

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Мартинюк Іван Юрійович

УДК 539.3+624.074.04

НАПІВНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМУВАННЯ, КОНТИНУАЛЬНОГО
РУЙНУВАННЯ ТА ФОРМОЗМІНЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ
НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ ТА СКЛАДНОЇ СТРУКТУРИ

05.23.17 – будівельна механіка

РЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ – 2025

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Київському національному університеті будівництва і архітектури (КНУБА, м. Київ) і Національному транспортному університеті (НТУ, м. Київ) Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант

доктор технічних наук, професор
МАКСИМ'ЮК ЮРІЙ ВСЕВОЛОДОВИЧ,
Київський національний університет будівництва і архітектури
Міністерства освіти і науки України,
професор кафедри будівельної механіки,

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор
ТРАЧ ВОЛОДИМИР МИРОСЛАВОВИЧ,
Національний університет водного господарства та природокористування
(м. Рівне) Міністерства освіти і науки України,
завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки;

доктор технічних наук, професор
МІКУЛІЧ ОЛЕНА АРКАДІЇВНА,
Луцький національний технічний університет
(м. Луцьк) Міністерства освіти і науки України,
завідувач кафедри прикладної математики та механіки;

доктор технічних наук, професор
КОЗУБ ЮРІЙ ГОРДІЙОВИЧ,
Державний заклад «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка» (м. Полтава) Міністерства освіти і науки України,
професор кафедри математики та інформатики.

Захист відбудеться «7» травня 2025 р. о 12⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 при Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, а.319.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, або за посиланням:

<https://www.knuba.edu.ua/specjalizovana-vchena-rada-d-26-056-04/>.

Реферат розісланий «3» квітня 2025 р.

В. о. вченого секретаря спеціалізованої
вченої ради Д 26.056.04
доктор технічних наук, професор



І. І. Солодей

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Моделювання напруженого стану з метою визначення несучої спроможності багатьох відповідальних об'єктів, а також моделювання технологічних процесів обробки тиском потребують розв'язання фізично нелінійних задач, пов'язаних із розвитком незворотних деформацій пластичності та повзучості, а також геометрично нелінійних задач із урахуванням великих пластичних деформацій. Значна частина таких об'єктів – просторові оболонкові і комбіновані конструкції. Особливе значення, зокрема для елементів енергетичного обладнання, має питання визначення ресурсу експлуатації, що вимагає розв'язання задач континуального руйнування. В рамках континуального руйнування зазначені проблеми ускладнюються врахуванням, зокрема, залежності фізико-механічних констант матеріалу від температури, яке спричиняє суттєвий вплив на показники ресурсу впродовж тривалого часу експлуатації.

Для вирішення цих проблем у даній роботі запропоновано ефективний чисельний підхід до комплексного розв'язання лінійних, фізично та геометрично нелінійних задач деформування та накопичення пошкодженості матеріалу і континуального руйнування призматичних тіл складної структури на основі напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) і Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА (НДІБМ КНУБА).

Дослідження проведені в межах наступних науково-дослідних робіт, що виконувались за напрямком 05 – «Нові комп'ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України:

1ДБ-2019 «Створення комп'ютерних технологій дослідження несучої здатності просторових тіл складної форми з тріщинами на основі енергетичних критеріїв руйнування» (2019-2021 рр., № держ. реєстрації 0119U004841);

2ДБ-2019 «Чисельні методи дослідження та прогнозування нелінійних коливань, динамічної стійкості та кризових явищ і хаотичної поведінки пружних систем» (2019-2021 рр., № держ. реєстрації 0119U002578);

1ДБ-2020 «Теорія і методи чисельного дослідження динамічного фізично та геометрично нелінійного деформування просторових тіл» (2020-2022 рр., № держ. реєстрації 0120U001011);

5ДБ-2022 «Теорія і методи дослідження неізотермічного фізично нелінійного деформування просторових тіл обертання з урахуванням динамічного навантаження» (2022-2024 рр., № держ. реєстрації 0122U001709).

Матеріали і результати досліджень автора були використанні при виконанні цих науково-дослідних робіт.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи полягає в створенні на основі напіваналітичного методу скінченних елементів ефективного апарату чисельного аналізу напружено-деформованого стану масивних і тонкостінних довільно

навантажених призматичних тіл складної структури з довільними граничними умовами на торцях з урахуванням нелінійного деформування матеріалу, зокрема виникнення малих і великих деформацій пластичності і повзучості та залежності властивостей матеріалу від температури і розв'язання на цій основі нових складних задач деформування просторових об'єктів.

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

- отриманням розв'язувальних співвідношень напіваналітичного варіанту методу скінчених елементів (МСЕ) для масивних, тонкостінних і комбінованих призматичних тіл з довільно закріпленими торцями;
- розробка ефективних алгоритмів розв'язання задач пружного і пружно-пластичного деформування призматичних тіл, в тому числі з урахуванням великих деформацій пластичності і континуального руйнування;
- створення на основі отриманих співвідношень і алгоритмів комплексу програм, що відповідають сучасним вимогам, які пред'являються до програмного забезпечення МСЕ;
- дослідженням достовірності розроблених підходів при моделюванні особливостей процесів пружного і пружно-пластичного деформування конструкцій та континуального руйнування;
- розв'язанням нових задач про деформування просторових об'єктів, які виникають в розрахунковій практиці визначення показників міцності і ресурсу в технологічних процесах і при експлуатації.

Об'єктом дослідження є процеси фізично і геометрично нелінійного деформування, континуального руйнування масивних, тонкостінних і комбінованих призматичних тіл.

Предметом дослідження є величини параметрів напружено-деформованого стану континуального руйнування та перерозподіл напружень під час деформування призматичних тіл та визначення розрахункового ресурсу.

Методи дослідження. Основним методом проведення досліджень є напіваналітичний варіант методу скінчених елементів. Особливе значення в рамках НМСЕ має вибір відповідної системи координатних функцій для представлення переміщень по довжині призматичного елемента. Відомо, що для призматичних тіл тільки ряди Фур'є забезпечують суворий поділ змінних і зведення вихідної просторової задачі до ряду двовимірних для кожної утримуваної гармоніки. Використання інших функцій для апроксимації переміщень уявляється нераціональним, тому що кожна з них задовольняє тільки окремим випадкам граничних умов, причому сформульованим з позицій теорії оболонок. Аналіз публікацій, присвячених різним методам розрахунку просторових конструкцій, дозволяє зробити висновок, що для випадку довільних граничних умов найбільш перспективною є орієнтація на розкладання переміщень за поліномами.

Найбільш трудомістким етапом дослідження в пружною і пружно-пластичної постановках конструкцій методом скінчених елементів є розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь. Огляд літератури, класифікація і зіставлення методів розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ свідчить про те, що найбільш ефективними є комбіновані алгоритми, засновані на поєднанні крокових і ітераційних методів. У даній роботі на одному кроці по навантаженню розв'язання систем

лінійних і нелінійних рівнянь здійснюється методом блочних ітерацій з верхньої релаксацією, застосування якого до матриць блокової структури, характерної для НМСЕ, є найбільш природним.

Для опису процесу пружно-пластичного деформування у цій роботі використовується теорія течії для матеріалу, що ізотропно зміцнюється. При виникненні деформацій повзучості рівняння стану прийняті відповідно до теорії зміцнення, що справедливо при виконанні умови малої кривизни деформування.

При великих пластичних деформаціях визначальні співвідношення мають бути об'єктивними, тобто не залежати від накладання жорстких рухів або заміни системи відліку. Отже, під час виборів мір деформацій і напружень, і навіть їх похідних за часом, необхідно враховувати вимогу індеферентності. У цій роботі як міра деформацій використовується міра Фінгера, як міри напружень – тензор істинних напружень Коші. Однак, відповідні міри швидкості деформацій та швидкості зміни напруженого стану не є індеферентними. Для усунення необ'єктивності застосовується похідна Олдройда.

У цій роботі рівняння стану будуються для ізотропного пружнопластичного середовища при малих пружних та великих пластичних деформаціях. У цьому випадку різниця між застосуванням теорії скінчених пружно-пластичних деформацій і підходом, в якому на кожному кроці за часом використовують теорію течії при малих деформаціях, полягає в заміні у визначальних співвідношеннях матеріальних похідних на об'єктивні.

Орієнтація на дослідження з єдиних позицій масивних та тонкостінних конструкцій потребує розробки універсального скінченого елемента. Ефективність застосування універсальних скінчених елементів визначається формою СЕ, законом розподілу переміщень та методики виведення матриці жорсткості.

Використання в якості універсального СЕ елемента трикутного поперечного перерізу небажано, оскільки такі СЕ в задачах згину значно поступаються чотирикутним. У тонкостінних об'єктах переміщення за товщиною розподіляється за лінійним законом. У зв'язку з цим оптимальним слід вважати універсальний скінчений призматичний елемент з білінійним законом розподілу переміщень в площині поперечного перерізу. Виведення матриці жорсткості неоднорідного криволінійного скінченого елемента виконано відповідно до методики моментної схеми скінчених елементів. Такий підхід дозволяє значно поліпшити збіжність результатів, а при розрахунку тонкостінних конструкцій ефективності не поступається спеціальним оболонковим СЕ. Крім того, застосування МССЕ дозволяє задовольняти зміщення елемента як жорсткого цілого, що є необхідним при моделюванні процесів формозміни.

Для призматичних тіл із змінними фізико-механічними та геометричними параметрами матриця системи розв'язувальних рівнянь є повністю заповненою і знизити розмірність задачі не вдається. Обумовленість матриці системи розв'язувальних рівнянь НМСЕ залежить від раціонального вибору системи координатних функцій. Досягти високої ефективності методу можна лише, забезпечивши переважання діагональних елементів.

Успішне застосування МСЕ до розрахунку конструкцій в значній мірі обумовлено ефективністю використання сучасних персональних комп'ютерів, в

зв'язку з чим підвищується роль систем програм, що реалізують процес розв'язання. Правильна організація обчислювального комплексу, вибір оптимальних алгоритмів розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь в значній мірі визначають можливості методу щодо структурної складності розглянутих об'єктів, точності одержуваних результатів і складності постановки нелінійних задач. Тому спостерігається підвищений інтерес до розробки досить універсальних обчислювальних комплексів на основі МСЕ. Одним з ефективних програмних комплексів є система «Міцність», призначена для проведення всебічних досліджень в області механіки твердого тіла, що деформується. Основні принципи її побудови використані в даній роботі при реалізації напіваналітичного варіанту МСЕ.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у розробці на основі моментної схеми скінченних елементів і напіваналітичного варіанту МСЕ ефективного універсального підходу до чисельного дослідження нелінійних процесів деформування довільно навантажених масивних і тонкостінних криволінійних неоднорідних призматичних тіл складної форми з різними типами граничних умов при дії силових і температурних навантажень. Розроблений підхід розвинений стосовно дослідження напружено-деформованого стану об'єктів з урахуванням великих пластичних деформацій, деформацій повзучості і континуального руйнування. Це дозволило розширити область ефективного застосування НМСЕ на новий клас задач. З використанням розробленого підходу вирішено ряд нових складних задач пружного і пружно-пластичного деформування призматичних тіл, виявлено якісні особливості процесів деформування і отримано кількісні оцінки напруженого стану, що має самостійне прикладне значення.

Достовірність результатів, отриманих за розробленою методикою та із використанням розроблених програм, підтверджена розв'язанням значного числа контрольних задач пружного і пружно-пластичного деформування масивних і тонкостінних призматичних тіл при різних граничних умовах і навантаженнях. У процесі розв'язання нових задач оцінка збіжності результатів проводилася на основі послідовного збільшення кількості скінченних елементів і утримуваних членів розкладання, підвищення точності систем лінійних і нелінійних рівнянь, а також перевірки точності задоволення природним граничним умовам.

Практичне значення одержаних результатів дисертації полягає в тому, що розроблена ефективна методика розв'язання нових складних задач пружного і пружно-пластичного деформування призматичних тіл реалізована у вигляді комплексу програм і може бути використана в проектно-конструкторській практиці в машинобудуванні, будівництві та інших галузях техніки. Широкі можливості практичного застосування методики в різних галузях наочно ілюструються результатами розрахунку конкретних об'єктів.

Особистий внесок здобувача. Отримані в представленій до захисту роботі розрахункові моделі, підходи, алгоритми, програмні засоби та результати розв'язків задач, що складають дисертаційну роботу, здобуті автором. Вони відображені в індивідуальних та спільних публікаціях, де автор виклав основні положення напіваналітичного методу скінчених елементів в задачах деформування, континуального руйнування та формозмінення просторових призматичних тіл неканонічної форми та складної структури, перелік яких наведено на С.38 – 42.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень та окремі розділи роботи доповідалися на наступних наукових заходах: III Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 2021; IV Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 26 квітня 2023; XX International scientific and practical Conference Modern scientific potential - 2023 , February 28 - March 7 , 2023; XX Mezinárodní vědecko - praktická konference «Věda a technologie: krok do budoucnosti Materiály», Praha. 2023; “Progressive research in the modern world” 6th International scientific and practical conference, Boston, USA. 2023; Scientific progress: innovations, achievements and prospects. 6th International scientific and practical conference. MDPC Publishing. Munich, Germany. 2023; “Modern research in science and education” International scientific and practical conference. BoScience Publisher. Chicago, USA. 2023.

