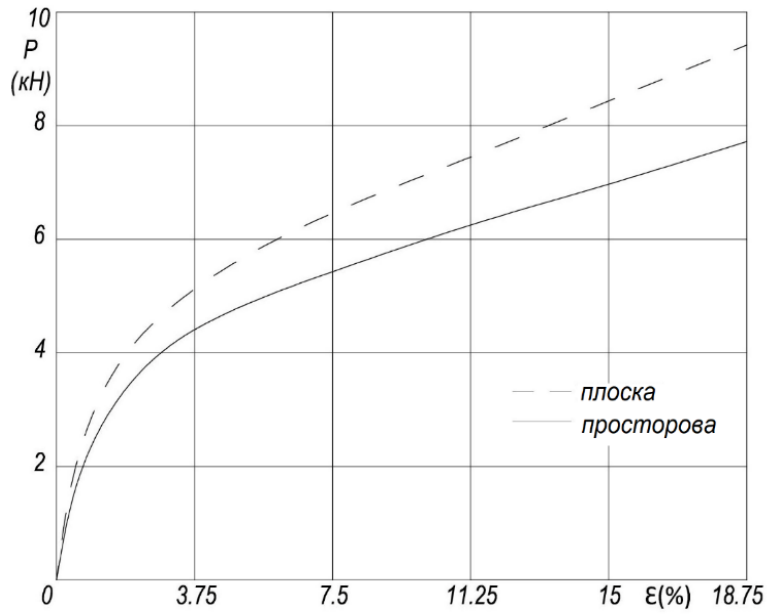


Рис. 7.46. Графіки залежності зусилля протягування від ступеня деформації по висоті.

Більше того, порівняльний аналіз показує, що на найвищому рівні деформації розв’язок МСЕ дає результат, який є більш ніж на 30% грубішим, ніж просторовий розрахунок.

7.6 Моделювання процесу деформування та визначення ресурсу хвостовика лопатки газової турбіни

Лопатки газових турбін працюють в умовах високих температур впродовж тривалого часу експлуатації. В цих умовах визначальним для несівної здатності є накопичення деформацій повзучості.

На рис. 7.47 представлено хвостовик лопатки як неоднорідне призматичне тіло, що зазнає термосилового навантаження. Нерівномірний розподіл цього навантаження моделює процес взаємодії між лопаткою та її хвостовиком. Зубці хвостовика розташовуються на відповідних вирізах обода диска, які піддаються деформаціям. В результаті, уздовж поверхонь спряження «хвостовик-диск» накладаються граничні умови у вигляді пружних опор (див. рис. 7.47).

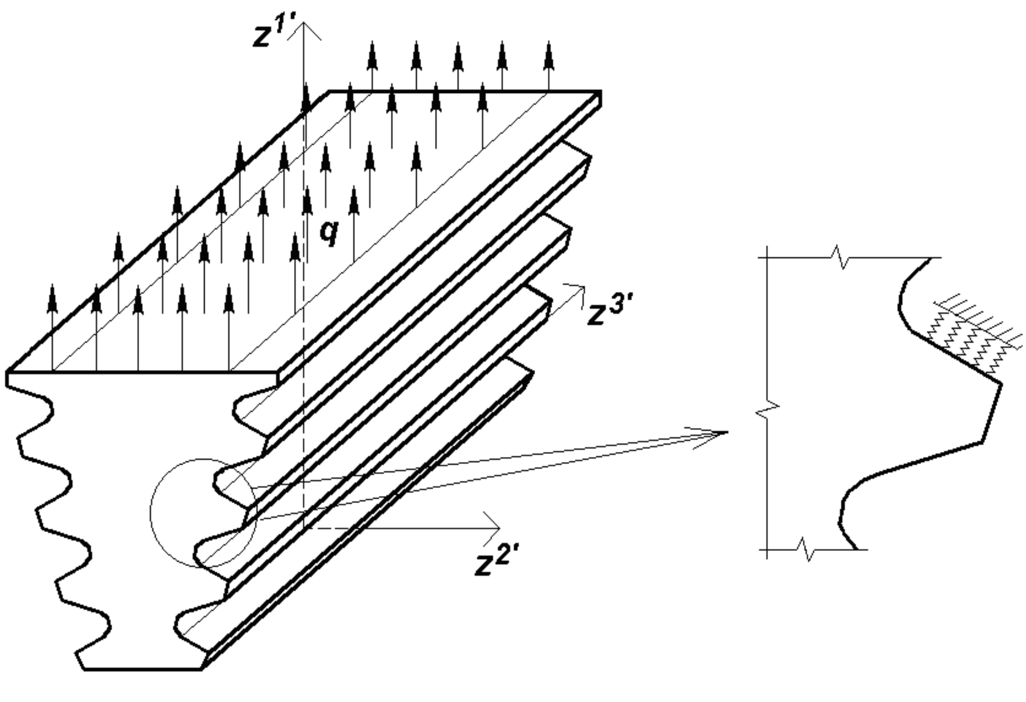


Рис. 7.47. Хвостовик лопатки газотурбінної установки

Розв'язання задачі про деформації хвостовика в даній постановці потребує інформації щодо жорсткісних характеристик зубців диска турбіни. Для точнішого моделювання умов опори доцільно замінити пружні опори еквівалентною моделлю, яка відтворює фрагмент обода диска турбіни як з погляду геометрії, так і умов експлуатації.

З метою дослідження впливу неоднорідного температурного поля на напружено-деформований стан та ресурс хвостовика, проведено аналіз середнього перерізу при плоскому деформуванні, що зазнавав розтягуючого навантаження q, рівномірно розподіленого вздовж осі $Z^{1'}$.

Величина q визначається відношенням еквівалентної відцентрової сили в кореневому перерізі лопаті до площі, по якій вона прикладена.

У розрахунках враховувалася лише половина площі поперечного перерізу з міркувань симетрії. Граничні умови були встановлені з обмежень симетрії і фіксовані по радіальному напрямку: $u^{1'}\left(z^{1'}=0\right)=0, u^{2'}\left(z^{2'}=0\right)=0, u^{2'}\left(z^{2'}=0.066R_0\right)=0$. Через складну конфігурацію конструкції, яка включає хвостовик та ділянку обода диска турбіни, доцільно розбити їх на фрагменти для побудови СЕМ, як показано на рис. 7.48.

Опис деформації матеріалу в умовах повзучості здійснено рівнянням:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt}=\frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r},\frac{d\omega}{dt}=C\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^m\frac{1}{(1-\omega)^q} \tag{7.1}$$

тут $q=q(\sigma,T), r=r(T), n=n(T), m=m(T), B=B(T),\ C=C(T)$ матеріальні константи, T - температуру, ω - параметр пошкоджуваності Качанова-Работнова, t - час, ε_c - інтенсивність деформації повзучості, а σ - інтенсивність нормальних напружень.

На першому етапі було розраховано хвостовик лопатки газової турбіни під дією силового навантаження з постійним розподілом температури в поперечному перерізі. В цьому випадку константи матеріалу відповідають середньому значенню температури $T_{0X} = 0.95T_0$ вздовж осі $Z^{1'}$ і є сталими по всьому об'єму хвостовика. Крім того, в цьому випадку відсутні температурні деформації.

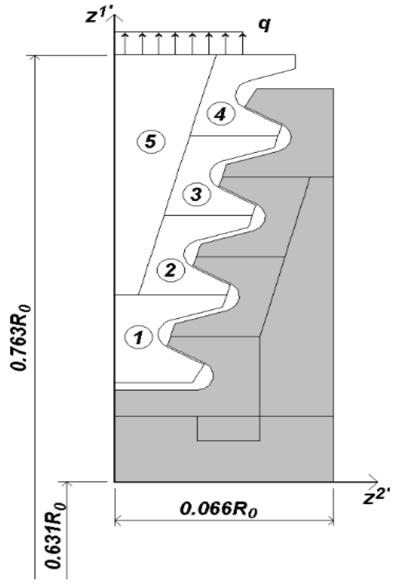


Рис. 7.48. Сегментація поперечного перерізу

Збіжність результатів моделювання пружного деформування залежно від різних невідомих МСЕ обговорювалася на прикладі порівняння розподілів інтенсивності безрозмірних напружень для сіток з кількістю невідомих 1074, 3344 та 9596, як показано на рис. 7.49. Отримані розподіли інтенсивності безрозмірних напружень $\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right)$ показано на рис. 7.50. Як бачимо, характер розподілу безрозмірної інтенсивності напружень однаковий для кожної з наведених вище сіток. Максимальні напруження виникають на галтелі хвостовика.

Для детальнішого аналізу побудуємо безрозмірний розподіл інтенсивності напружень уздовж кривих, які проходять через зони максимальних напружень у напрямку до підшипника, вільних поверхонь та галтелей зубців хвостовика (рис. 7.51). Як показують результати, отримані з кількістю невідомих 3344 та 9596, розбіжність між ними становить менше 1%, тоді як на сітці з 1074 невідомими максимальні напруження занижені майже на 10%.

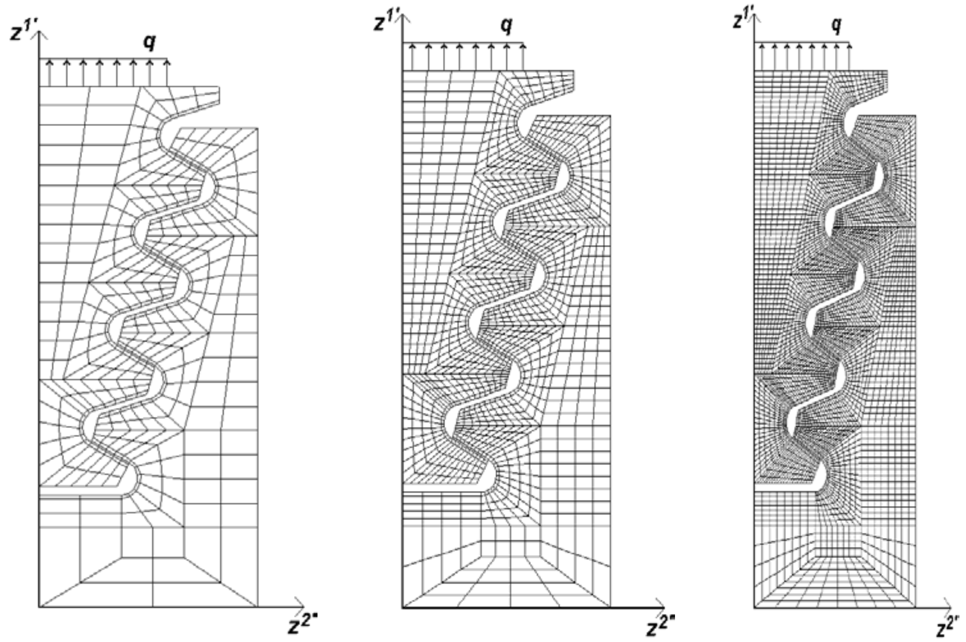
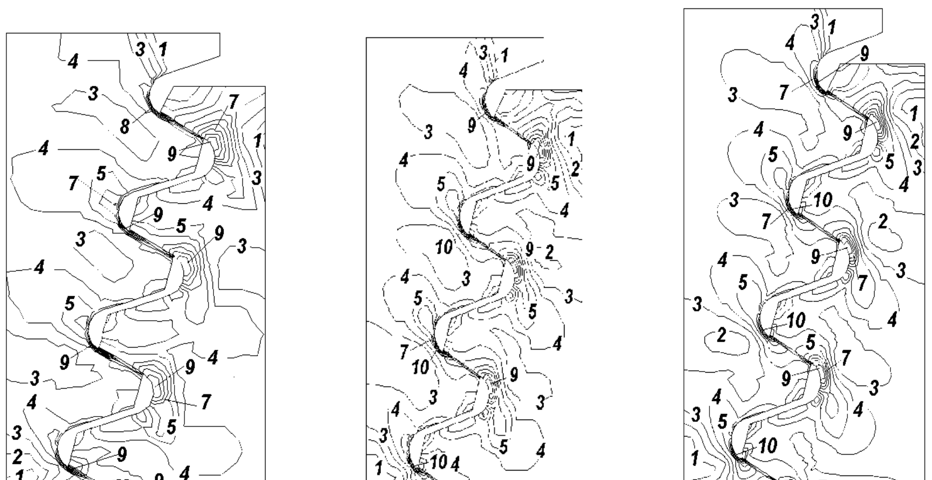
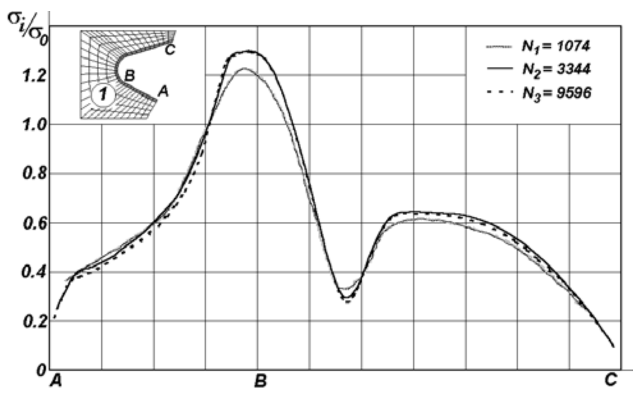


Рис. 7.49. Загальний вигляд розрахункової моделі з різною кількістю невідомих $N_1 = 1074$ $N_2 = 3344$ $N_3 = 9596$