Публікації. За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 33 наукових праці, серед яких: вісім у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України, категорії “А”, у періодичному виданні, що індексується в наукометричній базі Web of Science; п’ятнадцять статей у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України, категорії “Б”; дев’ять публікацій у збірниках матеріалів та доповідей українських та міжнародних наукових конференцій та одна монографія (видана у співавторстві).

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, семи розділів основної частини, загальних висновків, списку використаних літературних джерел із 120 найменувань, додатків, викладена на 297 сторінках друкованого тексту, серед яких 278 сторінок основного тексту, 127 рисунків, 29 таблиць і дві сторінки додатків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі обґрунтована актуальність теми, визначені мета і задачі досліджень, наведена загальна характеристика роботи.

В першому розділі міститься короткий огляд літературних джерел, надана оцінка теперішнього стану досліджень фізично і геометрично нелінійного деформування, континуального руйнування просторових тіл неканонічної форми та складної структури.

Основи теорії і класичні методи розв’язання задач пружності та термопружності викладені в роботах М.І. Безухова, В.І. Блоха, П.П. Ворошка, О.М. Гузя, С.П. Демидова, О.А. Іллюшина, А.Д. Коваленка, О.В. Ликова, А.І. Лур’є, Я.С. Підстригача, Ю.К. Рубцова, І.Н. Снеддона, Ю.І. Соловйова, С.П. Тимошенка, Н.Г. Хомасуридзе, М.О. Шульги та інших авторів. В цих роботах розглянуті питання загальної теорії пружності та динамічної теорії пружності. Опису лінійного та нелінійного деформування, в тому числі в умовах термосилового навантаження, присвячені роботи М.І. Бобиря, А.П. Дзюби, О.З. Галішина, В.Г. Карнаухова, Г.І. Львова, С.М. Шляхова, та ін. Основні положення теорії та методів розв’язання задач термов’язкопружнопластичності викладені в роботах І. А. Біргера, Д. Друкера, О.О. Іл’юшина, Ю.І. Кадашевича, Л.М. Качанова, Ю.Г. Коротких, М.М. Малініна, Р. Мізеса, Г.С. Писаренка, Ю.М. Работнова, В.М. Соколовського, Р. Хілла,

Ю.М. Шевченка, К.Ф. Одквіста. Огляди з питань розв'язання вказаних задач наведені в роботах В.А. Мерзлякова, В.Г. Савченка, Ю.М. Шевченка. Значні успіхи в області теоретичних і експериментальних досліджень різних процесів, які супроводжуються великими пружно-пластичними деформаціями, викладені в працях Б.О.Горлача, В.І.Кондоурова, В.І.Левитаса, О.О.Поздєєва, Д.Д.Работягова, Н.Н.Lee, F.Sidoroff.

Систематичне викладення основних засад теорії повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу і методів розв'язання задач проведено в роботах О.О.Іл'юшина, Л.М.Качанова, Ю.М.Работнова, К.Ф.Одqvist та ін. Подальший розвиток теорії і методів розв'язання задач повзучості проведено в роботах вітчизняних вчених В.П.Голуба, Г.С.Писаренка і М.С.Можаровського, М.І.Бобири, К.М.Русінко, Ю.М.Шевченка і О.З.Галішина, Г.І.Львова і О.К.Морачковського, В.В.Михалевича інших українських та багатьох іноземних дослідників.

На основі проведеного огляду літературних джерел показана недостатність висвітлення в наукових публікаціях проблеми розв'язання на основі МСЕ окресленого кола задач. Таким чином, в даній роботі розглядаються фізично і геометрично нелінійні задачі деформування, континуального руйнування, просторових призматичних тіл неканонічної форми та складної структури.

У другому розділі наведені вихідні співвідношення теорії пружності, пружнопластичності та повзучості з урахуванням пошкодженості та співвідношення для визначення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного скінченного елемента.

При наявності незворотних деформацій пластичності і повзучості зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається на основі співвідношень теорії пластичного течіння [Качанов Л.М.] і теорії спрочнення [Работнов Ю.М.]. В цьому випадку припущення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$ може бути подане у вигляді :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^c \quad (1)$$

Опис деформування в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості здійснюється на основі співвідношень теорії повзучості, що містить параметр пошкодженості [Ю.М. Работнов]:

$$\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = D \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^m \quad (2)$$

де ξ_i^c – інтенсивність швидкості деформацій повзучості, ω – параметр пошкодженості матеріалу $0 < \omega < 1$; $D = D(T)$, $m = m(T)$ – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Для чисельного дослідження деформування просторових тіл неканонічної форми та складної структури на основі МССЕ використовуються скінченний елемент зі змінними механічними та геометричними параметрами (рис. 1,б,в).

Розподіл переміщень у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$U_{n'} = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} U_{n'(s_1,s_2)} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} s_1 X^1 + \frac{1}{2} s_2 X^2 + s_1 s_2 X^1 X^2 \right) \quad (3)$$

де $U_{n'(s_1,s_2)}$ вузлові значення переміщень, які зображені в базовій системі координат $z^{n'}$ за їх компонентами, s_1 та s_2 подвоєні координати вузлів відносно осей x^1 та x^2 за якими обчислюється їхнє положення в системі координат.

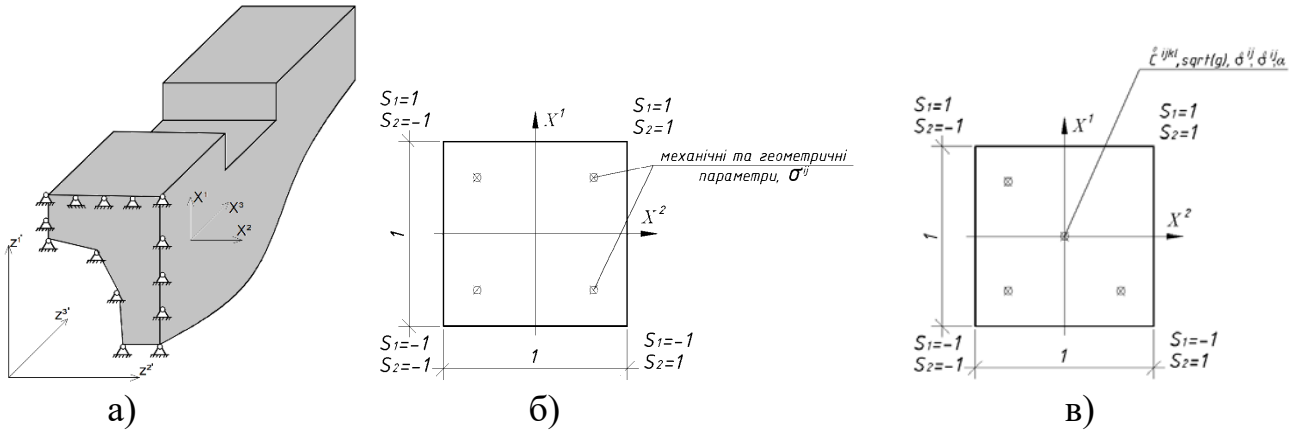


Рис 1. Довільно навантажене призматичне тіло (а), поперечний переріз СЕ зі змінними механічними та геометричними параметрами (б) та з усередненими механічними та геометричними параметрами (в).

Відповідно до моментної схеми СЕ компоненти тензора деформацій скінченного елемента подано відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha(\alpha)} &= \epsilon_{\alpha(\alpha)} + \epsilon_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, & \epsilon_{12} &= \epsilon_{12}, \\ \epsilon_{\alpha 3} &= \epsilon_{\alpha 3} + \epsilon_{\alpha 3, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, & \epsilon_{33} &= \epsilon_{33} + \epsilon_{33, \alpha} x^{\alpha}, \end{aligned} \quad (4)$$

Зв'язок між деформаціями та коефіцієнтами розкладання переміщень у ряд Фур'є наведено нижче:

$$\{\epsilon\} = \sum_{\ell=1}^L \left([B_1]_{\ell} \sin \frac{\ell \pi (x^3+1)}{2} + [B_2]_{\ell} \cos \frac{\ell \pi (x^3+1)}{2} \{U\}_{\ell} \right) \quad (5)$$

Запишемо варіацію енергії через коефіцієнти розкладу переміщень в ряди Фур'є $\{U\}_{\ell}$ і вузлові реакції $\{r\}_{\ell}$ призматичного скінченного елемента:

$$\delta W = \sum_{\ell=1}^L (\delta \{U\}_{\ell}^T) \{r\}_{\ell} \quad (6)$$

$$\text{де } \{r\}_{\ell} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([B_1]_{\ell}^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \sin \frac{\ell \pi (x^3+1)}{2} dx^3 + [B_2]_{\ell}^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \cos \frac{\ell \pi (x^3+1)}{2} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 \quad (7)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{r\}_{\ell} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[([B_1]_{\ell}^T \{\sigma_1\}_{\ell} + [B_2]_{\ell}^T \{\sigma_2\}_{\ell}) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1 x_j^2)} \quad (8)$$

де I , J та M – кількість точок інтегрування в напрямку вісей x^1, x^2 та x^3 відповідно, H_i та H_j є ваговими функціями, x_i^1 та x_j^2 координати точок інтегрування, що визначаються на основі формул гармонійного аналізу.

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W = \sum_{\ell=1}^L (\delta \{U\}_{\ell}^T) [K]_{\ell(\ell)} \{U\}_{\ell} \quad \text{де} \quad [K]_{\ell(\ell)} = \sum_{i=1}^I \int_{j=1}^J \left[([B_1]_{\ell}^T + [B_2]_{\ell}^T) [D] ([B_1]_{\ell} + [B_2]_{\ell}) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{x_i^1 x_j^2} \quad (9)$$

Розроблений згідно основних положень МССЕ СЕ зі змінними механічними та геометричними параметрами дозволяє з єдиних позицій просторової задачі теорії пружності розглядати, як масивні так і тонкостінні елементи конструкцій і їх комбінації.

Отримані співвідношення (8) і (9) не накладають жодних обмежень на розподіл механічних і геометричних параметрів в площині скінченного елемента по будь-якій з осей x^i , проте приводять до необхідності виконання значного обсягу обчислень, що пов'язані з операціями чисельного інтегрування.

Усунути указаний недолік дозволяє перехід до інтегрування в замкненому

вигляді, але це потребує введення обґрунтованих гіпотез відносно усереднення механічних і геометричних параметрів.

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталей C та визначник g матриці, що складена з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ (рис.1,в).

Обчислимо такі інтеграли:

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0, \\ \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases} \quad (10)$$

Виконуючи інтегрування виразу (7) з урахуванням (10), отримаємо вектор вузлових реакцій:

$$\{r\}_\ell = \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ B_1 \end{Bmatrix}_\ell^T \{ \sigma_1 \}_\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_2 \end{Bmatrix}_\ell^T \{ \sigma_2 \}_\ell + \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{1,1} \end{Bmatrix}_\ell^T \{ \sigma_{1,1} \}_\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{2,1} \end{Bmatrix}_\ell^T \{ \sigma_{2,1} \}_\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{1,2} \end{Bmatrix}_\ell^T \{ \sigma_{1,2} \}_\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{2,2} \end{Bmatrix}_\ell^T \{ \sigma_{2,2} \}_\ell \right] \sqrt{g} \quad (11)$$

Для отримання матриці жорсткості використовуємо зв'язок деформацій і напружень по закону Гука у вигляді $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{u\}$:

$$\begin{aligned} [K]_{\ell(\ell)} = & \left\{ \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ B_1 \end{Bmatrix}_\ell^T + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_2 \end{Bmatrix}_\ell^T \right) [D] \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ B_1 \end{Bmatrix}_\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_2 \end{Bmatrix}_\ell \right) + \frac{1}{12} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ B_{1,1} \end{Bmatrix}_\ell^T + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{2,1} \end{Bmatrix}_\ell^T \right) [D_1] \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ B_{1,1} \end{Bmatrix}_\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{2,1} \end{Bmatrix}_\ell \right) + \right. \\ & \left. + \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ B_{1,2} \end{Bmatrix}_\ell^T + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{2,2} \end{Bmatrix}_\ell^T \right) [D_2] \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ B_{1,2} \end{Bmatrix}_\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{2,2} \end{Bmatrix}_\ell \right) \right\} \int \sqrt{g} \quad (12) \end{aligned}$$

Отримані на основі МССЕ вирази матриці жорсткості (12) і вектора вузлових реакцій (9) СЕ з усередненими механічними та геометричними параметрами із змінними компонентами метричного тензора дозволяють суттєво зменшити загальний обсяг обчислень порівняно з елементами зі змінними механічними та геометричними параметрами при однакових сіткових моделях.

У третьому розділі сформульовано розв'язувальні співвідношення на основі представлення переміщень поліномами. Такий підхід дозволяє значно розширити спектр граничних умов, які можна задати на торцях тіла. У цьому випадку неможливо звести розв'язання вихідної просторової крайової задачі до послідовності двовимірних задач, що робить критично важливим обґрунтований вибір поліномів. Правильний вибір поліномів визначає як обумовленість матриці системи рівнянь, від якої залежить збіжність інтеграційних алгоритмів її розв'язання, так і універсальність підходу стосовно можливості задоволення різноманітних варіантів граничних умов на торцях тіла.

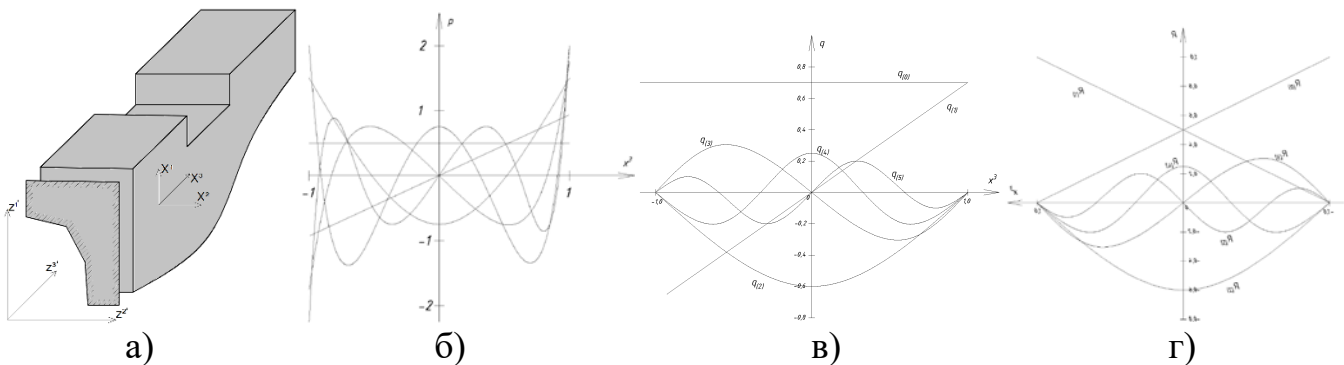


Рис. 2. Призматичне тіло складної форми (а), ортонормовані поліноми Лежандра (б), графіки функцій $q_{(i)}$ (в), графіки функцій $R_{(i)}$ (г).

Представимо переміщення у вигляді розкладання по поліномах

$$U_{n'} = \sum_{i=0}^L \bar{U}_{n'}^i \varphi^{(i)}, \quad (13)$$

де $\varphi^{(i)}$ – поліноми степені i ; $\bar{U}_{n'}^i$ – коефіцієнти розкладання переміщень по $\varphi^{(i)}$.

Виразимо переміщення через коефіцієнти їх розкладання за поліномами відповідно до (13):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha(\alpha)} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{i=0}^L \frac{1}{2} \left[\bar{Z}_{,\alpha}^{0'} S_{(\alpha)} + \left(\bar{Z}_{,12}^{0'} S_{(\alpha)} + 2\bar{Z}_{,\alpha}^{0'} S_1 S_2 \right) x^{(3-\alpha)} \right] \varphi^{(i)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^i, \\ \varepsilon_{12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{i=0}^L \frac{1}{4} \left(\bar{Z}_{,1}^{0'} S_2 + \bar{Z}_{,2}^{0'} S_1 \right) \varphi^{(i)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^i, \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{i=0}^L \left\{ \frac{1}{8} \left[\bar{Z}_{,\alpha}^{0'} + \left(\bar{Z}_{,12}^{0'} + 2\bar{Z}_{,\alpha}^{0'} S_{(3-\alpha)} \right) x^{(3-\alpha)} \right] \cdot \varphi_{,3}^{(i)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^i + \frac{1}{4} \bar{Z}_{,3}^{0'} (S_\alpha + \right. \\ &\quad \left. 2S_1 S_2 x^{(3-\alpha)}) \varphi^{(i)} \bar{U}_{3'(S_1, S_2)}^i \right\}, \\ \varepsilon_{33} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{i=0}^L \frac{1}{4} \bar{Z}_{,3}^{0'} (1 + 2S_\alpha x^\alpha) \varphi_{,3}^{(i)} \bar{U}_{3'(S_1, S_2)}^i, \end{aligned} \quad (14)$$

Запишемо вираз варіації енергії через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах і вузлові реакції $\{\bar{r}\}$ скінченного елемента:

$$\delta W = \sum_{i=0}^L \left(\delta \{\bar{U}\}_i^T \right) \{\bar{r}\}_i \text{ де } \{\bar{r}\}_i = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([\bar{B}_1]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi^{(i)} dx^3 + + [\bar{B}_2]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi_{,3}^{(i)} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 \quad (15)$$

Інтегруючи по x^3 чисельно, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій призматичного скінченного елемента зі змінними у перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами (СЕ1) через напруження:

$$\{\bar{r}\}_i = \sum_{l=1}^I \sum_{j=1}^I \left[\left([\bar{B}_1]^T \{\bar{\sigma}_1\}_l + [\bar{B}_2]^T \{\bar{\sigma}_2\}_l \right) \sqrt{g} H_i H_l \right]_{(x_i^1, x_l^2)} \quad (16)$$

Запишемо вираз для варіації енергії деформації у вигляді:

$$\delta W = \sum_{i=0}^L \left(\delta \{\bar{U}\}_i^T \right) [\bar{K}]_{(in)} \{\bar{U}\}_i, \quad (17)$$

$$\text{де } [\bar{K}]_{in} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_1] G_1^m + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_1] G_2^m + [\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_2] G_3^m + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_2] G_4^m \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2$$

Після інтегрування по x^1 і x^2 ,

$$[\bar{K}]_{in} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \left[\left([\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_1] G_1^m + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_1] G_2^m + [\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_2] G_3^m + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_2] G_4^m \right) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)} \quad (18)$$

отримуємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного скінченного елемента зі змінними в перерізі $x^3 = const$ механічними і геометричними параметрами (СЕ1)

Для СЕ з усередненими механічними та геометричними параметрами маємо:

$$\{\bar{r}\}_i = \left[[\bar{B}_1]^T \left\{ \bar{\sigma}_1 \right\}_i + [\bar{B}_2]^T \left\{ \bar{\sigma}_2 \right\}_i + \frac{1}{12} \left([\bar{B}_{1,1}]^T \left\{ \bar{\sigma}_{1,1} \right\}_i + [\bar{B}_{2,1}]^T \left\{ \bar{\sigma}_{2,1} \right\}_i + [\bar{B}_{1,2}]^T \left\{ \bar{\sigma}_{1,2} \right\}_i + [\bar{B}_{2,2}]^T \left\{ \bar{\sigma}_{2,2} \right\}_i \right) \right] \sqrt{g} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [\bar{K}]_{in} &= \left[[\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_1] G_1^m + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_1] G_2^m + [\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_2] G_3^m + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_2] G_4^m + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left([\bar{B}_{1,1}]^T [D_1] [\bar{B}_{1,1}] G_1^m [\bar{B}_{2,1}]^T [D_1] [\bar{B}_{1,1}] G_2^m + [\bar{B}_{1,1}]^T [D_1] [\bar{B}_{2,1}] G_3^m + [\bar{B}_{2,1}]^T [D_1] [\bar{B}_{2,1}] G_4^m + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\bar{B}_{1,2}]^T [D_2] [\bar{B}_{1,2}] G_1^m + [\bar{B}_{2,2}]^T [D_2] [\bar{B}_{1,2}] G_2^m + [\bar{B}_{1,2}]^T [D_2] [\bar{B}_{2,2}] G_3^m + [\bar{B}_{2,2}]^T [D_2] [\bar{B}_{2,2}] G_4^m \right) \sqrt{g} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

де коефіцієнти матриці жорсткості $[\bar{K}]_{(in)}$ призматичного скінченного елемента із усередненими у перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами (СЕ2).

У четвертому розділі розглянуті питання побудови розрахункових співвідношень геометрично-нелінійного деформування. Суттєва зміна первісної геометрії тіла при формозмінненні обумовлює необхідність використовувати, окрім

початкової, ще актуальну конфігурацію (рис.3,а). Для побудови крокового процесу розв'язання еволюційних задач формозмінення додатково вводиться проміжна відлікова конфігурація, яка вибирається таким чином, щоб прирощення компонент метричного тензора при переході від проміжної відлікової конфігурації до актуальної були малі в порівнянні з G_{ij} (рис3,б). При великих деформаціях можливі значні повороти частин конструкцій, які не мають змінювати напружено-деформований стан тіла. В цьому випадку необхідно, щоб величини, які входять в визначальні співвідношення, задовольняли вимогам індиферентності.

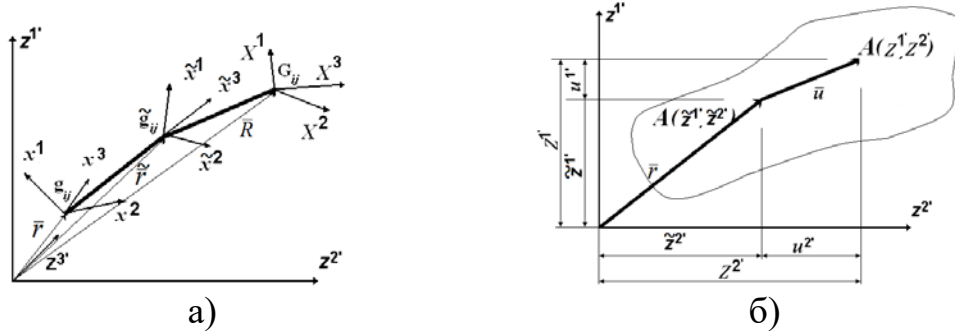


Рис.3. Метричні тензори $\hat{g}$, $\tilde{g}$, G (а), загальний вигляд вектора переміщень $\bar{u}$ (б)

В зв'язку з цим в роботі використані тензор напружень Коші і міра деформацій Фінгера. Обидва тензори і їх інваріанти задовольняють властивості індиферентності енергетичної сполученості і є енергетично сполученими. В якості об'єктивної похідної використовується похідна типу Олдройда.

Контрваріантні компоненти приросту деформацій при переході від відлікової перемінної до актуальної конфігурації представляються співвідношення:

$$\Delta \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{g}^{ij} - G^{ij}) = \frac{1}{2} (\tilde{g}^{ij} - \tilde{g}^{ij} - \Delta G^{ij}) = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{im} \Delta G_{mn} \tilde{g}^{jn}, \quad (21)$$

а коваріантні компоненти

$$\Delta \varepsilon_{kl} = \Delta \varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta \varepsilon^{ij} \tilde{g}_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl}. \quad (22)$$

Використовуючи вираз $\Delta G_{ij} = \tilde{z}_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'} + u_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'}$, запишемо коваріантні компоненти тензора приросту деформацій в актуальній конфігурації через переміщення:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{z}_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'} + u_{,i}^{m'} \tilde{z}_{,j}^{m'} + u_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'}). \quad (23)$$

Знаходимо варіацію приростів деформацій в актуальній конфігурації, використовуючи вираз (23):

$$\delta(\Delta \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\tilde{z}_{,i}^{m'} \delta u_{,j}^{m'} + \tilde{z}_{,j}^{m'} \delta u_{,i}^{m'} + \delta(u_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'}) \right) = \frac{1}{2} \left(\delta u_{,j}^{m'} (\tilde{z}_{,i}^{m'} + u_{,i}^{m'}) + \delta u_{,i}^{m'} (\tilde{z}_{,j}^{m'} + u_{,j}^{m'}) \right) \quad (24)$$

вираз варіації енергії деформації скінченного елемента $\delta W = \int_{-1}^1 ((\sigma\{\Delta \varepsilon\})^T \{\Delta \dot{\sigma}\} + \frac{1}{12} \int_{\alpha=1}^2 (\sigma\{\varepsilon\}_{,\alpha}^T \{\dot{\sigma}\}_{,\alpha})$ і після чисельного інтегрування по формулі Гауса, отримаємо:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta\{U_l\} \{r_l\} \quad (25)$$

$$\text{де } \{r_l\} = \sum_{k=1}^N \left(([E]^T \{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^Z [E]_{,\alpha}^T \{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \varphi^{(l)} + ([F]^T \left\{ \dot{\sigma} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^Z [F]_{,\alpha}^T \{\dot{\sigma}\}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)}) \sqrt{G} \right)_k H_k \quad (26)$$

За своєю структурою вираз (26) збігається з аналогічним, отриманим без врахування великих пластичних деформацій, однак записаний в актуальній конфігурації.