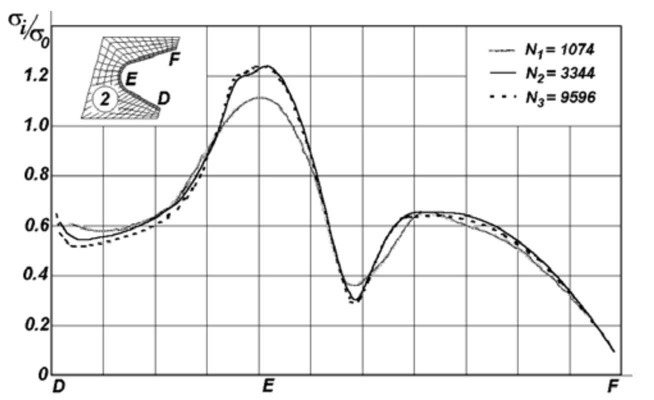


$N_1 = 1074$ $N_2 = 3344$ $N_3 = 9596$

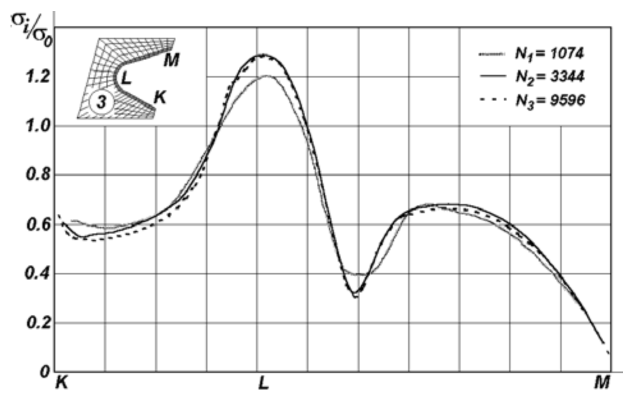
Рис. 7.50. Ізолінії безрозмірних напружень, отримані на різних дискретних моделях: : (1 - 0.12; 2 - 0.24; 3 - 0.36; 4 - 0.48; 5 - 0.60; 6 - 0.72; 7 - 0.84; 8 - 0.95; 9 - 1.07; 10 - 1.19)



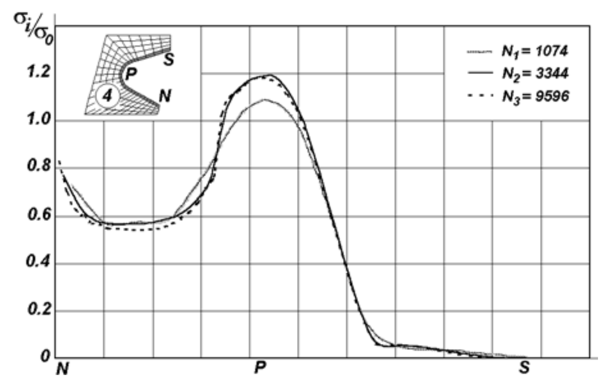
а)



б)



в)



г)

Рис. 7.51. Розподіл інтенсивності безрозмірних напружень на поверхнях галтелей і зубців за пружною деформацією: (а-г) сегменти галтелей

Крім того, досліджено збіжність результатів розрахунку ресурсу хвостовика лопаті при постійному розподілі температури в його поперечному перерізі залежно від кількості невідомих у МСЕ. Для цього порівнювався хід процесу накопичення пошкоджень у часі в точці *B* фрагмента *1* для кожної сітки, де оцінки параметра пошкодженості є найбільшими. Далі значення основного розрахункового ресурсу, отримане на сітці з невідомими 3344, було взято з $t_X^*(T_{0X})$. Це значення буде використано в подальшому для представлення та порівняння результатів, отриманих за інших умов навантаження. Отримані результати, наведені на рис. 7.52, підтверджують, що похибка у визначенні ресурсу при використанні сіток з невідомими 3344 і 9596 становить менше 5%, тоді як використання сітки з кількістю невідомих 1074 дає завищені значення ресурсу більш ніж на 20%.

Отже, аналіз похибок, отриманих для різних сіток, дозволяє зробити висновок, що забезпечення збіжності результатів як для пружної деформації, так і для повзучості досягається при застосуванні сітки з 3344 невідомими.

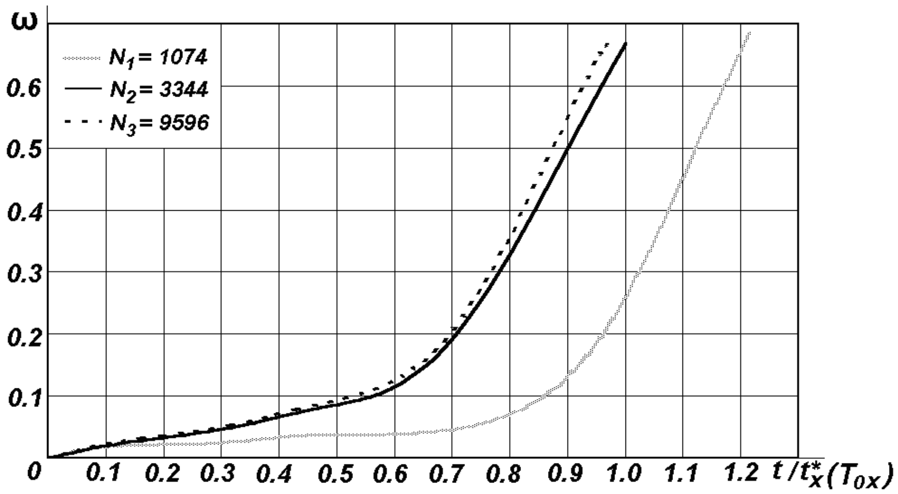


Рис. 7.52. Процес накопичення пошкоджень у часі в точці *B* фрагмента *1*

Отже, було проведено більш детальний аналіз результатів, отриманих при постійній температурі на сітці з невідомими 3344. На рис. 7.53 показано залежність зміни параметра пошкоджуваності від часу для характерних точок усіх чотирьох галтелей хвостовика лопатки. Як видно, максимальні оцінки пошкоджень мають місце в точці *B*, яка розташована на зрізі сегмента 1. Крім того, на рис. 7.54 показано зміну інтенсивності безрозмірних напружень з часом у характерних точках хвостовика. Аналізуючи результати, можна зробити висновок, що при постійній температурі максимальні значення пошкоджень у хвостовику виникають у тій самій точці, де в початковий момент виникають максимальні значення напружень.

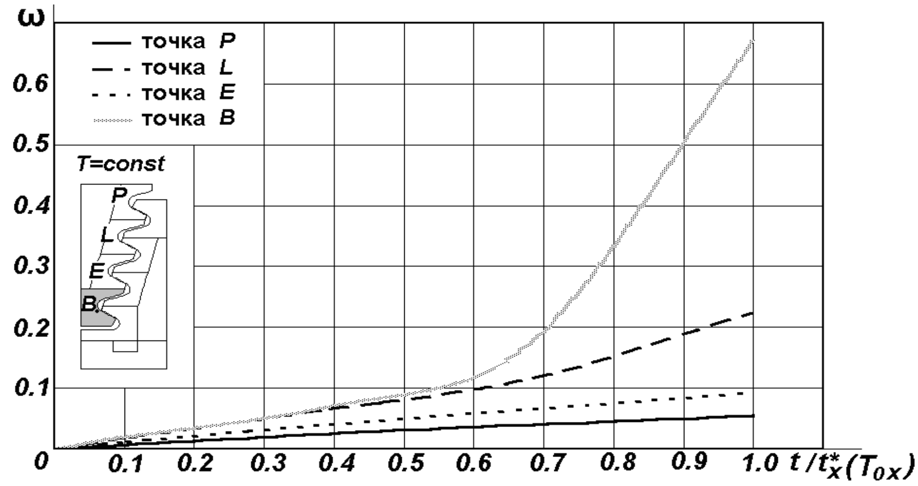


Рис. 7.53. Залежність зміни параметра пошкоджуваності

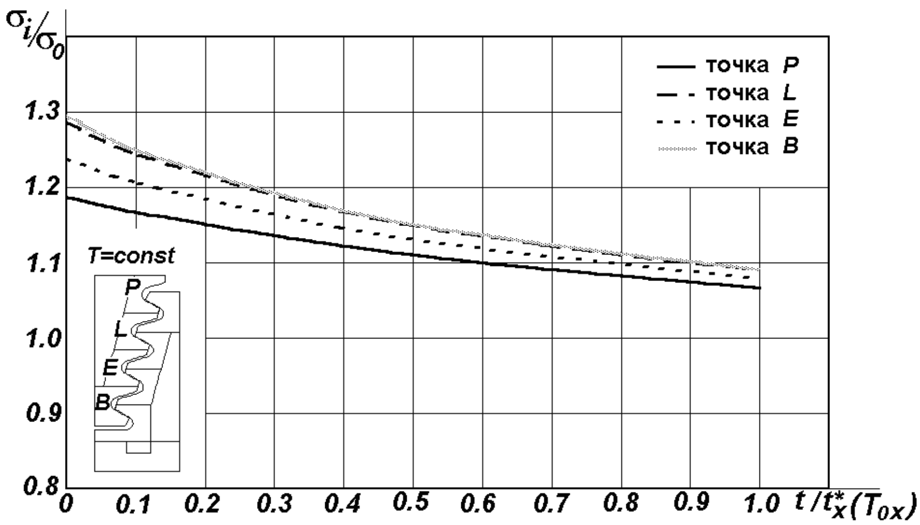


Рис. 7.54. Зміна інтенсивності безрозмірних напружень

На другому етапі дослідження аналізується вплив неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану та прогнозований термін експлуатації хвостовика лопатки. Температурний розподіл по висоті поперечного перерізу хвостовика має плоску форму, з максимальними та мінімальними значеннями, що відхиляються на ±0,5% від температури, виміряної в точці поперечного перерізу, розташованій на відстані 0,713 від осі обертання диска R_0 диска.

Розрахунок напружено-деформованого стану хвостовика лопатки газової турбіни показав, що нерівномірний розподіл температури має незначний вплив на загальну картину напружено-деформованого стану. З рис. 7.50 та 7.51 видно, що якісні характеристики розподілу напружень як уздовж галтелей, так і в перерізі залишаються незмінними. Оскільки абсолютні значення температур суттєво перевищують варіації по об'єму хвостовика, чисельні відхилення у значеннях напружень залишаються в межах 1-2%.

Оскільки константи, що входять в рівняння повзучості, залежать від температури, нерівномірний розподіл температури по перерізу хвостовика призводить до зміни процесу повзучості, тим самим впливаючи на термін служби. Для заданого розподілу температури значення розрахункового базового терміну служби становить $t_X^*(T) = 0.91 t_X^*(T_{0X})$.

Завдяки цим змінам констант рівнянь повзучості спостерігається якісна зміна картини процесу повзучості. Графік залежності зміни параметра пошкоджуваності від часу (рис. 7.55) показує, що врахування нерівномірності розподілу температури в хвостовику призводить до зміни положення точки, в якій виникають максимальні значення пошкоджуваності, порівняно з випадком постійної температури: максимальні значення напружень на початковому етапі виникають в точці B, яка розташована на зрізі фрагмента 1, як показано на рис. 7.56, а внаслідок більш інтенсивного перерозподілу напружень максимальні значення пошкоджуваності виникають в точці L фрагмента 3 (див. рис. 7.55).

На рис.7.57 наведені результати визначення ресурсу хвостовика із використанням просторової постановки задачі, коли він навантажений нерівномірно розподіленим навантаженням $q\left(z^{3'} \right)$. Очевидно, що максимальне відхилення значення навантаження q становить 5 %. Отримані результати показали, що якісний перебіг процесу повзучості в перерізах хвостовика, де прикладені максимальні значення навантаження, не відрізняється від випадку розрахунку при плоскому деформуванні. Кількісні відмінності в перебігу процесу накопичення пошкоджуваності в точці її максимального значення ілюструє залежність зміни параметра хвостовика від навантаження, яка представлена на рис. 7.57 залежністю зміни параметра пошкоджуваності з часом. В цьому випадку значення основного розрахункового ресурсу хвостовика становить $t_X^*(T) = 0.73 t_X^*(T_{0X})$.

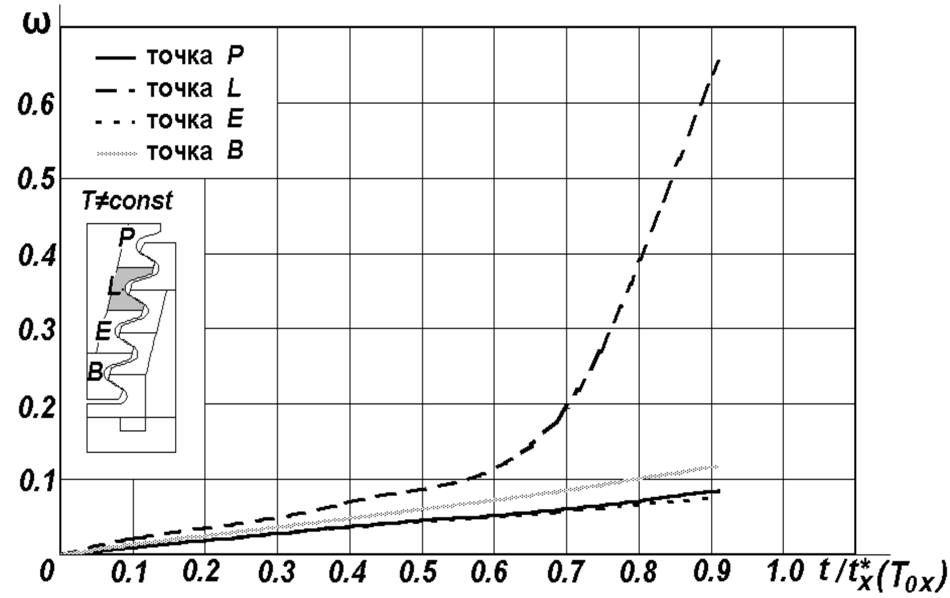


Рис. 7.55. Графік залежності зміни параметра пошкоджуваності, що враховує нерівномірності розподілу температури

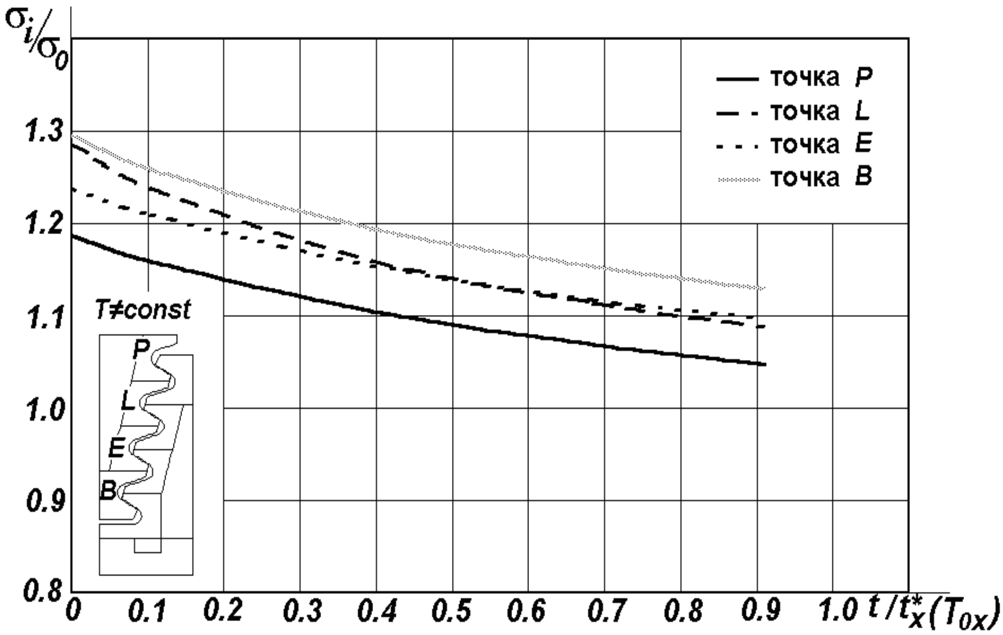


Рис. 7.56. Зміна інтенсивності безрозмірних напружень, що враховує нерівномірності розподілу температури

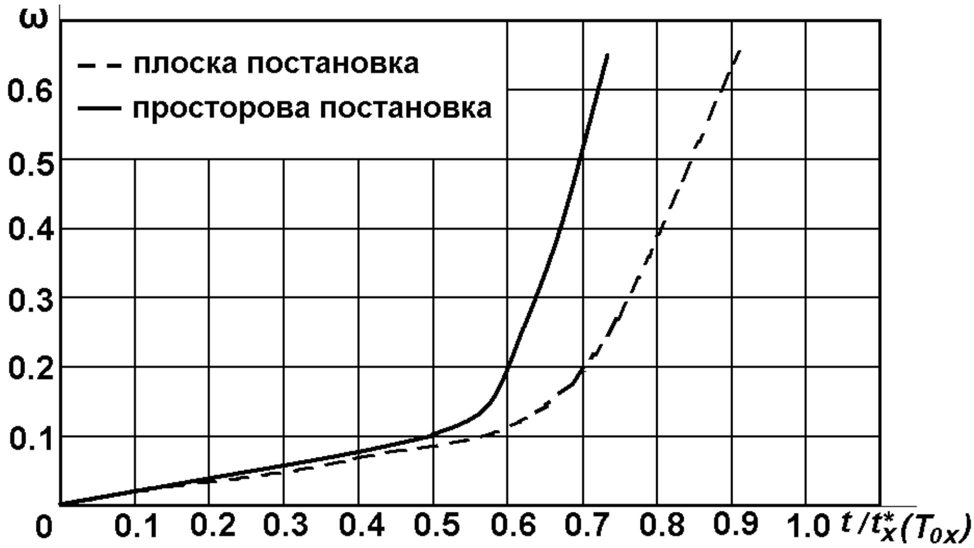


Рис. 7.57. Кількісні відмінності в перебігу процесу накопичення пошкоджень

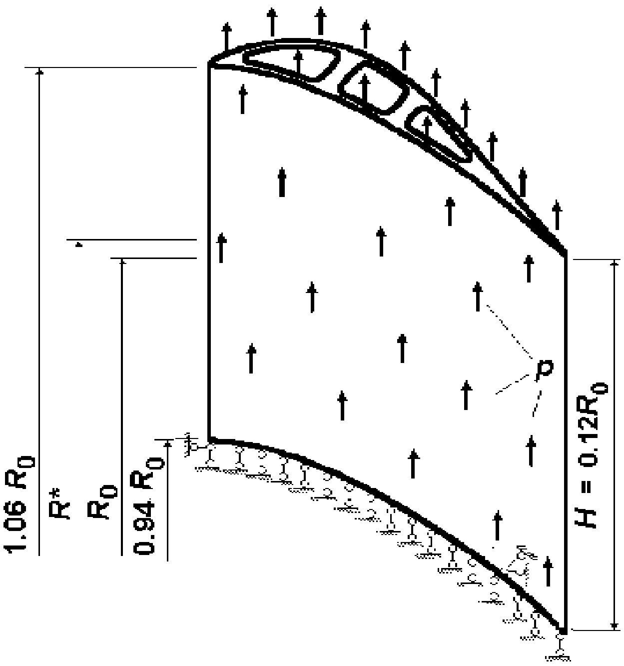
Отже, було змодельовано напружено-деформований стан, процес накопичення деформації повзучості та поширення зони континуального руйнування, а також визначено основний ресурс хвостовика лопатки стаціонарної газотурбінної установки за умов тривалого силового навантаження. Результати свідчать, що додатковий ресурс становить близько 30% від основного. Врахування нерівномірності температурного розподілу в рівняннях, що описують механічні та фізичні властивості матеріалу під час повзучості, уточнює оцінку основного ресурсу на 9%. Додатково, врахування просторового характеру зовнішнього навантаження коригує термін служби приблизно на 20%.

7.7 Моделювання процесу деформування та визначення терміну служби лопатки газової турбіни

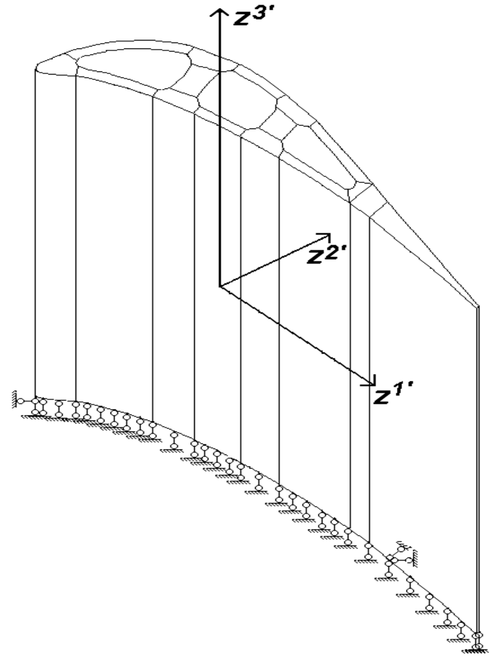
Перо лопатка має складну просторову форму, причому її розміри значно перевищують розміри поперечного перерізу. Вона зазнає відцентрового навантаження в умовах температурного поля, що варіюється як по висоті, так і в поперечному перерізі.

Розв'язання задачі щодо повзучості лопатки, як правило, супроводжується значними обчислювальними витратами. Результати дослідження просторового напружено-деформованого стану лопатки, отримані з використанням тривимірного методу скінченних елементів (МСЕ) та припущення про пружне деформування, показали суттєву неоднорідність напружено-деформованого стану як у поперечних перерізах, так і по висоті. На основі цих результатів було обрано критичний переріз лопатки R_0, де середнє напруження σ_0 поєднується з середньою температурою T_0 і призводить до найінтенсивнішого накопичення деформацій повзучості. Оскільки можливість фрагментації лопатки розглядалася в роботах [48-54], для проведення чисельного моделювання деформування в умовах повзучості розглядається фрагмент лопатки в околі небезпечного перерізу R*, $0{,}94\ R_0 < R < 1{,}06\ R_0$, як показано на рис. 7.58 (а), в межах якого спостерігається найбільш нерівномірний розподіл напружень і, відповідно, очікується найбільш суттєвий перерозподіл в умовах повзучості. Вплив верхньої складової лопатки моделюється за допомогою нерівномірно розподіленого навантаження *q на* область $R = 1{,}06\ R_0$, що відповідає діючим напруженням в цій області (більш детально див. [48-54].

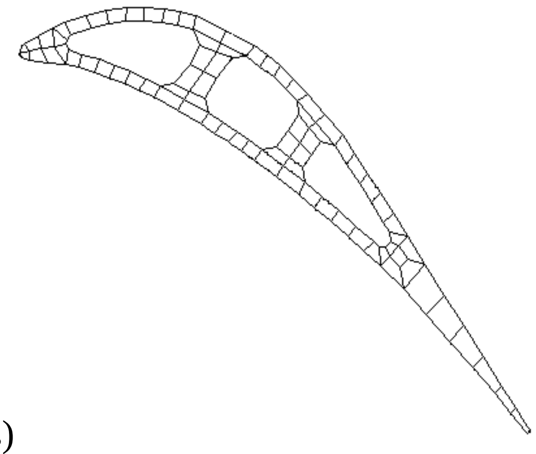
Додатково сегмент навантажений відцентровим навантаженням *p*, розподіленим по об'єму. Фрагмент лопатки, що розглядається, можна віднести до неоднорідних призматичних тіл. Фрагментована структура дискретної моделі НМСЕ формується за допомогою призматичних СЕ, які є неоднорідними, як показано на рис. 7.58 (б). Поперечний переріз МСЕ лопатки показано на рис. 7.58(в). Як відомо, лопатка знаходиться в неоднорідному температурному полі. Зовнішнє температурне поле в межах розглянутого фрагмента лопатки показано на рис. 7.59.



а)



б)



в)

Рис. 7.58. (а) Фрагмент лопатки поблизу критичного перерізу R^* (б) дискретні моделі МСЕ на основі неоднорідних призматичних СЕ (в) Поперечний переріз МСЕ лопатки

Складність визначення розподілу напружено-деформованого стану та ресурсу до початку руйнування лопатки під дією силового навантаження розглянуто в роботах [48-54], що дозволило визначити значення основного розрахункового ресурсу t^* (до досягнення параемтром пошкодженості критичного значення і утворення початкової зони руйнування). Ці результати були отримані без урахування температурних деформацій. Крім того, дискретна модель лопатки містить неортогональні СЕ. Враховуючи результати, наведені в роботах [8], які свідчать про суттєвий вплив навіть незначних відхилень у значеннях параметрів розподілу напружено-деформованого стану на величину розрахункового ресурсу, становить інтерес дослідження впливу врахування температурних деформацій у площині поперечних перерізів СЕ на величину розрахункового ресурсу лопатки.

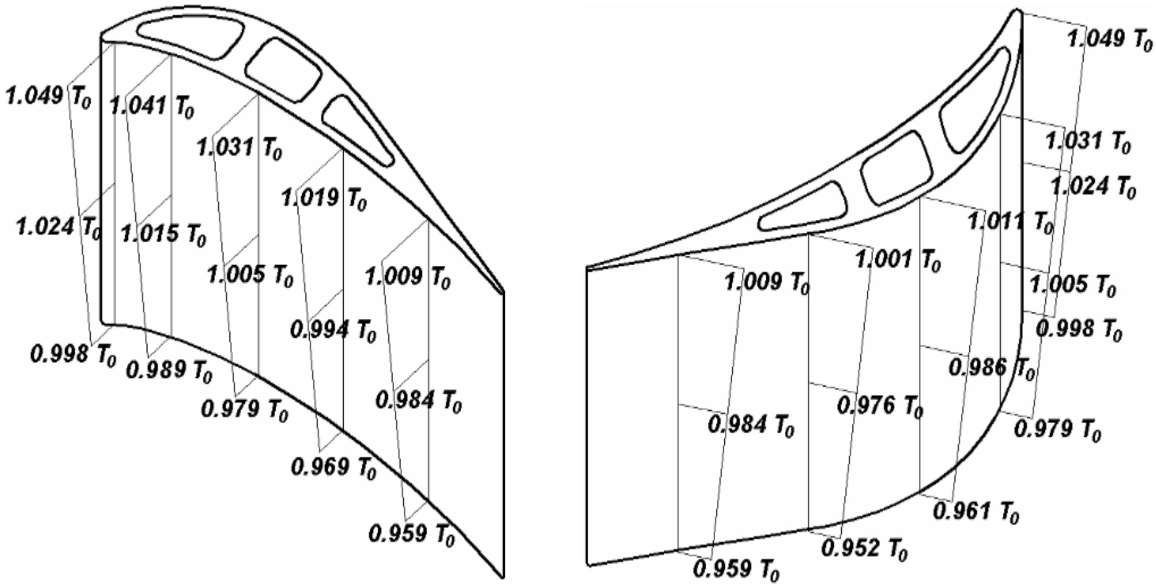


Рис. 7.59. Зовнішнє температурне поле в межах розглянутого фрагмента лопатки

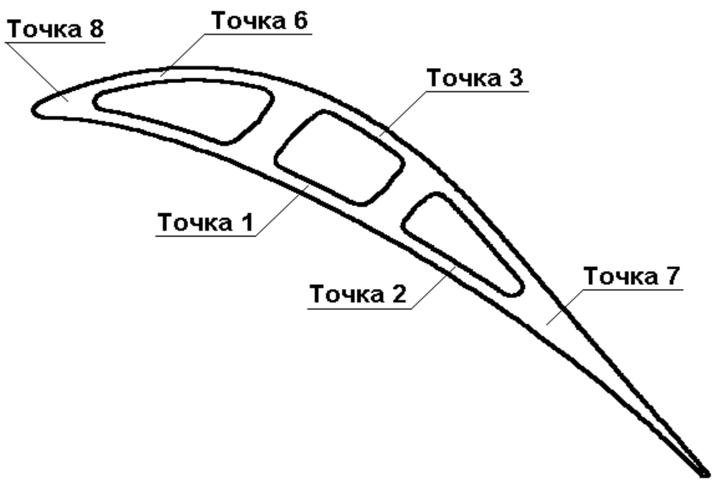


Рис. 7.60. Характерні точки площі поперечного перерізу лопатки при $R=R^*$

На початковому етапі розв'язання задачі порівнюємо значення напружень, отримані при пружному деформуванні лопатки за методикою [48-54] та з використанням неоднорідного СЕ зі змінними частинами метричного тензора (див.