Під час розрахунку елементів лінеаризованої матриці жорсткості (з урахуванням зміни геометрії) використовуються раніше отримані співвідношення:

$$[K_{lp}^A] = \sum_{k=1}^N (([E]^T[C][E]\varphi^{(l)}\varphi^{(p)} + [E]^T[C][F]\varphi^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)} + [F]^T[C][E]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)} + [F]^T[C][F]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)} + \\ + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^2 [E]_{,\alpha}^T[C]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi^{(l)}\varphi^{(p)} + [E]_{,\alpha}^T[C]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)} + [F]_{,\alpha}^T[C]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)} + [F]_{,\alpha}^T[C]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)})\sqrt{g})_k H_k$$

Усі вхідні параметри при цьому обчислюються в змінній відліковій конфігурації на кожному кроці за параметром зсуву.

У п'ятому розділі запропоновано новий алгоритмічний підхід для розв'язування реалістичних нелінійних крайових задач із конкурентною ефективністю за часом. Представлені розрахунки підтверджують, що НМСЕ зі зв'язаними векторами переміщень забезпечує ефективний за часом розв'язок без втрати базової точності. Крім того, НМСЕ демонструє вищу швидкість збіжності порівняно з готовими процедурами МСЕ під час обчислення параметра релаксації.

Розв'язання задач для неоднорідних призматичних тіл зі матрицею жорсткості стрічкової структури зазвичай здійснюється із застосуванням методу блочних ітерацій (ВІМ). Розроблений алгоритм враховує як пружні, так і пружно-пластичні деформації в межах лінійної та нелінійної систем рівнянь. Метод покрокового інтегрування включає параметр ВІМ для розв'язання як лінійного, так і нелінійного набору виразів, представлених у рівнянні 27.

$$\{U\}_{n+1}^m = \{U\}_n^m + \omega_{on}[K_{ll}]^{-1}(\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m) \quad (27)$$

де m - номер кроку, $\{U\}_n^m$, $\{U\}_{n+1}^m$ коефіцієнти розкладання вектора вузлових переміщень для ітерацій $n+1$, ω_{on} параметр релаксації ($1 \leq \omega < 2$), K_{ll} діагональна підматриця жорсткості системи, $\{Q\}_n^m$ позначає вектор вузлових навантажень, а $\{R\}_n^m$ позначає вектор вузлових реакцій на ітерації n .

Дійсні значення напружень $(\sigma^{ij})_n^m$, при наявності фізично нелінійних деформацій, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$(\sigma^{ij})_n^m = \frac{1}{3}\delta^{ij}(\sigma^{ij})_n^m + S_n^{*ij} = (\sigma_o)_n^m + S_n^{*ij}, \quad (28)$$

де S_n^{*ij} - компоненти девіатора напружень, що враховують наявність деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора S_n^{*ij} тензора дійсних напружень, що входять до формули (28), при розв'язку задачі пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості τ_s :

$$S_n^{*ij} = S_n^{ij} \frac{\tau_s}{\tau} \quad (15)$$

де $\tau = \sqrt{\frac{s_{ij}s^{ij}}{2}}$ - поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

На початку кожного часового кроку, коли одночасно відбуваються пластичні деформації та повзучість, розраховується межа повзучості. Ця межа залежить від температури, параметра зміцнення та швидкості деформації повзучості й визначається ітераційним методом за формулою:

$$\tau_c^m = \left[\frac{\varepsilon_c^{n-1}}{\alpha} (\psi)^\beta \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (16)$$

де α, β, γ контакти, визначені для даного матеріалу при даній температурі; ε_c^{n-1} швидкість деформації повзучості, обчислена на ітерації $n-1$. Тоді τ_s і τ_c порівнюються. Якщо $\tau_c \leq \tau_s$ то пластичні деформації відсутні і напруження

коригуються лише відповідно до величин деформацій повзучості. Якщо $\tau_c > \tau_s$ то можуть виникати тільки пластичні деформації.

У шостому розділі проведено порівняння ефективності скінченних елементів зі змінними та усередненими механічними і геометричними параметрами, а також досліджено збіжність рядів Фур'є, поліномів і МСЕ. Для більш обґрунтованого підтвердження достовірності отриманих результатів, які базуються на розробленій методиці та програмному забезпеченні, додатково розглянуто низку контрольних прикладів у пружній та пружно-пластичній постановках. Ці приклади охоплюють моделювання масивних і тонкостінних об'єктів, що дозволяє забезпечити комплексний аналіз достовірності і ефективності методики.

На рис. 4 показано порівняння результатів для призматичної балки, жорстко закріпленої на кінцях, при розрахунку в плоскій постановці. Еталонний розв'язок було отримано МСЕ. Під час розв'язання задачі НМСЕ для обох φ^l утримувалося

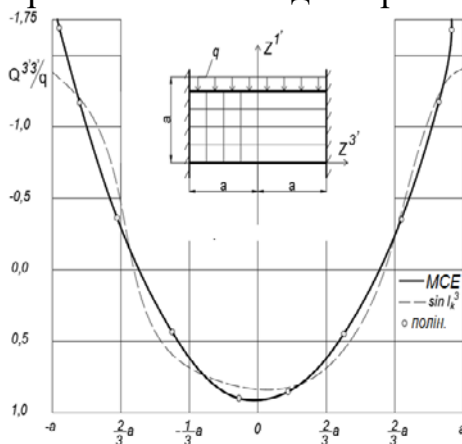


Рис. 4. Ефективність НМСЕ для призматичної балки, жорстко закріпленої на кінцях

по 5 членів ряду. Для розрахунків було прийнято значення модуля пружності $E=1$ та рівномірний розподіл навантаження.

Аналіз розподілів напружень $\sigma^{33'}$ вздовж $Z^{3'}$, отриманих на базі обох систем координатних функцій показав, що поліноми Міхліна забезпечують точнішу апроксимацію параметрів напружено-деформованого стану по всій довжині тіла з меншими обчислювальними витратами, оскільки зменшують кількість ітерацій з п'яти до чотирьох.

Ефективність розв'язання систем рівнянь методом блочних ітерацій визначається декількома факторами, такими як збіжність ітераційного процесу, визначення оптимального значення параметру релаксації ω_{on} та кількості невідомих, що впливають на швидкість збіжності.

Проведено кількісні дослідження пружного та пружно-пластичного деформування нескінченної смуги з прямокутним вирізом в умовах плоскої деформації (рис. 5,а). Аналіз кривих показує, що швидкість збіжності ітераційного процесу НМСЕ у 5 разів вища, ніж у МСЕ для лінійних систем.

При оптимальних значеннях ω досліджено збіжність методу блочних ітерацій для заданого розміру сітки та при збільшенні параметрів НМСЕ у 1,5 рази вздовж $Z^{3'}$ або збережених базисних функцій відповідно. Результати представлені на рис. 5,б у вигляді графіків залежності похибок визначення максимальних переміщень від кількості ітерацій.

Цифрою 1 позначено графік, отриманий для опорної сіткової області, а цифрою 2 – для уточненої. Із рис. 5,б видно, що збільшення кількості блоків у НМСЕ - матриці не впливає на швидкість збіжності ітераційного процесу, тоді як для МСЕ-матриць це призводить до значного (у 2,2 рази) збільшення кількості ітерацій. Криві, що

характеризують залежність кількості ітерацій від значення параметра релаксації для пружно-пластичного розрахунку, наведено на рис. 5,в.

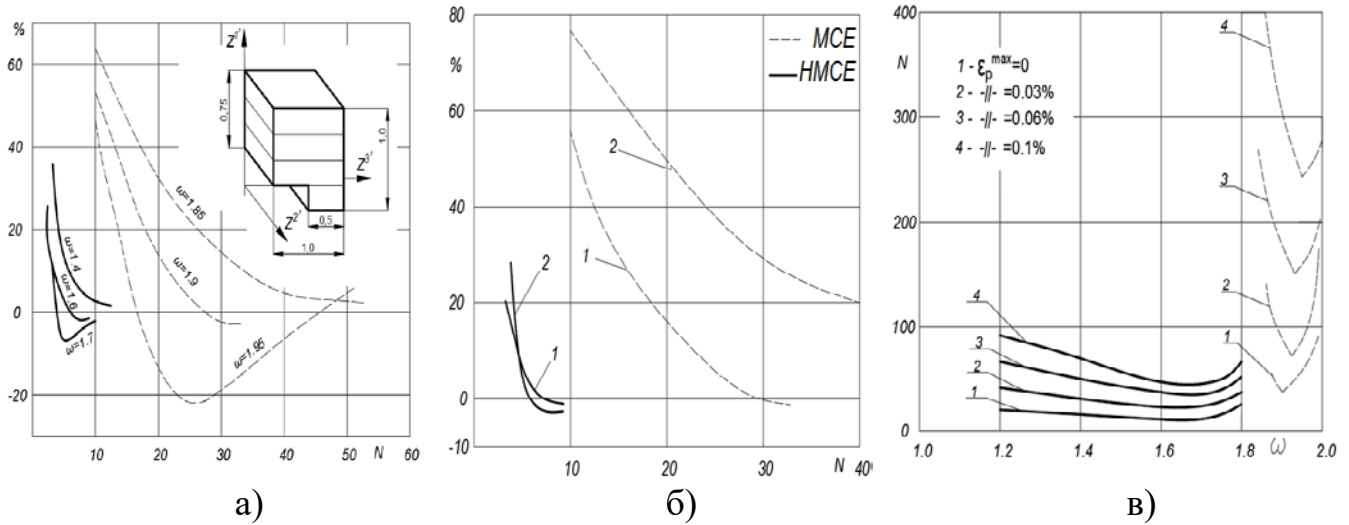


Рис. 5. Ефективність НМСЕ у криволінійних призматичних об'єктах у пружній та пружно-пластичній постановці

Аналіз отриманих даних підтверджує значну перевагу НМСЕ для класу задач, що розглядаються. Так, при максимальному рівні розвитку пластичної деформації ітераційний процес для НМСЕ сходиться в 5 разів швидше, ніж для МСЕ.

З метою порівняння ефективності обох варіантів скінченних елементів було розглянуто задачу про пружну рівновагу циліндричної панелі та пружно-пластичну деформацію нескінченної смуги прямокутного перерізу.

Розрахункова схема шарнірно закріплена по торцях і навантажена власною вагою панелі приведена на рис. 6 (а). Граничні умови :

$$U_{\alpha'}(z^{3'}=0) = U_{\alpha'}(z^{3'}=a) = 0, \quad \sigma_{(z^{3'}=0)}^{3'3'} = \sigma_{(z^{3'}=b)}^{3'3'} = 0 \quad (17)$$

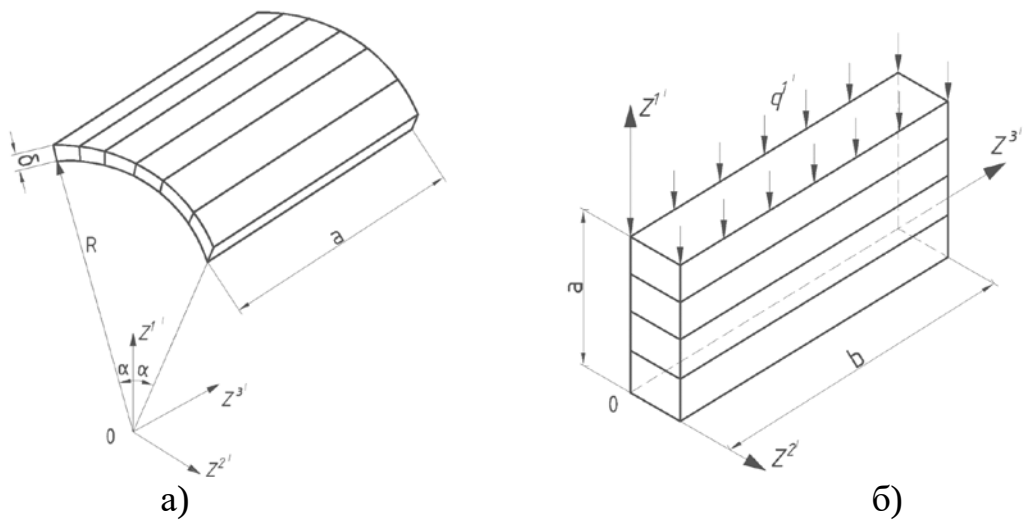


Рис. 6. Порівняння ефективності скінченних елементів зі змінними та усередненими механічними та геометричними параметрами

Дані, що відображають вплив на результати розрахунку панелі кількості скінченних елементів зі змінними механічними та геометричними параметрами,

представлені в табл. 1. У відсотках представлена похибка по відношенню до значень, обчислених при $M = 12$. Її зміна показує, що для отримання порівняно стійких результатів потрібно не менше 8 елементів із змінними геометричними і механічними параметрами (СЕ1). Виявилось, що при цьому значенні M використання замість них елементів з усередненими механічними і геометричними параметрами (СЕ2) практично не впливає на величину максимальних переміщень (табл. 2), дозволяючи в той же час значно скоротити обсяг обчислень. Розрахункова схема нескінченної у напрямку $Z^{2'}$ смуги приведена на рис. 6 (б). Граничні умови:

$$U_{\alpha'(z^{3'}=0)} = U_{\alpha'(z^{3'}=b)} = 0, \quad \sigma_{(z^{3'}=0)}^{3'3'} = \sigma_{(z^{3'}=b)}^{3'3'} = 0 \quad (18)$$

Максимальне значення відносних переміщень $V_{1'} = \frac{U_{1'}}{a}$ та $V_{3'} = \frac{U_{3'}}{a}$, обчислених при різній кількості СЕ1 по висоті поперечного перерізу елемента, наведені в табл. 3.