табл. 7.10). Обрані для аналізу характерні точки поперечного перерізу лопатки при R=R* показано на рис. 7.60.

Таблиця 7.10.

Неоднорідні СЕ зі змінними компонентами метричного тензора

Метод розрахунку g_{ij}	Значення безрозмірної інтенсивності напружень $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$ під дією силового навантаження					
	точка 1	точка 2	точка 3	точка 6	точка 7	точка т 8
g_{ij}=const [108]	1.4177	1.3476	1.2705	0.8570	1.1535	0.7630
$g_{ij} = g_{ij}(x)^{\alpha}$	1.4196	1.3519	1.2713	0.8571	1.1543	0.7771

Максимальна різниця між значеннями напружень, отриманими при пружному деформуванні лопатки з урахуванням варіації компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу, та значеннями, наведеними в роботах [28; 13], становить близько 2% у точці t. З накопиченням деформацій повзучості значення параметра пошкоджуваності в цій точці стає несуттєвим. Водночас у точці 1 починає формуватися початкова зона суцільного руйнування – момент, який визначає основний ресурс лопатки. Розбіжність у цій точці є значно меншою – приблизно 0,2%. Подальший аналіз задачі повзучості та оцінки розрахункового ресурсу показав, що навіть незначне зростання інтенсивності напружень спричиняє зменшення основного розрахункового ресурсу. Основний розрахунковий термін служби лопатки знизився на 7%. Це переглянуте значення терміну служби позначено як t_p^* буде використовуватися в подальшому аналізі та для представлення отриманих результатів.

З рисунка 7.61 видно, що аналіз збіжності результатів для визначення основного ресурсу, виконаний на основі кількості гармонік у розкладі переміщень, продемонстрував подібну поведінку збіжності, як і в попередніх дослідженнях [48-54].

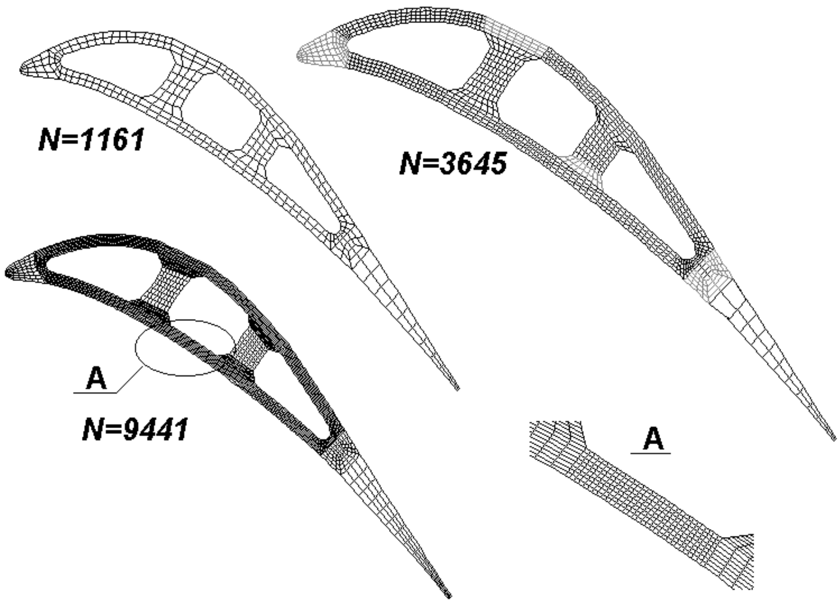
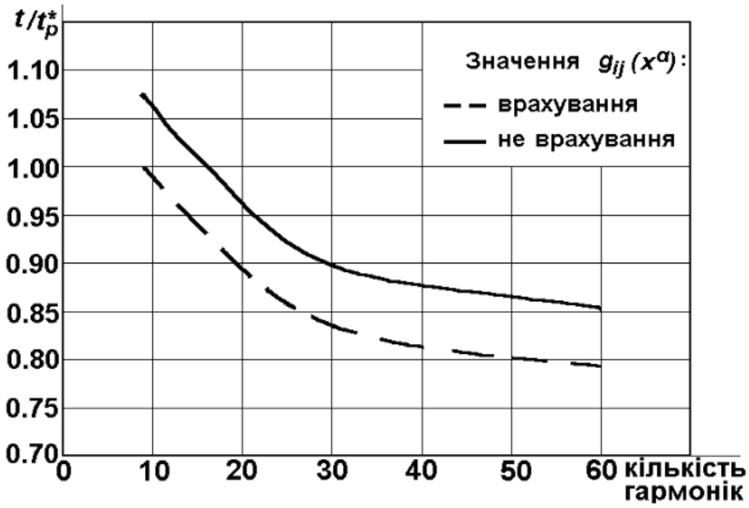


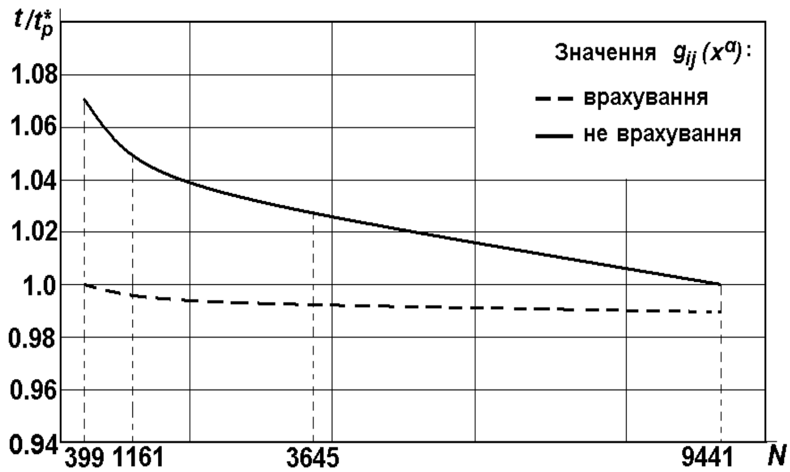
Рис. 7.61. СЕ-моделі, отримані за допомогою чотирьох та восьмикратного розбиття

Дослідження збіжності значень ресурсу лопатки з урахуванням варіації компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу лопатки перед руйнуванням проводилося шляхом уточнення сітки методу скінченних елементів у цій площині з постійним числом поліномів $L=9$. Проаналізовано моделі МСЕ (рис. 7.61), отримані шляхом подвоєння (з 1 161 невідомим у поперечному перерізі), потроєння (з 3 645 невідомими) та почетверення (з 9 441 невідомим) товщини сітки, представленої на рисунку 7.58 (в).

З графіка на рис. 7.62 (б) легко помітити, що похибка у значеннях ресурсу на одних і тих же МСЕ при порівнянні результатів розрахунків, отриманих із застосуванням розв’язувальних співвідношень, які не враховують варіацію компонент метричного тензора під площиною поперечного перерізу елемента конструкції [48-54] з результатами, отриманими із застосуванням методів розв'язання, які враховують змінність компонент метричного тензора, поступово покращується в міру уточнення сітки. Наприклад, для сітки, що містить 399 невідомих у поперечному перерізі, похибка становить приблизно 7%, тоді як для сітки з 9441 невідомими похибка зменшується до менш ніж 1%.



а)



б)

Рис. 7.62. Похибка у значеннях розрахункового ресурсу

На підставі отриманих результатів можна зробити висновок, що застосування методів розв’язання, які враховують змінність компонент метричного тензора, забезпечує точніші результати навіть на сітці з меншою кількістю невідомих. Тому для подальших розрахунків будемо використовувати МСЕ, представлену на рис. 7.58 (в).

Далі порівнюються значення накопичених пошкодженості матеріалу ω в об’ємі (1) поперечного перерізу $R^* = 1.01R_0$ де формування початкової зони руйнування відбувається в об’ємі (1) по висоті лопатки в різні моменти часу, отриманих в роботах [48-54] та в цій роботі на основі рівнянь, що враховують змінення компонент метричного тензора. На рис. 7.63 і 7.64 це явище ілюструється відповідними графіками.

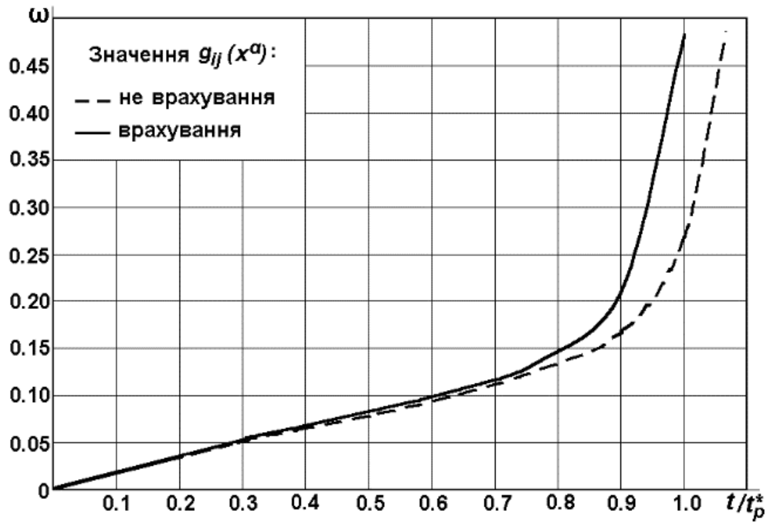


Рис. 7.63. Порівняння значень накопиченої пошкодженості ω

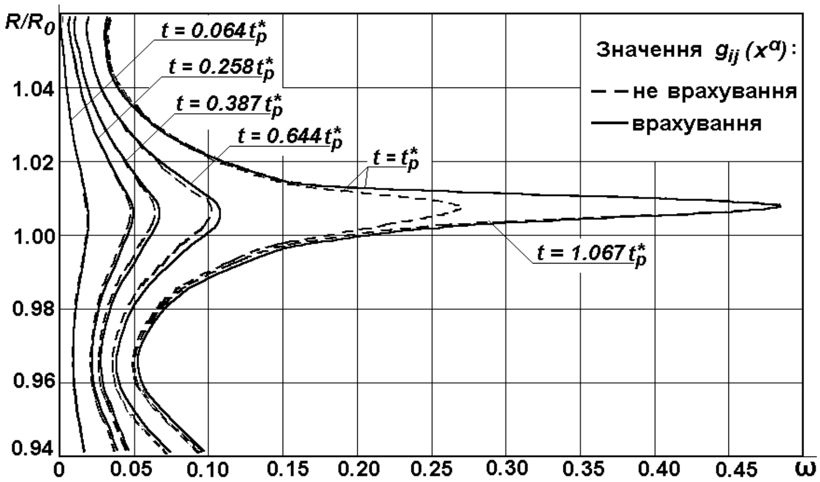


Рис. 7.64. Порівняння значень накопиченої пошкоджуваності ω перерізу $R^* = 1.01R_0$

На наступних рис. 7.65 та 7.66 наведено порівняння розподілу значень інтенсивності безрозмірних напружень $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$ в об’ємі (1) поперечного перерізу $R^* = 1.01R_0$ та в об’ємі (1) по висоті лопатки в різні моменти часу, як в даній роботі, так і в роботах [48-54].

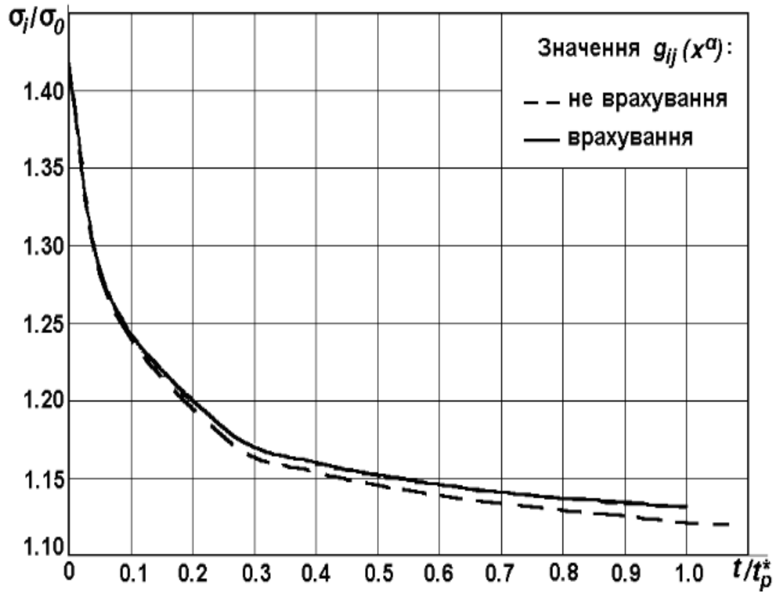


Рис. 7.65. Порівняння розподілу значень інтенсивності безрозмірних напружень $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$

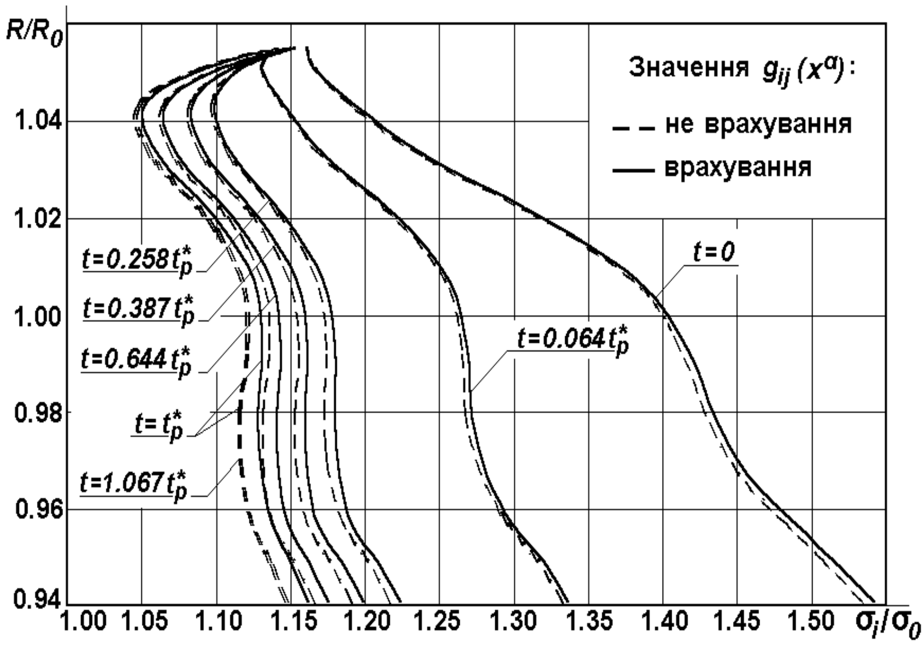


Рис. 7.66. Порівняння розподілу значень інтенсивності безрозмірних напружень $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$

З графіків у початкові моменти часу на рис. 7.64 легко помітити, що розподіл пошкоджень і значення безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 7.66), отримані в [48-54] і в цьому дослідженні, приблизно ідентичні. З плином часу і накопиченням деформацій повзучості та пошкоджуваності похибка у визначенні напружень зростає до 2%, що призводить до приблизно 7% похибки в параметрі пошкоджуваності, яка аналогічно відображається на розрахунковому значенні ресурсу. Зростання різниці у значеннях накопиченої пошкоджуваності та інтенсивності напружень також ілюструють графіки їх залежності від часу (рис. 7.63, 7.65).

В процесі розв'язання задачі було проаналізовано ефективність представленого алгоритму шляхом розв'язання нелінійних задач з екстраполяцією переміщень (див. табл. 7.9). Застосування даного алгоритму дозволяє зменшити обчислювальні витрати при визначенні розрахункового ресурсу лопатки газової турбіни в порівнянні з алгоритмом, що не враховує екстраполяцію переміщень, більш ніж в 3 рази (див. рис. 7.67), забезпечуючи при цьому достатньо високу точність розрахунків, що підтверджується ідентичністю процесу накопичення пошкоджень в об'ємі 1 радіуса $R^* = 1.01R_0$ протягом усього процесу деформування (рис. 7.68).

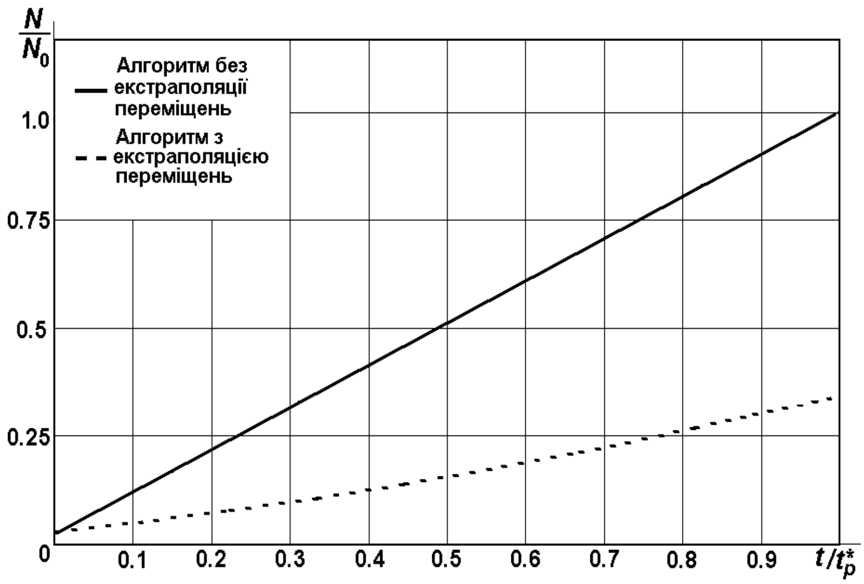


Рис. 7.67. Розрахунковий термін служби лопатки газової турбіни

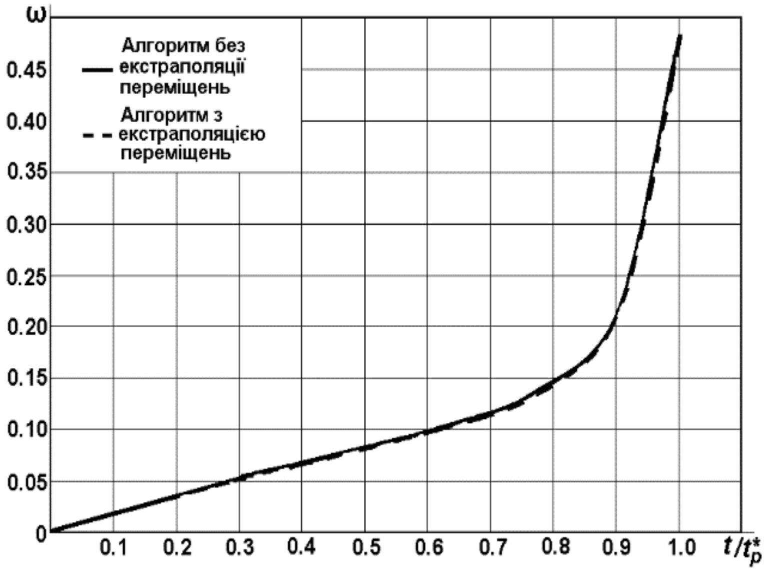


Рис. 7.68. Процес накопичення пошкоджень в об'ємі 1 радіуса $R^* = 1.01R_0$

Зауважимо, що всі розрахунки проводилися за однакових початкових умов і кроку за часом.

На другому етапі розв'язання цієї задачі було досліджено вплив неоднорідної температурної області (див. рис. 7.59) на формування параметрів розподілу напружено-деформованого стану та розрахунковий ресурс лопатки. Розглянуто зміну компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу та застосовано алгоритм пошуку розв'язку системи рівнянь з використанням екстраполяції переміщень.

Розподіл температури в лопатці визначався шляхом розв'язання просторової задачі стаціонарної теплопровідності. Ці результати показані на рис. 7.69 у вигляді температурних ізоліній в характерних перерізах лопатки. Значення температури подано через середню температуру $T(R^*)=T_0$ в перерізі при $R=R^*$. У свою чергу зміна температури по висоті лопаті пояснюється плоским законом, з максимальними і мінімальними значеннями в діапазоні ±2,5% від $T(R^*)$.

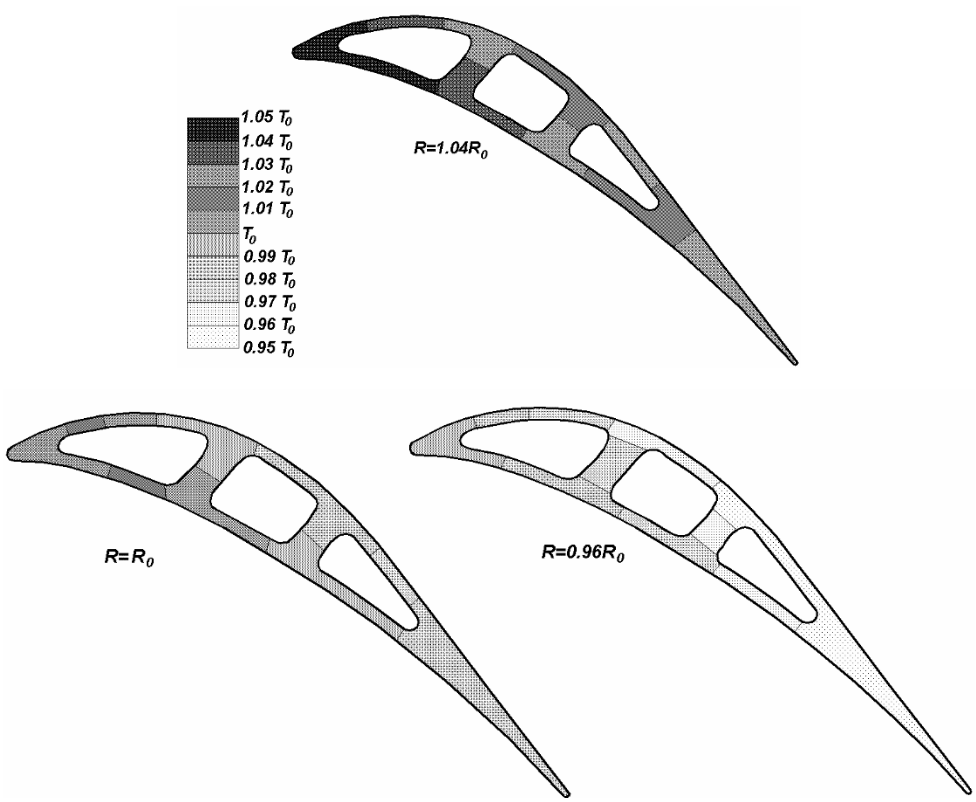


Рис. 7.69. Розподіл температури по перерізу на відстані R^*

Далі здійснюється порівняння результатів розрахунків у припущенні пружного деформування під дією силового та термосилового навантажень (з урахуванням температурних деформацій) для кількох характерних точок поперечного перерізу лопатки R=R*. Максимальна різниця у значеннях безрозмірної інтенсивності напружень становить близько 10% і спостерігається в точці, де пошкодження не є суттєвими при деформуванні в умовах повзучості. У точці 1, де починається формування початкової зони суцільного руйнування, ця різниця становить лише близько 2,5%.

Таким чином, результати розв'язання задачі повзучості та визначення розрахункової довговічності показали, що навіть незначне зменшення інтенсивності напружень призводить до збільшення розрахункової довговічності лопатки приблизно на 9%. Таким чином, уточнене значення розрахункового ресурсу, отримане з урахуванням температурного навантаження, становить $t^*(T) = 1.089t_p^*$.

Таблиця 7.11.

Значення безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0

Вид навантаження	Значення безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0 в під дією силового та температурного навантаження					
	точка 1	точка 2	точка 3	точка 6	точка 7	точка 8
Силове	1,4196	1,3519	1,2713	0,8571	1,1543	0,7771
Силове та температурне	1,3835	1,3087	1,2071	0,8264	1,1350	0,7047

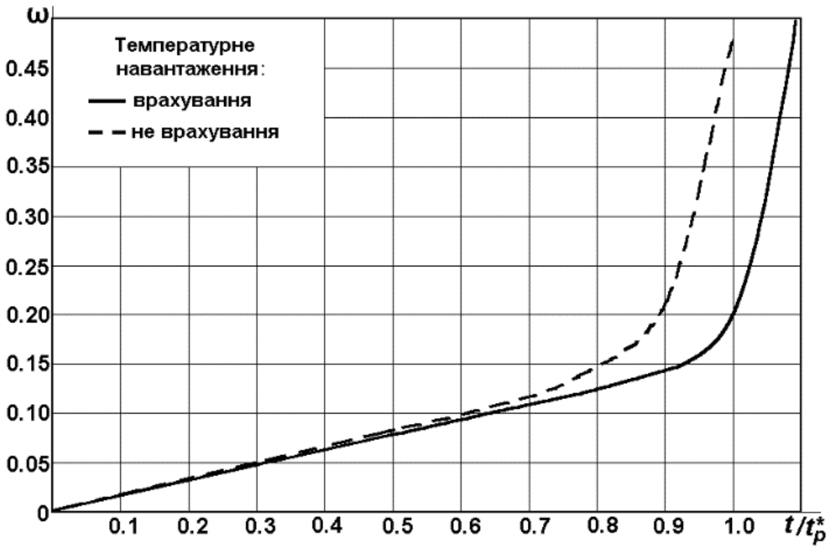


Рис. 7.70. Порівняння накопичення збитків ω на ділянці (1) від $R^* = 1.01R_0$

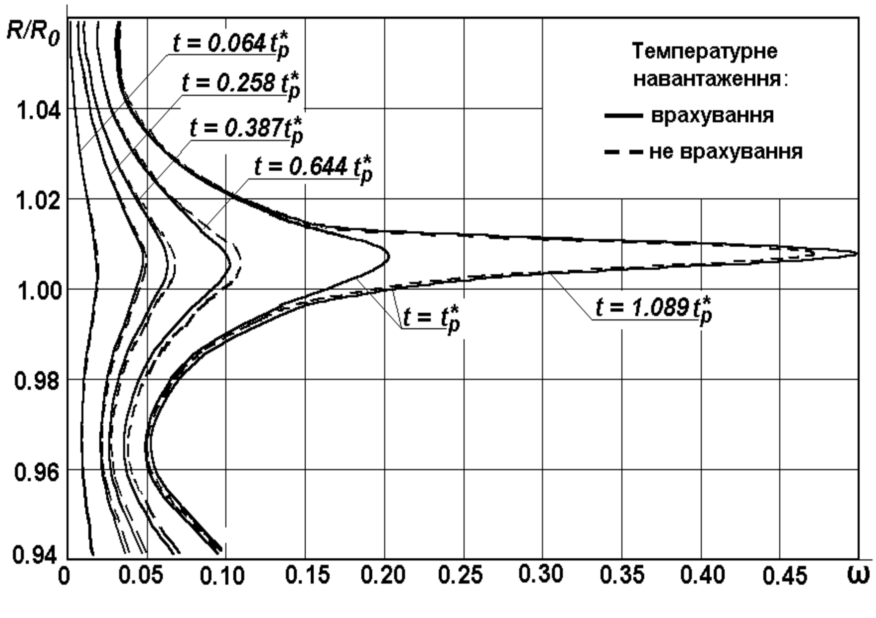


Рис. 7.71. Накопичення пошкоджень ω в перерізі (1) по висоті лопатки

На рис. 7.70 та 7.71 наведено порівняння накопичення пошкодженості ω в перерізі (1) від $R^* = 1.01R_0$ і в перерізі (1) по висоті лопатки в різні моменти часу, які отримані відповідно при силовому і тепловому навантаженнях, і проілюстровані відповідними графіками.