Незважаючи на розвиток області пластичних деформацій, що сягають близько 1%, чисельні дослідження демонструють, що використання такої ж кількості СЕ2 спричиняє лише незначне (менше ніж 1%) зменшення результатів (табл. 4).

Таблиця 1.

M	$V_{3'} \cdot 10^2$	%	$V_{1'}$	%
3	5,170	15,34	1,306	6,61
5	5,836	4,43	1,253	2,31
8	6,041	1,08	1,233	0,65
12	6,107	-	1,225	-

Таблиця 2.

Вид СЕ	$V_{3'} \cdot 10^2$	%	$V_{1'}$	%	$\frac{\tau_1}{\tau_2}$
СЕ1	6,041	0,00	1,233	0,08	1,61
СЕ2	6,041		1,234		

Таблиця 3

M	$V_{3'}$	%	$V_{1'}$	%
2	0,914	22,4	1,909	14,8
4	1,092	7,3	2,107	6,0
8	1,162	1,3	2,216	1,1
12	1,178	-	2,241	-

Таблиця 4

Вид СЕ	$V_{3'}$	%	$V_{1'}$	%	$\frac{\tau_1}{\tau_2}$
СЕ1	1,162	0,7	2,216	0,9	1,82
СЕ2	1,154		2,195		

Актуальним напрямом досліджень є задачі, пов'язані з визначенням напружено-деформованого стану призматичних тіл під впливом локалізованих навантажень, оскільки саме в таких випадках спостерігається потенційне зниження ефективності НМСЕ у порівнянні з традиційним МСЕ). Додатково важливими є задачі, що стосуються пружно-пластичної рівноваги. Для здійснення контрольного аналізу обрано дві задачі: задачу Бусінеска для півплощини, навантаженої зосередженою силою, та задачу пружно-пластичної деформації нескінченної смуги прямокутного перерізу, яка була розглянута вище.

Розрахункова схема задачі Бусінеска наведена на рис. 7. На рис. 8 суцільною лінією зображена еталонна епюра напружень $\sigma^{1'1'}$, побудована вздовж лінії $Z^{1'}$. Дані, що характеризують точність визначення $\sigma^{1'1'}$ в точці A в залежності від кількості невідомих, приведені в табл. 5. Тут M - кількість вузлів сіткової області МСЕ або утримуваних членів розкладання НМСЕ у нап. $Z^{3'}$.

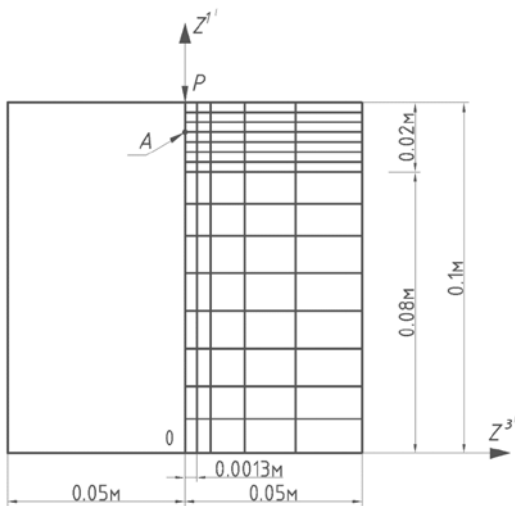
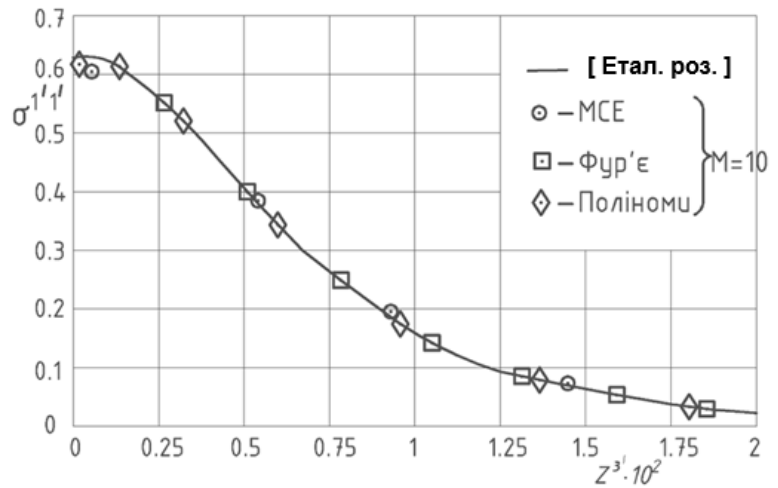


Рис. 7. Розрахункова схема.

Рис. 8. Епюра напружень $\sigma^{1'1'}$.

Таблиця 5.

M	МСЕ	Фур'є	Поліноми
5	6,3%	7,8%	5,0%
10	4,4%	1,9%	2,8%
20	3,8%	1,5%	2,3%

Таблиця 6.

m	$v_{max}^{1'}$	%	v_{max}^3	%
9	1,710	23,2	0,837	28,6
25	2,010	9,7	1,028	12,4
81	2,188	1,7	1,142	2,6
169	2,226	-	1,173	-

Наведені результати показують, що збіжність досліджуваних координатних функцій в розглянутій задачі одного порядку, причому при $M \geq 10$ точність розв'язання НМСЕ навіть трохи вище, ніж МСЕ.

Аналогічні дослідження з урахуванням пластичних властивостей матеріалу виконані для нескінченної смуги прямокутного перерізу, навантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням рис. 9. Дані, які відображають вплив m на максимальні значення відносних зсувів $v_1' = \frac{u_1'}{a}$ та $v_3' = \frac{u_3'}{a}$ наведені в таблиці 6.

Характер збіжності величин v_1' вздовж осі z^3 зображений на рис. 10. На основі наведених результатів розв'язання, відповідне до $m = 169$, прийняте за еталонне для подальших досліджень. Результати зіставлення ефективності подання представлені вздовж осі z^3 різними координатними функціями наведені на рис. 11 у вигляді графіків, що відображають залежність похибок обчислень максимальних значень u_1' від кількості утримуваних членів розкладання M .

В той же час слід зазначити значну перевагу НМСЕ у порівнянні з МСЕ. На рис. 12 суцільною лінією наведені епюри еталонних значень інтенсивності пластичних деформацій, а на рис. 13 відносних дотичних, $\bar{\sigma}^{1'3'} = \frac{\sigma^{1'3'}}{\tau_s}$ і нормальних $\bar{\sigma}^{3'3'} = \frac{\sigma^{3'3'}}{\tau_s}$ напружень, побудованих в перерізі $z^1 = a$. Хрестиками позначені результати отримані МСЕ при 9 вузлах в напрямку z^3 , кругами і ромбиками - НМСЕ при $m = 5$ для рядів Фур'є і поліномів відповідно. Спостерігається гарна узгодженість у визначенні різних параметрів напружено-деформованого стану розглянутими підходами, проте збіжність НМСЕ майже в два рази вище по z^3 , ніж МСЕ.

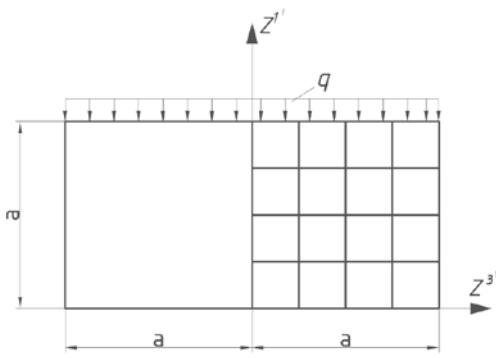


Рис. 9. Поперечний переріз смуги із СЕ.

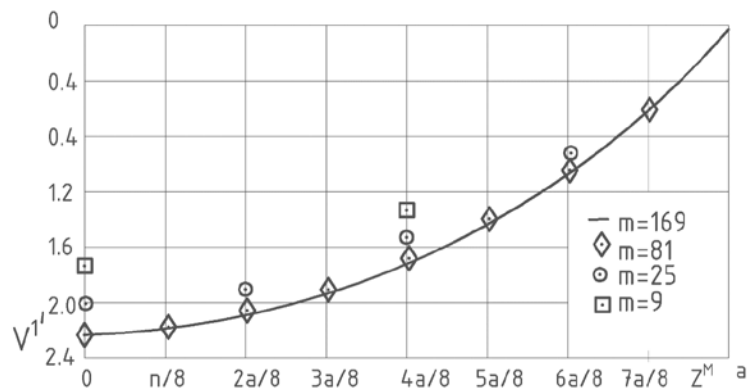


Рис. 10. Максимальні значення відносних зсувів

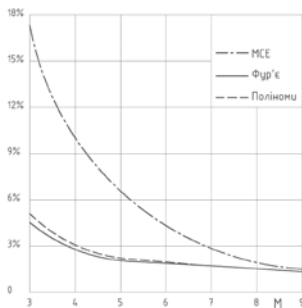


Рис. 11. Графіки зіставлення функцій

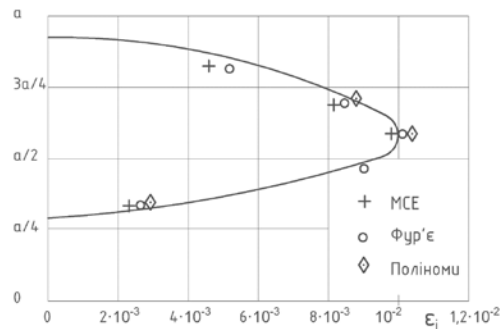


Рис. 12. Епюри інтенсивності пластичних деформацій

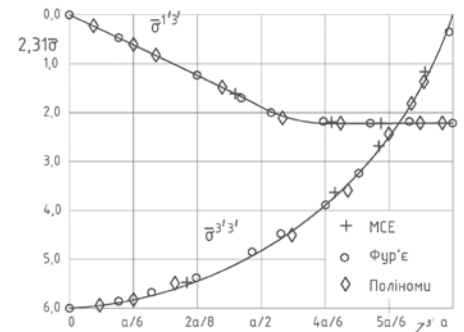


Рис. 13. Графіки дотичних напружень

Аналіз збіжності НМСЕ і МСЕ для об'єктів із поступовою зміною геометричних і матеріальних характеристик уздовж осі розтягування. Виявлено, що такі зміни не призводять до суттєвих відхилень напружень та деформацій.

На рис. 14 (а) представлено пружну рівновагу бруса, нижня поверхня якого описана параболою, а його висота є плавною та неперервною функцією відносно осі z^3 . Характер збіжності НМСЕ представлений на рис. 14,б у вигляді графіка (суцільна лінія), що відображає залежність похибки обчислення максимального відносного зсуву від числа утримуваних членів розкладання третьому напрямку. Очевидно, що похибка більш ніж удвічі перевищує похибку кусково-лінійної апроксимації.

Результати збіжності, наведені в таблиці 7, показують, що 144 скінченних елементів є достатніми, оскільки подальше збільшення їх кількості не дає суттєвого ефекту.