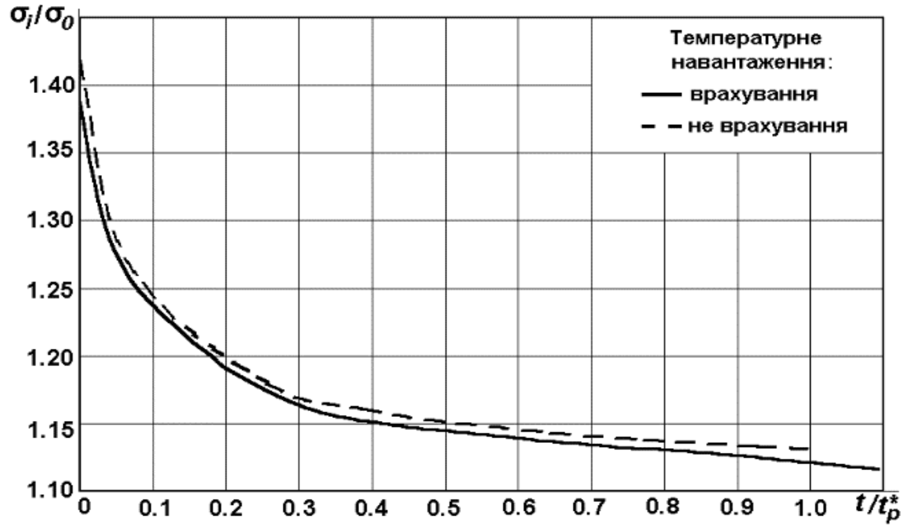


Рис.7.72. Порівняння розподілу значень безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0

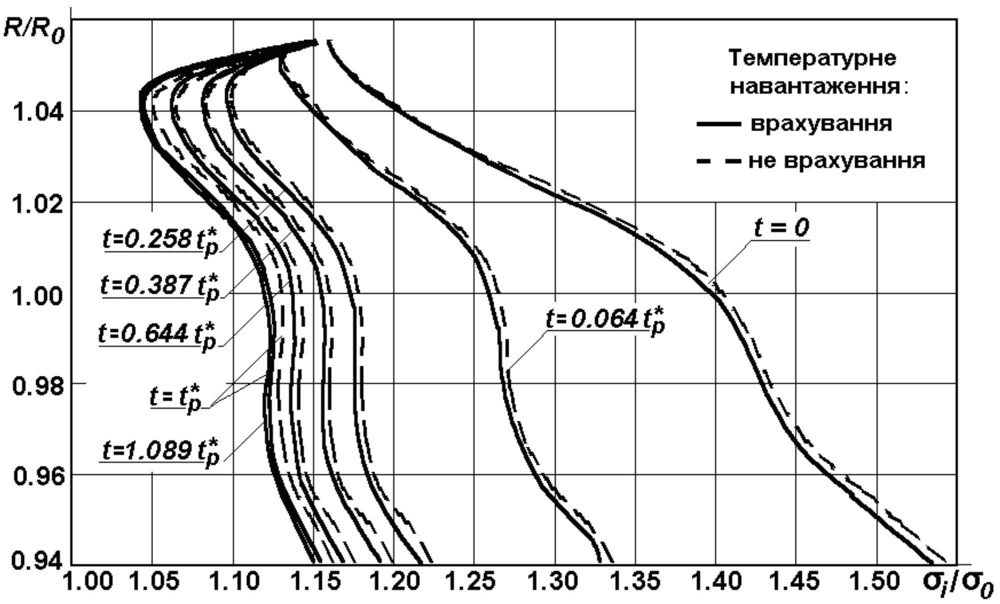


Рис. 7.73. Порівняння розподілу значень інтенсивності безрозмірних напружень по висоті лопатки

У початковий момент часу абсолютна різниця у значеннях параметрів пошкоджуваності мінімальна. Але з часом, коли настає стаціонарна повзучість, різниця в значеннях параметрів пошкодженості досягає 9% і продовжує зростати, що впливає на розрахунковий термін служби. Дані, зображені на рис. 7.72 та 7.73. дають змогу детально порівняти розподіл значень безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0 в об'ємі (1) радіуса $R^* = 1.01R_0$ і в об'ємі (1) в різні моменти часу, отриманих при силовому і тепловому навантаженнях.

Отже, абсолютна різниця в значеннях напружень майже не змінюється з часом, тобто менші значення напружень за наявності температурних навантажень призводять до збільшення базового розрахункового терміну служби.

Висновки до розділу 7

В даному розділі проведено розвязання широкого кола задач про визначення напружено-деформованого стану елементів конструкцій в процесах екплуатаційного навантаження. Проведені дослідження продемонстрували широкі можливості розробленого підходу при розв'язання в просторовій постановці нових, практично важливих задач пружного та пружно-пластичного деформування призматичних тіл складної форми..

Для окремих обєктів основні результати полчягають у настпуному:

Виконаний розрахунок Т-подібного хвостовика лопатки ротора парової турбіни та виявлений суттєвий вплив на рівень максимальних напружень умов його взаємодії з ободом диска та на основі аналізу розвитку пластичних деформацій уточнено в порівнянні з пружним розрахунком положення найбільш навантаженої ділянки демпфуючого пристрою. Також досліджено напружено-деформований стан деталі кріплення поворотного пристрою та показано, що її розрахунок необхідно проводити в тривимірній постановці.

Порівняння параметрів напружено-деформованого стану заготовки під час протягування, розрахованих за просторовою та плоскою моделями, дозволяє дійти висновку, що дослідження слід проводити із застосуванням просторового підходу для підвищення точності результатів.

При розрахунку фланця показано, що зільшення його товщини сприяє значному зниженню інтенсивності пластичної деформації у критичних зонах конструкції, що підвищує її міцність і стійкість під навантаженням, а також подовжує термін служби компонентів завдяки локалізації пластичності. Максимальні напруження концентруються у зонах жорсткого закріплення фланця, і потовщення фланця знижує рівень дотичних напружень та нормальних деформацій. Це сприяє зменшенню ризику пластичних деформацій і запобігає критичним перевантаженням у цих зонах.

Пружно-пластичні розрахунки дозволяють виявити зони з найбільшими пластичними деформаціями, що є важливим для точного прогнозування місць можливого руйнування конструкції під дією навантажень.

На високому ступені деформації тривимірний підхід надає точніші дані для прогнозування необхідної сили протягування. Такий підхід підвищує ефективність виробничих процесів і якість кінцевого продукту, дозволяючи оптимізувати процеси протягування.

Також, у цьому розділі увагу було приділено визначенню напружено-деформованого стану та оцінці основного ресурсу лопатки газової турбіни за умов тривалого силового навантаження та неоднорідного температурного поля. Використання неоднорідного призматичного МСЕ, який враховує змінність компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу, дозволило значно зменшити обчислювальні витрати завдяки моделям із меншою кількістю невідомих.

Напіваналітичний метод МСЕ показав, що врахування нерівномірного розподілу температури по висоті лопатки уточнює базовий термін служби більш ніж на 8,9%, демонструючи майже лінійну залежність від температури. Отримані результати підтверджують коректність застосованих методів для розв’язання задач термов’язкопружності, що включають пошкодження матеріалу за складних умов навантаження.

Для обґрунтування достовірності результатів розрахунку розглядуваних елементів приведене послідовне збільшення числа СЕ в поперечному перерізі та кількості утримуваних членів розкладу по довжині тіла, а також підвищення точності розв’язання систем рівнянь. Крім того приведена оцінка задоволення природних граничних умов на поверхні тіла та умов рівноваги в інтегральному сенсі за характерними перерізами всередині області, яка показала їхнє досить хороше виконання. Отримані нові дані про закономірності поведінки відповідальних конструкцій в процесі навантаження, обумовлені врахуванням їхніх фізичних та геометричних параметрів

ВИСНОВКИ

1. Використання НМСЕ з розкладом у ряди Фур’є дозволяє значно зменшити обчислювальні витрати при розрахунках для криволінійних неоднорідних призматичних тіл, забезпечуючи високу точність і збіжність результатів. Це підтверджує доцільність його застосування для аналізу складних об’єктів із варіативними геометричними та фізичними характеристиками.

2. Розроблені алгоритмічні підходи для розв’язання нелінійних геометричних задач демонструють підвищену ефективність і скорочують кількість ітерацій. Метод блочних ітерацій (ВІМ) у поєднанні з екстраполяцією вектора переміщень дозволяє зменшити час розрахунків без втрати точності.

3. Аналіз варіантів локального уточнення сітки показав, що використання призматичних елементів із усередненими механічними та геометричними параметрами дозволяє зберегти точність розрахунків при скороченні обсягу обчислювальних операцій, що є критично важливим для моделювання об’єктів зі складною структурою.

4. Встановлено, що збільшення неоднорідності матеріалу та складності геометрії об’єкта, хоча й уповільнює збіжність традиційних методів, не суттєво впливає на збіжність НМСЕ.

5. Показані широкі можливості застосування розроблениз програмних засобів для визначення напружено-дефомованого стану і ресурсу просторових елементів конструкцій складної форми при фізично-нелінійному деформуванні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрієвський В.П., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. Дослідження збіжності поліномів і методу скінченних елементів з урахуванням пластичних властивостей матеріалу. *Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту*. 2024. № 207. С. 24–38. DOI: 10.18664/1994-7852.207.2024.301881

2. Андрієвський В.П., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. Чисельне дослідження збіжності рядів Фур'є, поліномів і напіваналітичного методу скінченних елементів. *Збірник наукових праць Національного гірничого університету*. 2023. № 74. С. 124–132. DOI: 10.33271/crpnmu/74.124

3. Баженов В.А., Геращенко О.В., Гончаренко М.В. Варіаційні принципи будівельної механіки. Історія становленя та розвитку. Київ, Каравела, 2015. 762 с.

4. Баженов В.А. Максим'юк Ю.В. Напружено-деформований стан і формозмінення масивних і тонкостінних об'єктів. «*Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі»: матеріали* міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 18-20 жовтня 2018 р.). К., 2018. С 97.

5. Баженов В.А. Максим'юк Ю.В. Напружено-деформований стан і формозмінення в тілах обертання складної структури. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. Вип. 102. С. 3–12.

6. Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. Напіваналітичний метод скінченних елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури. Київ: Вид-во «Каравела», 2021. 280 с.

7. Вплив урахування геометричної нелінійності на величину розрахункового ресурсу хвостовика лопатки ГТУ / В. П. Андрієвський, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2010. Вип. 85. С. 31–50.

8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Київ : Вища школа, 1985. 190 с.

9. Гуляр О. І., Максим'юк Ю. В. Розв'язання геометрично нелінійних задач вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (1919–2006), 17–19 жовт. 2007 р. : тези доп. Дніпропетровськ : ДНУ, 2007. С. 103–104.

10. Гуляр О. І., Максим'юк Ю. В., Козак А. А., Максим'юк О. В. Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування призматичних тіл. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*. 2020. Вип. 6. С. 3–10.

11. Гуляр О. І., Пискунов С. О., Максим'юк Ю. В., Сизевич Б. І. Особливості розв'язання двовимірних задач стаціонарної теплопровідності і повзучості з урахуванням геометричної нелінійності. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. Вип. 90. С. 73–89.

12. Гуляр О. І., Пискунов С. О., Максим'юк Ю. В., Сизевич Б. І. Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі темов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2007. Вип. 79. С. 18–42.

13. Дослідження еволюції напружено-деформованого стану і визначення розрахункового ресурсу масивних елементів вісесиметричних конструкцій на основі універсального скінченного елементу / В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк, С.В. Мицюк, С.О. Пискунов. *Вісник НТУ «ХПІ» Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. 2018. №22(1298). С. 66-72.

14. Іванченко Г.М., Максим'юк Ю.В., Козак А.А., Мартинюк І.Ю. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми. *Управління розвитком складних систем*. 2021. Вип. 46. С. 55–62. DOI: 10.32347/2412-9933.2021.46.55-62

15. Кузьмінець М., Максим'юк Ю., Мартинюк І., Степаненко Т. Структура обчислюваного комплексу розрахунку на міцність призматичних тіл на основі напіваналітичного методу скінченних елементів. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2023. Вип. 113, Ч. 2. С. 45–54. DOI: 10.33744/0365-8171-2023-113.2-045-054

16. Кузьмінець М.П., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю. Дослідження напружено-деформованого стану призматичного демпферуючого елемента. *Вісник ХНАДУ*. 2023. Вип. 102. С. 73–77. DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2023.102.0.73

17. Кузьмінець М.П., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю. Ефективність алгоритму розв'язання системи нелінійних рівнянь на основі екстраполяції переміщень. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2024. Вип. 115, Ч. 2. С. 96–106. DOI: 10.33744/0365-8171-2024-115.2-096-106

18. Кузьмінець М.П., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю. Ефективність скінченних елементів з перемінними та усередненими механічними та геометричними параметрами напіваналітичного методу скінченних елементів. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2022. Вип. 112. С. 78–84. DOI: 10.33744/0365-8171-2022-112-078-084

19. Кузьмінець М.П., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю. Розрахункові співвідношення напіваналітичного методу скінченних елементів призматичних тіл для скінченого елемента на основі подання переміщень поліномами. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2023. Вип. 114, Ч. 1. С. 65–75. DOI: 10.33744/0365-8171-2023-114.1-065-075

20. Левитас В. И. Большие упруго-пластические деформации металлов при высоком давлении. Киев : Наукова думка, 1987. 231 с.

21. Левитас В. И. Об объективности уравнений состояния, содержащих производные по времени от различных тензоров. Киев, 1984. 29 с. Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 6738-84 деп.

22. Левитас В. И., Идесман А. В. Решение термоупруго-пластических задач при контактном взаимодействии методом конечных элементов. *Проблемы прочности.* 1986. № 11. С. 72–82.

23. Лук'янченко О.О. Розв'язання проблеми надійності й безпеки оболонкових структур з недосконалостями форми методами обчислювальної механіки. К.: Каравела, 2019. 198 с.

24. Максим'юк Ю. В. Оболонковий скінчений елемент (СЕ) загального типу для розв'язання задач фізичної і геометричної нелінійності вісесиметричних оболонок та пластин. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів та студентів КНУБА: тези доповідей* (Київ, 5–8 листопада 2013 р.). Київ, 2013. С. 57.

25. Максим'юк Ю. В., Башинська О. Ю. Розрахунок корпусних деталей занурюваних глибоководних апаратів з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності. *Recent Studies of Applied Sciences: International scientific-practical conference. Section: Technical Science* (Kyiv, Ukraine, 15–17 April 2015). Kyiv, 2015. p. 39.

26. Максим'юк Ю. В., Солодей І. І., Стригун Р. Л. Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформівних тіл. *Опір матеріалів і теорія споруд.* 2019. Вип. 102. С. 252–262.

27. Максим'юк Ю., Гончаренко М., Мартинюк І., Максим'юк О. Алгоритм розв'язання системи лінійних та нелінійних рівнянь напіваналітичним методом скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*. 2020. Вип. 7. С. 101-108. DOI: 10.32347/2522-4182.7.2020.101-108

28. Максим'юк Ю., Гончаренко М., Мартинюк І., Максим'юк О. Алгоритм розв'язування систем лінійних і нелінійних рівнянь напіваналітичним методом скінченних елементів для криволінійних неоднорідних призм. *Теорія та практика будівельних конструкцій*. 2020. Вип. 7. С. 101–108.

29. Максим'юк Ю., Мартинюк І., Максим'юк О. Моментна схема скінченних елементів в геометрично та фізично нелінійних задачах деформування вісесиметричних тіл обертання з урахуванням континуального руйнування. *Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції* : праці IV наук.-практ. конф., м. Київ, 26 квітня 2023 р. Київ, 2023. С. 128-129. URL:

https://www.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2023/05/tezy_konferencziyi-knub-2023-26-27_04_235.pdf

30. Максим'юк Ю., Мартинюк І., Максим'юк О. Напіваналітичний метод скінченних елементів в лінійних і нелінійних задачах деформування, руйнування та формозмінення просторових тіл з урахуванням неканонічності форми та складної структури. *Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції* : праці III наук.-практ. конф., м. Київ, 26 квітня 2021 р. Київ, 2021. С. 73-74. URL: https://www.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2023/09/konferencziya-knuba-2021_prew_all_160421_compressed.pdf

31. Максим'юк Ю.В. Алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. Вип. 92. С. 148–156.

32. Максим'юк Ю.В., Андрієвський В.П., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. Дослідження напружено-деформованого стану демпферуючого елемента. *Збірник наукових праць Національного гірничого університету*. 2023. № 75. С. 198–205. DOI: 10.33271/crpnmu/76.198

33. Максим'юк Ю.В. Визначення впливу урахування геометричної нелінійності на величину ресурсу стопорного клапана у випадку дискретного руйнування. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА*:тези доповідей. – в 2х частинах (м.Київ, 8-11 листопада 2011 р.). Ч.1.К., 2011. С 46.

34. Максим'юк Ю.В., Козак А., Мартинюк І., Бучко В. Системи координатних функцій під час розкладання переміщень по поліномах. *Будівельні конструкції теорія і практика*. 2022. Вип. 10. С. 150–157. DOI: 10.32347/2522-4182.10.2022.150-157

35. Максим'юк Ю.В., Козак А., Мартинюк І., Бучко В. Системи координатних функцій під час розкладання переміщень по поліномах. *Будівельні конструкції теорія і практика*. 2022. Вип. 10. С. 150–157. DOI: 10.32347/2522-4182.10.2022.150-157.

36. Максим'юк Ю.В., Козак А., Мартинюк І., Максим'юк О. Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами. *Будівельні конструкції теорія і практика*. 2021. Вип. 8. С. 97–108. DOI: 10.32347/2522-4182.8.2021.97-108

37. Максим'юк Ю.В., Шкриль О., Мартинюк І., Бучко В. Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченого елемента на основі представлення переміщень поліномами. *Будівельні конструкції теорія і практика*. 2021. Вип. 9. С. 54–62. DOI: 10.32347/2522-4182.9.2021.54-62

38. Мартинюк І. Реалізація програмного забезпечення розрахунку міцності на основі напіваналітичного методу скінченних елементів. *Будівельні конструкції теорія і практика*. 2022. Вип. 11. С. 61–68. DOI: 10.32347/2522-4182.11.2022.61-68

39. Мартинюк І. Розв'язання фізично нелінійних задач деформування масивних і тонкостінних призматичних тіл. *Будівельні конструкції теорія і практика*. 2022. Вип. 13. С. 99–109. DOI: 10.32347/2522-4182.13.2023.99-109

40. Моделювання фізично і геометрично нелінійного деформування і руйнування вісесиметричних і плоско-деформованих тіл / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, Ю.В. Максим'юк. «*Математичні проблеми технічної механіки – 2013*»*:* Матеріали міжнародної наукової конференції (м. Дніпродзержинськ, 16–29 квітня). Дніпродзержинськ, 2013. С 101.

41. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл : монографія / Баженов В. А., Гуляр О. І., Пискунов С. О., Сахаров О. С.]. Київ: Каравела, 2014. 235 с.

42. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл : монографія / Баженов В. А., Гуляр О. І., Пискунов С. О., Сахаров О. С. Київ: КНУБА, 2005. 298 с.

43. A generic formulation of anisotropic thermo-elastoviscoplasticity at finite deformations for finite element codes / M. Abatour et al. *Computational Mechanics*. 2024. URL: https://doi.org/10.1007/s00466-024-02543-8 (date of access: 12.11.2024).

44. Aldakheel, F., Hudobivnik, B., Wriggers, P. Virtual elements for finite thermo-plasticity problems. *Computational Mechanics*. 64, 1347–1360. 2019. URL: https://doi.org/10.1007/s00466-019-01714-2 (date of access: 12.11.2024).

45. American Bureau of Shipping. Thermal Analysis of Vessels with Tanks for Liquefied Gas. *Eagle*. 2019. URL: https://ww2.eagle.org/content/dam/eagle/rules-and-guides/current/design_and_analysis/309_gn_thermalanalysisofvessels/thermal-analysis-gn-sept19.pdf (date of access: 12.11.2024).

46. Application of Plastic Node Method to Thermal Elastic-plastic and Dynamic Problems / Y. Ueda et al. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*. 1983. Vol. 1983, no. 153. P. 200–209. URL: https://doi.org/10.2534/jjasnaoe1968.1983.200 (date of access: 12.11.2024).

47. Aulisa, E., Loftin, J. Exact Subdomain and Embedded Interface Polynomial Integration in Finite Elements with Planar Cuts. *arXiv*. 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2110.00642 (date of access: 12.11.2024).

48. Bazhenov V., Horbach M., Martyniuk I., Maksymiuk O. Convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2021. Issue 106. P. 92-104.

49. Bazhenov V., Maksymiuk Y., Martyniuk I., Maksymiuk O. Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curvilinear prismatic objects. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2020. Issue 105. P. 24-32.

50. Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O. Modeling creep and continuous fracture process zones in spatial prismatic bodies. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41, No. 9. P. 1016–1030.

51. Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Andrievskii V.P. Design life assessment of the blade root of a gas turbine unit under thermomechanical loading. *Strength of Materials*. 2013. Vol. 45. P. 329–339.

52. Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Andrievskii V.P. Solving problems of thermoviscoelastoplastic and continuous fracture of prismatic bodies. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, No. 12. P. 1331–1343.

53. Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Maksym’yuk Y.V., Mytsyuk S.V. Effect of Geometric Nonlinearity on the Life of a Herringbone Lock Joint in Creep. *Strength of Materials*. 2022. Vol. 54, No. 3. P. 372–377.

54. Bazhenov, V. A., Gulyar, A. I., Solodei, I. I. Numerical Simulation of Dynamic Processes of Elastoplastic Interaction between Three-Dimensional Heterogeneous Bodies on the basis of Semi-Analytical Finite Element Method. Part 1. Computational Relationships of the Semi-Analytical Finite Element Method and Algorithms for the Study of Transient Processes of Dynamic Deformation of Heterogeneous Prismatic Bodies and Bodies of Revolution. *Strength of Materials*. 2013. Vol. 45. P. 523–533. URL: https://doi.org/10.1007/s11223-013-9489-3 (date of access: 12.11.2024).

55. Chicaiza, Á., Prola, L., Gala, P., Chicaiza, C., Ortiz, M. FSplines: A Software for Linear Stability Analysis of Thin-Walled Structures, Version 2.0. *Springer*. 2020. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-60467-7_28 (date of access: 12.11.2024).

56. Daikh A. A., Belarbi M. O., Vinh P. V., Ladmek M., Belkacem A., Houari M. S. A., Eltaher M. A. An Assessment of a New Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Free Vibration Analysis of Cosine Functionally Graded Doubly Curved Shells under Various Boundary Conditions. *Physical Mesomechanics*. 2024. Vol. 27, no. 3. P. 338–354.

57. Demkowicz, L., Oden, J. T. An Adaptive Finite Element Method for Large-Scale Structural Analysis with Minimal Initial Assumptions. *arXiv*. 2022. URL: https://arxiv.org/abs/2307.07582 (date of access: 12.11.2024).

58. Dolbow, J. E., Moës, N. A Generalized Finite Element Method for Multiscale Modeling of Heterogeneous Materials. *arXiv*. 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2307.07582 (date of access: 12.11.2024).

59. Ern A., Guermond J.-L. Higher-order approximation. *Finite Elements III*. Cham, 2021. P. 367–382. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-57348-5_82 (date of access: 12.11.2024).

60. MFE Vector Approximation for a Shell of Revolution with Account for Shear Deformations / Y. V. Klochkov et al. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020. Vol. 49, no. 4. P. 301–307. URL: https://doi.org/10.3103/s105261882004007x (date of access: 12.11.2024).

61. Frontin, C. V., Walters, G. S., Witherden, F. D., Lee, C. W., Williams, D. M., Darmofal, D. L. Foundations of Space-Time Finite Element Methods: Polytopes, Interpolation, and Integration. *arXiv*. 2020. URL: https://arxiv.org/abs/2012.08701 (date of access: 12.11.2024).

62. Ge, B. F., Gao, M. Y., & Dong, H. Unified high-order multi-scale method for mechanical behavior simulation and strength prediction of composite plate and shell structures. 2023. arxiv.org. URL: https://arxiv.org/abs/2305.00464 (date of access: 12.11.2024).

63. Geometric nonlinear analysis of prismatic shells using the semi-analytical finite strip method / A. Borković et al. *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 117. P. 63–88. URL: https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.033 (date of access: 12.11.2024).

64. Golub V. P. The nonlinear mechanics of continual damage and its application to problems of creep and fatigue. *International Applied Mechanics*. 2000. Vol. 36, no. 3. P. 303–342. URL: https://doi.org/10.1007/bf02681915 (date of access: 03.11.2024).

65. Gong, S., Gopalakrishnan, J., Guzmán, J., Neilan, M. Discrete Elasticity Exact Sequences on Worsey-Farin Splits. *arXiv*. 2023. URL: https://arxiv.org/abs/2302.08598 (date of access: 12.11.2024).

66. Gontarovskyi, P., Garmash, N., Melezhyk, I. Numerical Modeling of Dynamic Processes of Elastic-Plastic Deformation of Axisymmetric Structures / H. Altenbach, et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering*. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2023. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_34 (date of access: 12.11.2024).

67. Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Y., Bespalova E. On Some Recent Discrete-Continuum Approaches to the Solution of Shell Problems. *Advanced Structured*

Materials. Cham, 2019. P. 285–313. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_16 (date of access: 12.11.2024).

68. Guo Y. M., Fukae N. The 3-D Finite Element Analysis on Elastic-Plastic Micromechanical Response of the Particle Volume Fraction. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 962. P. 210–217. URL: https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.962.210 (date of access: 12.11.2024).

69. Heat Leakage Analysis of Main Structure of Large Full-Scale LNG Storage Tank / J.-h. Li et al. *Springer Series in Geomechanics and Geoengineering*. Singapore, 2024. P. 774–787. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-97-0268-8_60 (date of access: 12.11.2024).

70. Heid, P., Wihler, T. P. Adaptive Iterative Linearization Galerkin Methods for Nonlinear Problems. *arXiv*. 2018. URL: https://arxiv.org/abs/1808.04990 (date of access: 12.11.2024).

71. Karasin, A., Karasin, I. MFE based work equivalent nodal load derivations for plates on elastic foundation. *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2019. Vol. 4. P. 8–12. URL: https://iaras.org/iaras/filedownloads/ijtam/2019/009-0002%282019%29.pdf (date of access: 12.11.2024).

72. Kobayashi S. Three-dimensional Finite Element Analysis of Block Compression. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1984. Vol. 26, No. 3. P. 165–176.

73. Krawczuk, M. K., Mizerka, J. M. Comparison of Structural Analysis of Thin-Walled Structures Using Isogeometric Analysis and the Finite Element Method. *Materials*. 2022. Vol. 15, No. 19, Article 6516. URL: https://www.mdpi.com/1996-1944/15/19/6516 (date of access: 12.11.2024).

74. Kumar, R., & Singh, S. Stability analysis of functionally graded composite shells under thermal and mechanical loads. 2020. arxiv.org. URL: https://arxiv.org/abs/2008.00761 (date of access: 12.11.2024).

75. Latifov F. S., Seifullaev F. A., Alyev S. S. Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow. *Journal*

of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57, no. 4. P. 709–713. URL: https://doi.org/10.1134/s0021894416040155 (date of access: 12.11.2024).

76. Lee C. H., Kobayashi S. Elastoplastic analysis of plane-strain and axisymmetric flat punch indentation by the finite-element method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1970. Vol. 12, no. 4. P. 349–370. URL: https://doi.org/10.1016/0020-7403(70)90088-3 (date of access: 12.11.2024).

77. Lee E. H., McMeeking R. M. Concerning elastic and plastic components of deformation. *International Journal of Solids and Structures*. 1980. Vol. 16, no. 8. P. 715–721. URL: https://doi.org/10.1016/0020-7683(80)90013-x (date of access: 12.11.2024).

78. Li W., Nguyen-Thanh N., Zhou K. Geometrically nonlinear analysis of thin-shell structures based on an isogeometric-meshfree coupling approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 336. P. 111–134. URL: https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.02.018 (date of access: 12.11.2024).