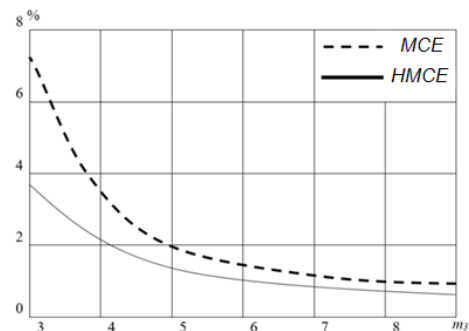
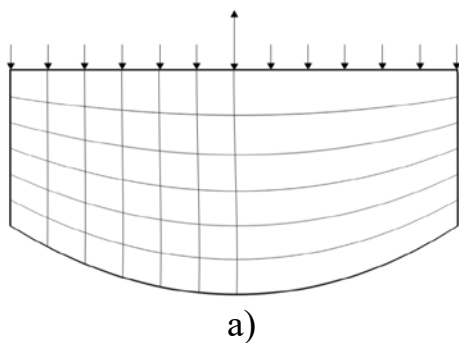


Рис. 14. Пружна рівновага бруса

Таблиця 7.

m	V_{max}^1	%	V_{max}^2	%
25	$1,535 \cdot 10^2$	3.3	$9,109 \cdot 10^3$	5.2
81	$1,579 \cdot 10^2$	0.6	$9,503 \cdot 10^3$	1.1
169	$1,588 \cdot 10^2$	—	$9,608 \cdot 10^3$	—

Таблиця 8.

m	V_{max}^1	%	V_{max}^2	%
25	$1,517 \cdot 10^2$	3.3	$8,762 \cdot 10^3$	5.2
81	$1,557 \cdot 10^2$	0.6	$9,239 \cdot 10^3$	1.1
169	$1,565 \cdot 10^2$	—	$9,373 \cdot 10^3$	—

На рис. 15 (а) показана розрахункова схема і скінченоеlementні сітки для аналізу НМСЕ та МСЕ. На рис. 15 (б) показано залежність між відсотковою похибкою визначення максимального відносного зміщення та кількістю невідомих.

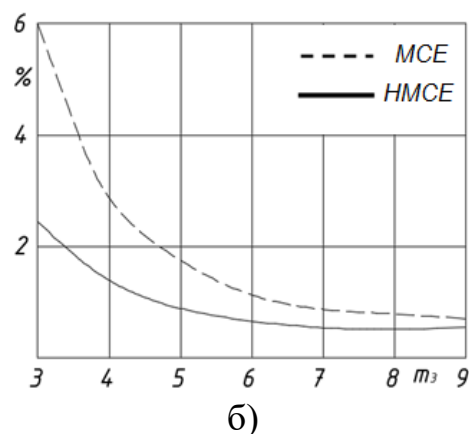
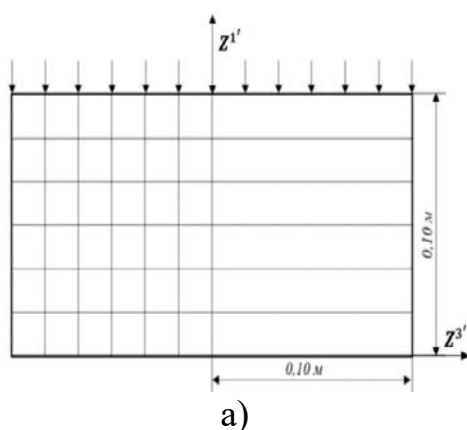


Рис. 15. Пружна рівновага призматичного тіла з змінним модулем пружності

Для з'ясування характеру збіжності результатів НМСЕ і МСЕ при різній глибині вирізу, проаналізовано результати розв'язку задачі завдання про розтягнення смуги з дугоподібним вирізом радіусом z з плавним збільшенням глибини вирізу, як показано на рис. 16. Результати, наведені в таблиці 9, свідчать про те, що НМСЕ є менш надійним, оскільки існує 2% похибки в розрахунках K_t за допомогою НМСЕ. У таблиці 10 показано зміну похибки розрахунків зі збільшенням точності апроксимації Z^3 . У цьому тестовому прикладі, для фіксованої кількості невідомих, як НМСЕ, так і МСЕ дають однаковий розв'язок.

Порівняння швидкості збіжності традиційного МСЕ та НМСЕ при ступінчастій зміні модуля пружності на прямокутній пластині з квадратною вставкою, як показано на рис. 17 (а). За відношення модулів пружності пластини до вставки, яке становить близько чотирьох порядків, параметри напружено-деформованого стану наближаються до еталонних значень, як показано на рис. 17 (а). Для достовірності результатів при моделюванні вирізу прямокутної форми без пружності дуже важливо забезпечити коректність природних граничних умов на внутрішній поверхні.

Розглянемо розподіл напружень у скінченних елементах, як показано на рис. 17 (б), при проходженні через вирізи. З рис. 17 (б) видно, що граничні умови на вільній поверхні є коректними, оскільки напруження наближаються до нуля поблизу контуру отвору. На рис. 17 (в) показано узгодження між цими двома методами.

У таблиці 11 показано результати збіжності НМСЕ і МСЕ, оскільки збережені члени ряду представляють Z^3 зміни осей.

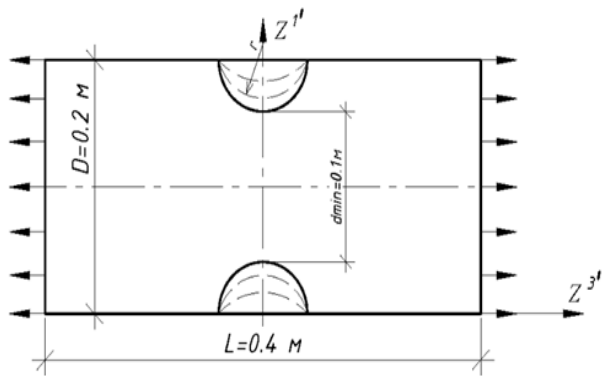


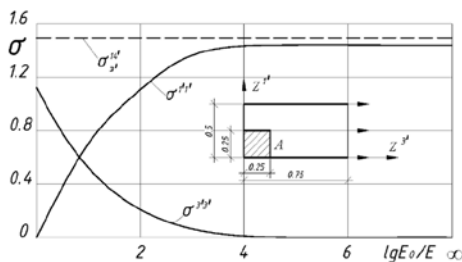
Рис. 16. Смуга з радіальним фігурним вирізом

Таблиця 9.

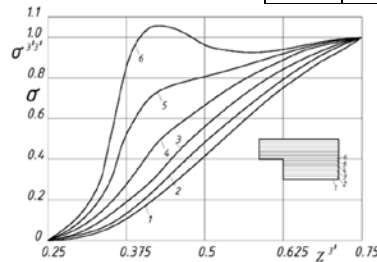
D/d		L	1.1	1.54	2
K_t	HMCE	1,01	1,215	1,44	1,485
	MCE	1,0	1,23	1,46	1,51
	%	1	1,2	1,4	1,65

Таблиця 10.

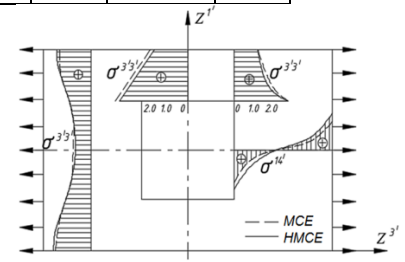
m_3	HMCE		MCE	
	σ_{max}	%	σ_{max}	%
7	2.81	7.1	2.73	9.8
9	3.01	0.3	2.9	4
13	2.97	1.6	2.98	1.3



а)



б)



в)

Рис. 17. Прямокутна пластина з квадратною вставкою під дією одиничного навантаження рівномірної інтенсивності

Таблиця 11.

m_3	HMCE		MCE	
	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{2'}$	%
4	$7.645 \cdot 10^{-6}$	2.6	$7.452 \cdot 10^{-6}$	5.2
7	$7.913 \cdot 10^{-6}$	-0,8	$7.737 \cdot 10^{-6}$	1.44
10	$7.920 \cdot 10^{-6}$	-0,9	$7.806 \cdot 10^{-6}$	0.6

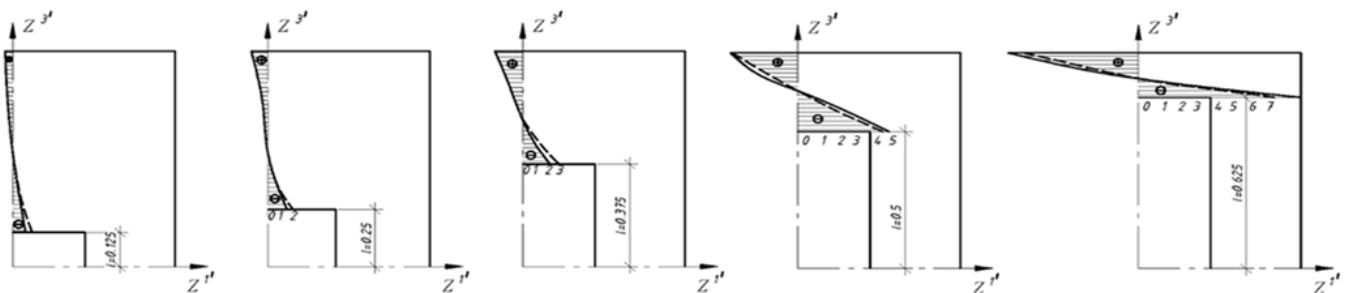


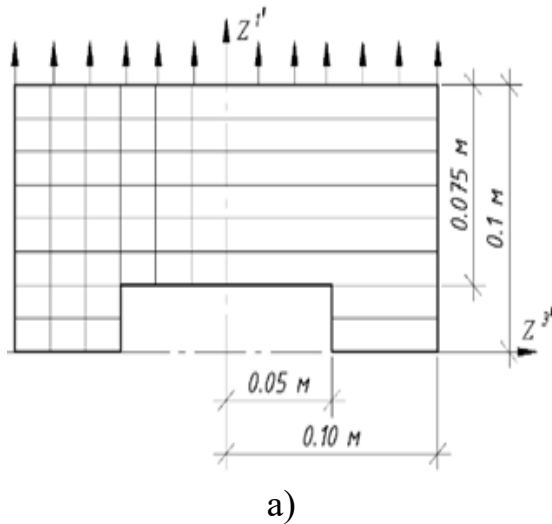
Рис. 18. Діаграми напружень при змінному розмірі вирізів.

Діаграми напружень $\sigma^{1'1'}$ у перерізі, що проходить через вісь Z^3 показано на рис. 18 при зміні довжини вирізу.

У наступному прикладі порівнюється збіжність HMCE і MCE для прямокутної смуги з пружною і пластичною деформацією, яка має виріз, як показано на рис. 19 (а). У табл. 12 наведено результати апроксимації максимальних відносних переміщень методом MCE. З неї випливає, що розв'язок з 289 вузлами можна вважати еталонним.

Експеримент на збіжність проводився з використанням 13 елементів у напрямку Z^1 . На рис. 19 (б) показано змiну відсоткової похибки для апроксимацій НМСЕ і МСЕ для пружно-пластичних тіл.

Рис. 20 ілюструє результати дослідження пружного деформування для просторово нерівномірно навантаженої оболонки, де серединна поверхня представлена у вигляді еліптичної параболи

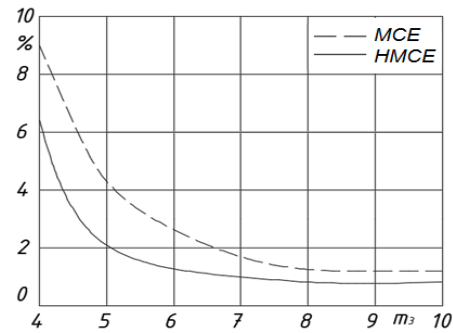


а)

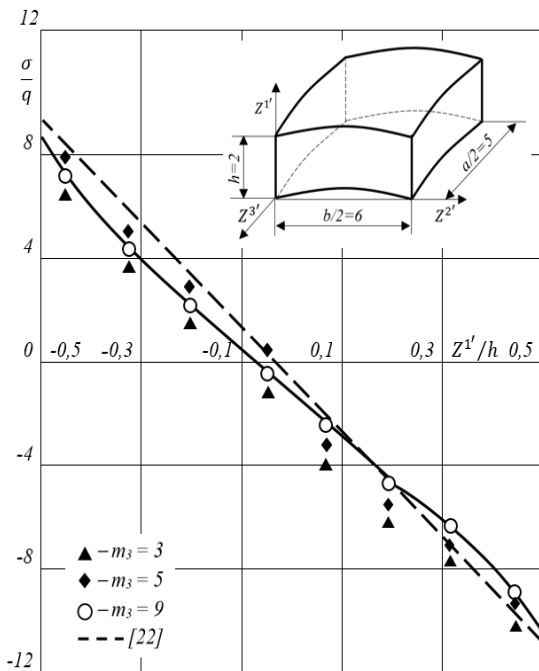
Рис. 19. Прямокутна смуга з пружно-пластичною деформацією та вирізом

Таблиця 12.

m	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{3'}$	%
25	$1,460 \cdot 10^{-2}$	3.3	$-1,075 \cdot 10^{-2}$	5.2
81	$1,508 \cdot 10^{-2}$	0.6	$-1,129 \cdot 10^{-2}$	1.1
169	$1,519 \cdot 10^{-2}$	0.6	$-1,144 \cdot 10^{-2}$	1.1
289	$1,523 \cdot 10^{-2}$	—	$-1,149 \cdot 10^{-2}$	—



б)



Таблиця 13.