79. Maksimyuk Y., Martyniuk I., Kozak O., Maksimyuk O. Numerical analysis of the stressed-deformed state of a tubular element under thermal loading. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. No. 110. P. 199–206.

80. Maksimyuk Y., Martyniuk I., Malykhin M., Andreychuk V. Solution of systems of linear and nonlinear equations of prismatic and circular spatial. *News of Science and Education.* 2022. No. 9. URL: https://scieduc.eu/ojs_en/index.php/en_ojs/article/view/49 (date of access: 03.11.2024).

81. Maksimyuk Yu.V., Chuprina Yu.A., Kozak O.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. Investigation of the influence of flange thickness on the nature of the development of zones of plasticity in casing detail. *Resistance of materials and theory of structures*: scientific and technical collection. Kyiv: KNUBA, 2022. Issue. 108. P. 97-106.

82. Maksimyuk Yu.V., Martyniuk I., Malykhin M., Andreychuk V. Solution of systems of linear and nonlinear equations of prismatic and circular spatial bodies (Розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь призматичних і кругових просторових тіл). *News of Science and Education*. 2022. Issue 9. Sheffield: Science and

Education LTD. URL: https://scieduc.eu/ojs_en/index.php/en_ojs/article/view/49 (date of access: 12.11.2024).

83. Maksimyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu. Analysis of geometrically nonlinear problems of axisymmetrical bodies taking into account the material deformation. *Modern Scientific Potential – 2023* : матеріали XX міжнар. наук.-практ. конф., м. Шеффілд, 28 лютого – 7 березня 2023 р. Sheffield, 2023. С. 119–121.

84. Maksimyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. Research of convergence, reliability and efficiency of the results obtained using the given finite elements. *Věda a technologie: krok do budoucnosti* : матеріали XX міжнар. наук.-практ. конф., т. 4, м. Прага, 2023 р. Praha, 2023. С. 91–94.

85. Maksimyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. Study of the influence of taking into account geometric nonlinearity on the value of the resource of a Christmas tree joint under creep conditions. *Modern Research in Science and Education* : матеріали II міжнар. наук.-практ. конф., м. Чикаго, США, 12–14 жовтня 2023 р. Chicago, 2023. С. 148–150. URL: https://sci-conf.com.ua/ii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-modern-research-in-science-and-education-12-14-10-2023-chikago-ssha-arhiv/

86. Maksimyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. The effectiveness of the algorithm for solving nonlinear equations in isotropic load. *Progressive Research in the Modern World* : матеріали VI міжнар. наук.-практ. конф., м. Бостон, США, 2–4 березня 2023 р. Boston, 2023. С. 229–231. URL: https://sci-conf.com.ua/vi-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-progressive-research-in-the-modern-world-2-4-03-2023-boston-ssha-arhiv/

87. Maksimyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. The effectiveness of the algorithm for solving nonlinear equations in isotropic load. *Scientific Progress: Innovations, Achievements and Prospects* : матеріали VI міжнар. наук.-практ. конф., м. Мюнхен, 6–8 березня 2023 р. Munich, 2023. С. 117–120. URL: https://sci-conf.com.ua/vi-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-scientific-progress-innovations-achievements-and-prospects-6-8-03-2023-myunhen-nimechchina-arhiv/

88. Maksymiuk Y., Andriievskyi V., Martyniuk I., Maksymiuk O. Analysis of structures with arbitrary kinematic boundary conditions by the semi-analytical finite element method. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. No. 111. P. 140–146.

89. Maksymiuk Y., Pyskunov S., Shkryl O., Maksymiuk O. Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2020. Issue 104. P. 255-264.

90. Maksymiuk Y., Shkryl O., Martyniuk I., Kozak A., Maksymiuk O. Analysis of the stress-strain state of the rotary device fastening part by the semi-analytical finite element method. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. No. 112. P. 67–74.

91. Martyniuk I. Implementation of strength calculation software based on the semi-analytical method of finite elements. *Building structures. Theory and practice*. 2022. No. 11. P. 61–68.

92. Methods for calculating thermal fields using modern software products / V. V. Golik et al. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 663. P. 012001. URL: https://doi.org/10.1088/1757-899x/663/1/012001 (date of access: 12.11.2024).

93. Mittal, R. K., Singh, S. K. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates and shells using a higher-order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Vol. 44. P. 325–338. URL: https://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/ami/article/view/9829 (date of access: 12.11.2024).

94. Mustapha, K., McLean, W., Dick, J., Le Gia, Q. T. A Locking-Free Modified Conforming MFE for Planar Elasticity. *arXiv*. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2407.06831. (date of access: 12.11.2024).

95. Nagtegaal J. C., Rebelo N. On the development of a general purpose finite element program for analysis of forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1988. Vol. 25, no. 1. P. 113–131. URL: https://doi.org/10.1002/nme.1620250111 (date of access: 12.11.2024).

96. Neilan, M., Salgado, A. J., Zhang, W. Numerical Analysis of Strongly Nonlinear PDEs. *arXiv*. 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1610.07992 (date of access: 12.11.2024).

97. Park J. J., Kobayashi S. Three-dimensional finite element analysis of block compression. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1984. Vol. 26, no. 3. P. 165–176. URL: https://doi.org/10.1016/0020-7403(84)90051-1 (date of access: 12.11.2024).

98. Patterning of Structurally Anisotropic Composite Hydrogel Sheets / E. Prince et al. *Biomacromolecules*. 2018. Vol. 19, no. 4. P. 1276–1284. URL: https://doi.org/10.1021/acs.biomac.8b00100 (date of access: 12.11.2024).

99. Shen Z. Thin-walled composite beam elements via the absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*. 2023. URL: https://doi.org/10.1007/s11044-023-09956-y (date of access: 12.11.2024).

100. Perzyna P., Sawczuk A. Problems of thermoplasticity. *Nuclear Engineering and Design*. 1973. Vol. 24, no. 1. P. 1–55. URL: https://doi.org/10.1016/0029-5493(73)90017-4 (date of access: 03.11.2024).

101. Prabhune, B., Suresh, K. Isoparametric Tangled Finite Element Method for Nonlinear Elasticity. *arXiv*. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2303.10799. URL: https://arxiv.org/abs/2303.10799 (date of access: 12.11.2024).

102. Rabotnov Y. N. A model of an elastic-plastic medium with delayed yield. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1968. Vol. 9. No. 3. P. 265–269.

103. Raffaele D., Rustighi E., Waters T. Semi-Analytical Finite-Element Analysis for Free and Forced Wave Propagation Using COMSOL and LiveLink for Matlab. *Vibration*. 2023. Vol. 6, no. 2. P. 359–374. URL: https://doi.org/10.3390/vibration6020022 (date of access: 12.11.2024).

104. Rajagopalan K. Analysis of Thin-Walled Structures. *Torsion of Thin Walled Structures*. Singapore, 2022. P. 97–136. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-16-7458-7_5 (date of access: 12.11.2024).

105. Reddy, J. N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. *Texas A&M University*. 2014. URL: https://mechanics.tamu.edu/wp-

content/uploads/2016/08/13-An-Introduction-to-Nonlinear-Finite-Element-Analysis.pdf (date of access: 12.11.2024).

106. Scott, M. A., Kennedy, G. J. A Unified Finite Element Framework for Modeling Large Deformations of Thin and Thick Shell Structures. *arXiv*. 2020. URL: https://arxiv.org/abs/2004.04201 (date of access: 12.11.2024).

107. Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curviline prismatic objects / V. Bazhenov et al. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2020. No. 105. P. 24–32. URL: https://doi.org/10.32347/2410-2547.2020.105.24-32 (date of access: 12.11.2024).

108. Simo J. C., Taylor R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985. Vol. 48, no. 1. P. 101–118. URL: https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90070-2 (date of access: 03.11.2024).

109. Singh S. P., Spilker R. L. Elasto-plastic analysis of axisymmetric structures subject to arbitrary loads by hybrid-stress finite elements. *Computers & Structures*. 1984. Vol. 19, no. 3. P. 447–465. URL: https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90052-x (date of access: 12.11.2024).

110. SINTEF. Solution Methods for Nonlinear Finite Element Analysis (NFEA). *SINTEF Lecture Note*. 2012. URL: https://www.sintef.no/globalassets/project/evitameeting/2012/kmm-geilo-2012-lecture-11a.pdf (date of access: 12.11.2024).

111. Surdon G., Chenot J. L. Finite element calculation of three-dimensional hot forging. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. Vol. 24, no. 11. P. 2107–2117. URL: https://doi.org/10.1002/nme.1620241107 (date of access: 12.11.2024).

112. Three Dimensional Finite Element Calculation of the Forging of a Connecting Rod / N. Soyris et al. *Modelling of Metal Forming Processes*. Dordrecht, 1988. P. 227–236. URL: https://doi.org/10.1007/978-94-009-1411-7_25 (date of access: 12.11.2024).

113. Toh Y. H. Efficient non-iterative multi-point method for solving the Riemann problem. *Nonlinear Dynamics*. 2024. URL: https://doi.org/10.1007/s11071-023-09229-5 (date of access: 12.11.2024).

114. Trotsenko V. A., Trotsenko Y. V. Free Vibrations of a Cylindrical Shell Reinforced by an Elastic Annular Rib. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. URL: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06573-0 (date of access: 12.11.2024).

115. Vorona Y., Maksimyuk Y., Martyniuk I., Maksymiuk O. Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2021. No. 107. P. 184–192.

116. Weber, M., Altenbach, H. Elasto-plasticity theory for large plastic deformation and its use for the material stiffness determination. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 36, 1305–1321. 2024. URL: https://doi.org/10.1007/s00161-024-01297-1 (date of access: 12.11.2024).

117. Wriggers, P. Nonlinear Finite Element Methods. *Springer*. 2008. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-71001-1 (date of access: 12.11.2024).

118. Xiao, X., Sabin, M., Cirak, F. Interrogation of Spline Surfaces with Application to Isogeometric Design and Analysis of Lattice-Skin Structures. *arXiv*. 2018. URL: https://arxiv.org/abs/1810.07982 (date of access: 12.11.2024).

119. Xiroudakis G., Exadaktylos G., Saratsis G. Stress-deformation analysis of the cracked elastic body. *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 309. P. 110380.

120. Zhang, W., Li, M., & Chen, H. Thermo-mechanical analysis of composite cylindrical shells under combined loading conditions. 2021. arxiv.org. URL: https://arxiv.org/abs/2102.03416 (date of access: 12.11.2024).

ДОДАТКИ

Довідки про впровадження результатів дисертаційної роботи

МОН
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

КНУБА

eua EUROPEAN UNIVERSITY ASSOCIATION

DQS Quality Management ISO 9001:2015

просп. Повітряних Сил, 31,
м. Київ, 03037
тел. (044)241-55-80,
e-mail: knuba@knuba.edu.ua,
web: http://www.knuba.edu.ua
код ЄДРПОУ 02070909

ДОВІДКА

26.12.24 № 14-1.9/978

про впровадження результатів дисертаційної роботи Мартинюка І.Ю. на тему «Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах деформування, континуального руйнування та формозмінення просторових тіл неканонічної форми та складної структури» у навчальному процесі Київського національного університету будівництва і архітектури

Результати дисертаційної роботи Мартинюка І.Ю. на тему «Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах деформування, континуального руйнування та формозмінення просторових тіл неканонічної форми та складної структури», використані у навчальному процесі на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при виконанні наступних магістерських робіт: «Розрахунок корпусних деталей занурюваних глибоководних апаратів з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності» (2023р.), «Резервуар вертикальний сталевий для зберігання нафти і нафтопродуктів» (2024р.).

Окремі результати роботи було використано при розробці нових розділів спецкурсу «Сучасні підходи до розрахунку просторових конструкцій при статичних і динамічних впливах», який викладається для магістрів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія», на будівельному факультеті КНУБА, освітня програма «Промислове та цивільне будівництво», а також навчальної дисципліни «Програмне забезпечення конструкторських розрахунків», що викладається для магістрів спеціальностей 131 «Прикладна механіка» та 192 «Будівництво та цивільна інженерія.

Науковий внесок Мартинюка І.Ю. полягає у створенні методики та програмного забезпечення для аналізу фізично і геометрично нелінійних процесів деформування для криволінійних неоднорідних призматичних тіл.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради за місцем захисту дисертації Мартинюка І.Ю., на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Завідувач кафедри будівельної механіки,
д.т.н., професор — Петро ЛІЗУНОВ

Декан будівельного факультету
д.т.н., професор — Григорій ІВАНЧЕНКО

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Перший проректор,
д.ек.н., професор — Олексій ШКУРАТОВ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ
Ідентифікаційний код 02070909

МОН
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

просп. Повітряних Сил, 31,
м. Київ, 03037
тел. (044)241-55-80,
e-mail: knuba@knuba.edu.ua,
web: http://www.knuba.edu.ua
код ЄДРПОУ 02070909

НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

ДОВІДКА

26.12.24 № 14-1.9/979

про впровадження результатів дисертаційної роботи Мартинюка І.Ю. на тему «Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах деформування, континуального руйнування та формозмінення просторових тіл неканонічної форми та складної структури» у наукових дослідженнях Науково-дослідного інституту будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури

Результати дисертаційної роботи Мартинюка І.Ю. на тему «Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах деформування, континуального руйнування та формозмінення просторових тіл неканонічної форми та складної структури» використані в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (НДІБМ КНУБА) при виконанні науково-дослідних робіт 2019 - 2024 років.

Науковий внесок Мартинюка І.Ю., полягає у створенні на основі напіваналітичного методу скінчених елементів нових ефективних чисельних підходів до аналізу процесів фізичного і геометрично нелінійного деформування для криволінійних неоднорідних призматичних тіл.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради за місцем захисту дисертації Мартинюка І.Ю., на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Директор
НДІ будівельної механіки,
д.т.н., професор Петро ЛІЗУНОВ

Підпис П.П. Лізунова засвідчую
Секретар вченої ради КНУБА Микола КЛИМЕНКО