$Z^{1'}$	m_3	3	5	9	11
0	$U^{1'}$	0,794	0,839	0,841	0,850
	%	8,6	3,3	3,2	-
0,4	$U^{1'}$	0,808	0,850	0,853	0,883
	%	8,5	3,7	3,4	-
0,8	$U^{1'}$	0,814	0,858	0,862	0,889
	%	8,4	3,5	3,0	-
1,4	$U^{1'}$	0,874	0,859	0,861	0,888
	%	8,3	3,3	3,0	-
1,6	$U^{1'}$	0,808	0,852	0,857	0,880
	%	8,2	3,2	2,6	-
2	$U^{1'}$	0,796	0,844	0,849	0,885
	%	7,7	2,4	1,8	-

Рис. 20. Порівняльний аналіз найбільших напружень на товстостінній оболонці.

Результати в табл. 13 показують, що розв'язок з 5 членами розкладання є дещо менш точним порівняно з розв'язком при U^1 . Однак, результати все ще близькі до результатів, представлених в роботі Григоренко, з різницею лише в 3%.

Обґрунтованість розв'язків НМСЕ для фізично нелінійних задач представлена за допомогою пружно-пластичного аналізу куба, що нагрівається при нерівномірному розподілі температури. Рис. 21,а ілюструє розрахункову схему об'єкта та розподіл температури. Результати представлені у вигляді розподілу напружень - суцільною лінією для пружно-пластичного випадку та пунктирною лінією для пружного випадку на рис. 21,б.

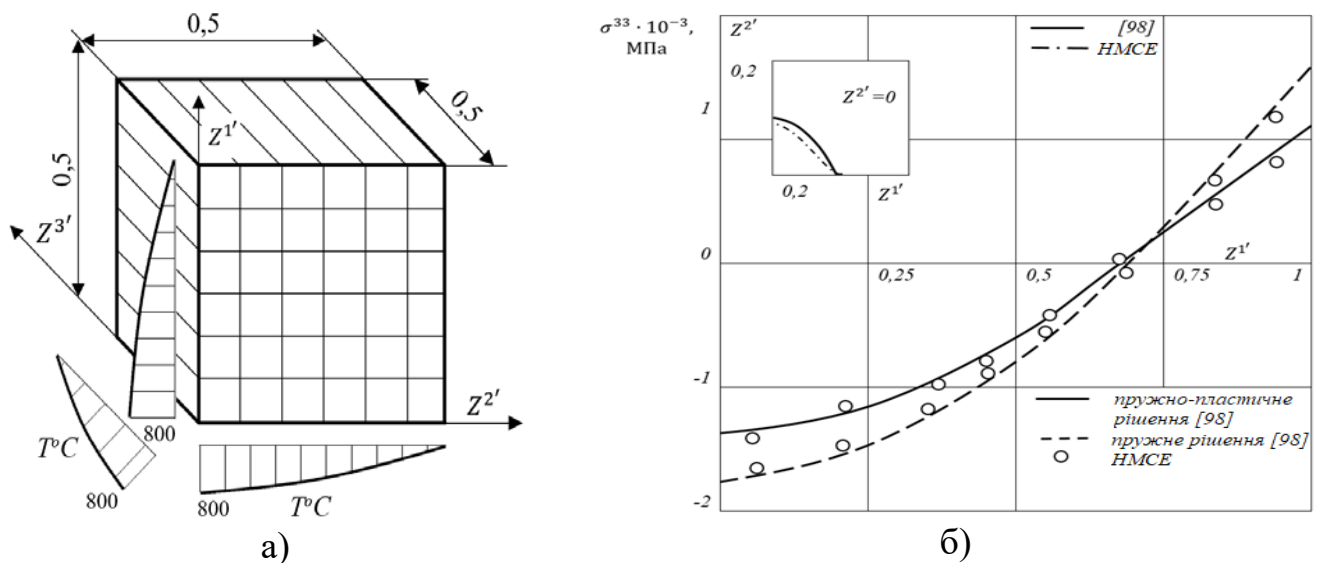


Рис. 21. Аналіз напружено-деформованого стану куба при нагріванні.

Для перевірки результатів розробленого підходу при дії вимушених переміщень розглянуто випадок пружно-пластичної деформації куба при стисканні між паралельних пластин без тертя. Розподіли напружень, отримані за допомогою НМСЕ, та еталонні значення є ідентичними (рис.22).

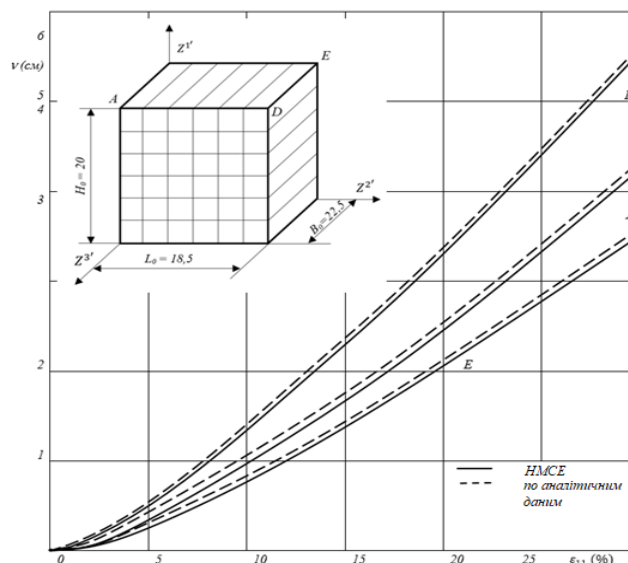


Рис. 22. Пружно-пластичні деформації паралельних пластин без тертя.

Для дослідження характеру збіжності ітераційного процесу при розв'язанні задач повзучості і підтвердження достовірності отримуваних результатів розглянуто тестовий приклад про деформування в умовах повзучості тонкостінної труби, дискретна модель якої побудована із використанням призматичних неоднорідних СЕ (рис. 23).

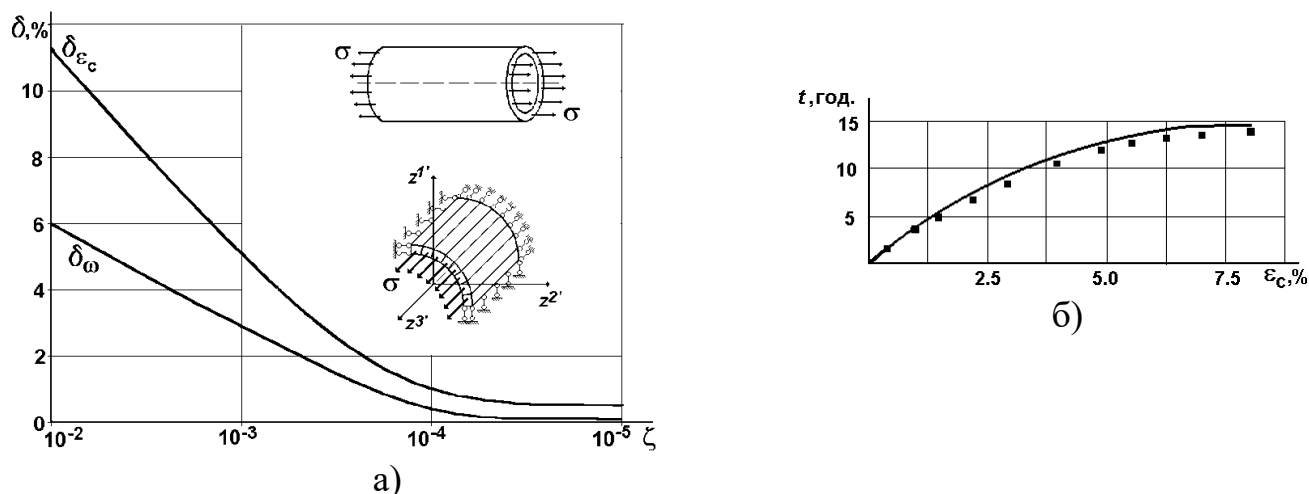


Рис. 23. Деформування в умовах повзучості тонкостінної труби.

Проведені дослідження збіжності величин деформацій повзучості і параметра пошкодженості залежно від точності розв'язання системи рівнянь НМСЕ ζ свідчать, що похибка визначення інтенсивності деформацій повзучості δ_{ε_c} в межах 1% досягається при $\zeta = 10^{-4}$, похибка визначення параметра пошкодженості δ_{ω} – при $\zeta = 10^{-5}$ (рис. 23,а). Крива повзучості, що отримана з використанням викладеного алгоритму розв'язання задач повзучості, при $\sigma = 60 \text{ МПа}$ (рис. 23,б, квадрати), добре узгоджується з експериментальним результатом.

У цьому розділі, розглянуто приклади застосування методики розв'язання задач нелінійного деформування до визначення напружено-деформованого стану просторових тіл неканонічної форми та складної структури.

Деформування Т-подібного хвостовика (рис. 25). При розв'язанні задачі проведено з'ясування впливу на напружено-деформований стан вищевказаних факторів. В таблиці 14 наведені значення максимальних розтягувальних напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ та інтенсивності дотичних напружень T , зафіксовані в області галтельного переходу між полицею та шийкою. Їхнє порівняння показує, що урахування нерівномірності прикладання поверхневого навантаження не здійснює помітного впливу на рівень максимальних напружень. Причому в обох варіантах розрахунку в центральній частині шийки картина напружено-деформованого стану виявилася близькою до однорідної.

У відповідності до технологічних особливостей виготовлення та збірки роторів взаємодія ободу та диску може здійснюватися не по всій довжині полиці l , а по деякій її центральній частині розміром $a \leq l$. Це призводить до нерівномірного характеру розподілу контактних зусиль по осі Z^3 , епюра яких для гранично допустимого випадку ($a = 0,84l$) приведена на рис 27.

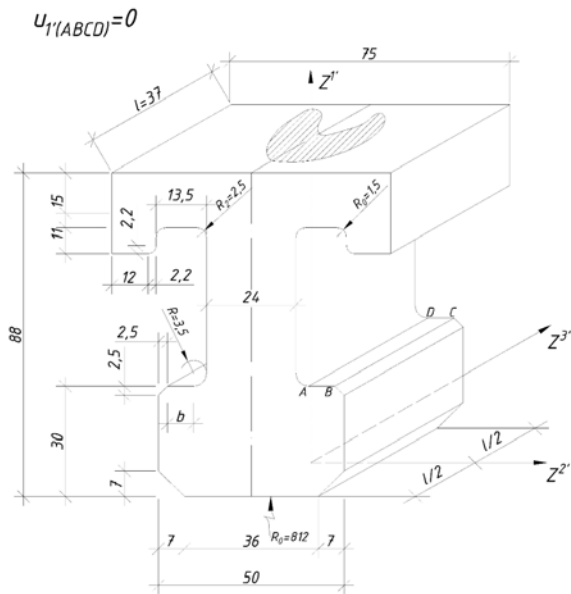


Рис. 25. Загальний вигляд хвостовика

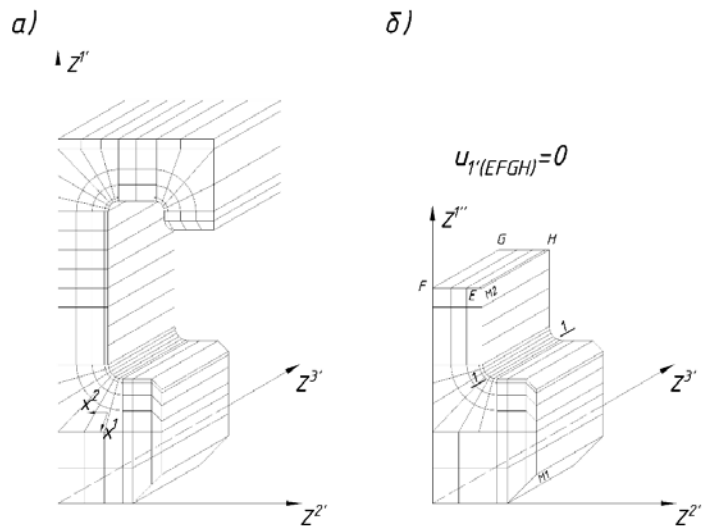
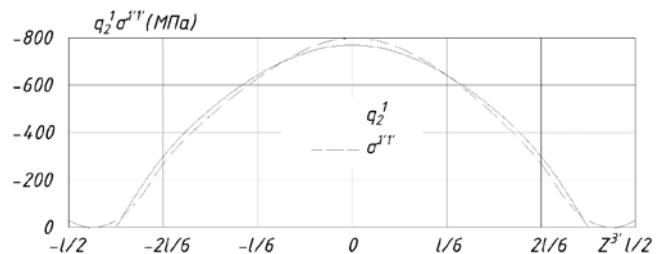


Рис. 26. Схема розбивки хвостовика на скінченні елементи

Таблиця 14

РС	$\tilde{\sigma}^{22}$ (МПа)	%	T (МПа)	%
Рис. 25	683,5	-	333,6	-
Рис. 26, а	689,1	0,82	337,1	1,05
Рис. 26, б	679,5	0,58	331,4	0,66

Рис. 27. Епюра контактних зусиль по осі Z^3

В таблиці 15 представлені максимальні величини $\tilde{\sigma}^{22}$ та T , вираховані при різній точності розв'язання систем рівнянь, визначеної ε , числі утримуваних членів ряду M та кількості вузлів сіткової області $M1$ та $M2$ вздовж осей x^1 та x^2 відповідно.

Таблиця 15

РС	ε	M	M1	M2	$\tilde{\sigma}$ (МПа)	%	T (МПа)	%
Рис. 26, б	10^{-3}	5	7	15	840,1	0,43	418,5	0,19
	10^{-4}				842,0	0,21	418,9	0,09
	10^{-5}				843,8	-	419,3	-
	10^{-3}	3	7	15	843,0	1,22	413,1	2,27
		5			840,1	0,87	418,5	0,99
		8			832,8	-	422,7	-
	10^{-3}	5	7	15	840,1	2,81	418,5	2,70
			9	18	820,7	0,44	409,5	0,49
			12	24	817,1	-	407,5	-

На основі цих даних можна зробити висновок, що стійкі результати досягаються при $\varepsilon = 10^{-3}$, $M = 5$, $M1 = 9$, $M2 = 18$. Так, суттєве збільшення числа невідомих

(більше, ніж у 1,5 рази), зумовлене збільшенням числа утримуваних членів ряду або кількістю вузлів сіткової області призводить до незначної (менше 1%) зміни результатів.

Результати розрахунку в двовимірній та просторовій постановці приведені на рис. 28 у вигляді епюр $\tilde{\sigma}^{22}$ та T , які побудовані в перерізі I-I. Пунктирною лінією позначені результати розв'язання плоскої задачі, суцільною – тривимірної при дії нерівномірно розподіленого по довжині поличі навантаження.

На рис. 28,б і 28,в приведені епюри $\tilde{\sigma}^{22}$ та ϵ_i^p відповідно, побудовані в перерізі I-I для різних значень кутової швидкості. Спостерігається поступове вирівнювання епюри напружень вздовж $Z^{3'}$ по мірі збільшення пластичних деформацій, які при $\omega = \frac{3000\text{об}}{\text{хв}}$ розподіляються на всю довжину поличі.

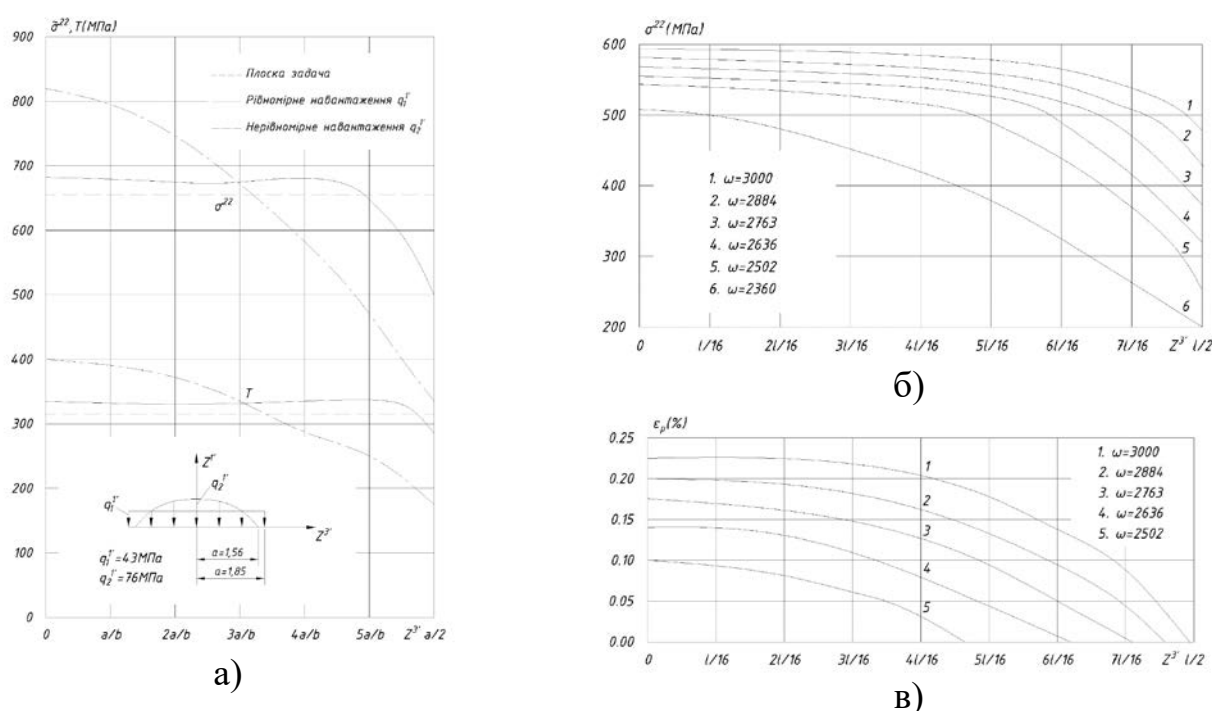


Рис. 28. Результати розрахунку хвостовика лопатки в двовимірній та просторовій постановці

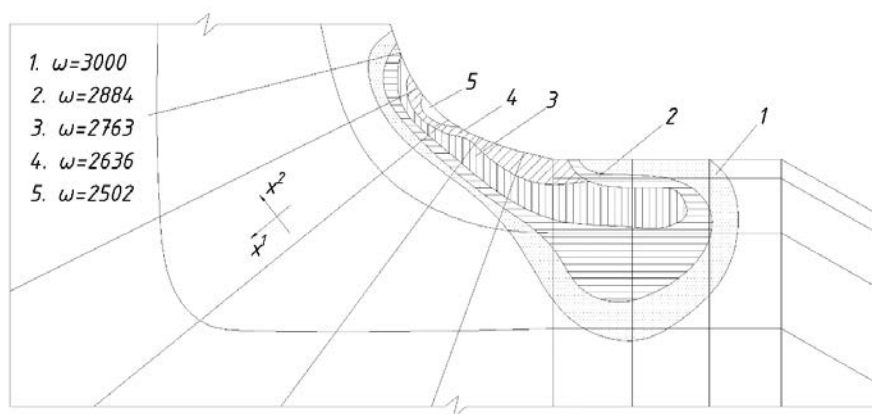


Рис. 29. Зміни області пластичних деформацій в площині $Z^{3'} = 0$

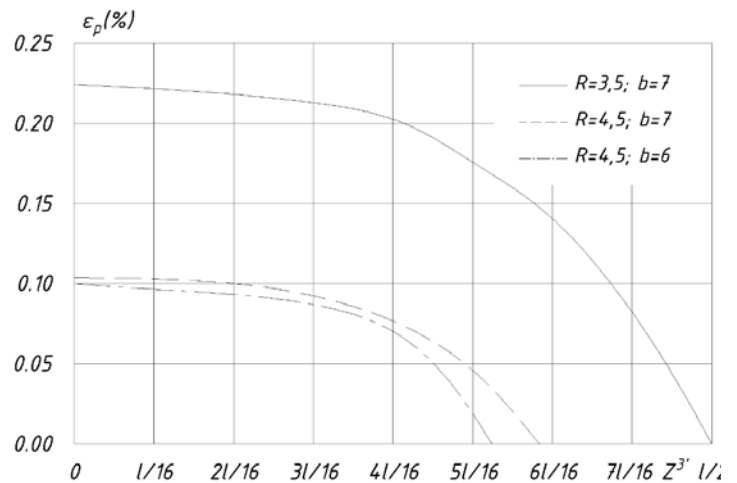
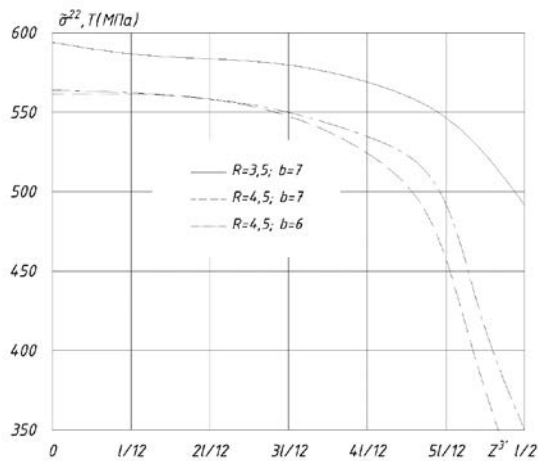


Рис. 30. Епюра $\tilde{\sigma}^{22}$ і ε_i^p побудована при кутовій швидкості $\omega = \frac{3000\text{об}}{\text{хв}}$

На рис. 29 показана картина зміни області пластичних деформацій в площині $Z^{3'} = 0$. Її характерною особливістю є тенденція до розвитку пластичних деформацій в глибину полиці вздовж лінії, яка утворює з поверхнею полиці кут порядку 45° , що повністю узгоджується з уявленнями про роботу Т-подібного хвостовика. На рис. 30. показані в перерізі I-I епюри $\tilde{\sigma}^{22}$ і ε_i^p , побудовані при кутовій швидкості $\omega = \frac{3000\text{об}}{\text{хв}}$.

Дослідження напружено-деформованого стану демпфуючого елемента, який представляє собою коробчасту конструкцію, підсилену двома поздовжніми ребрами, і відрізняється досить складною структурою (рис.31,а).

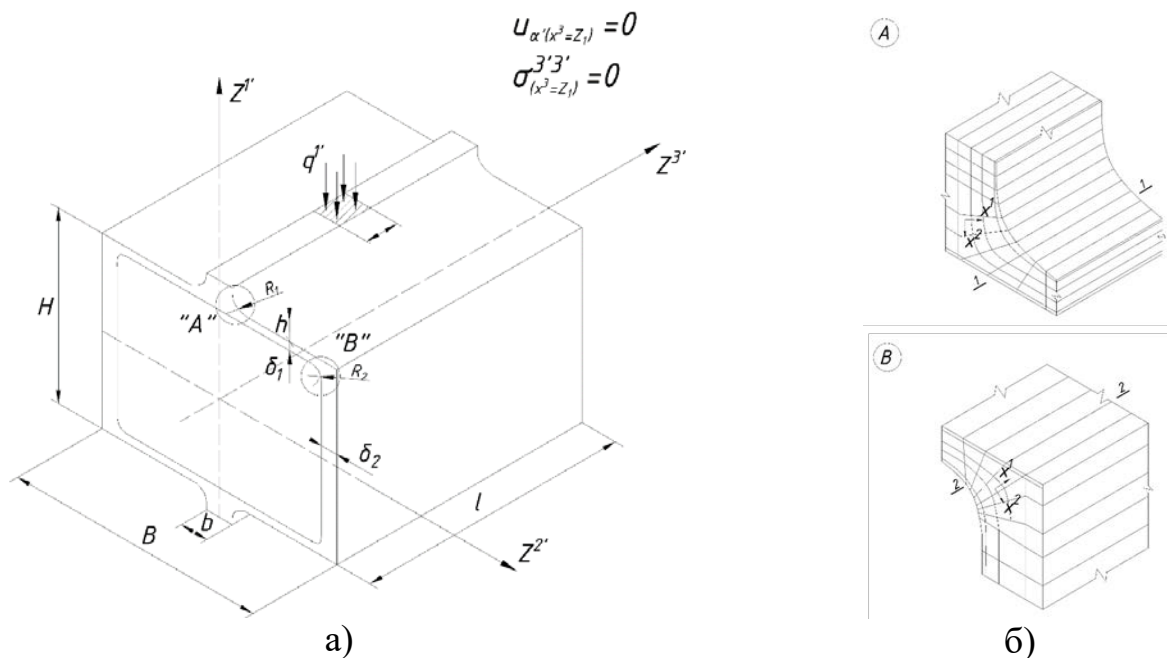


Рис. 31. Дослідження напружено-деформованого стану демпфуючого елемента

На прикладі розглядуваного об'єкта наочно проявляється зручність використання розроблених універсальних елементів для розрахунку призматичних тіл складної структури. Їхнє застосування дозволило при формуванні сіткової області максимально деталізувати розбивку на елементи в зонах концентраторів (рис. 31,б), суттєво розряджаючи її в центральній частині стінок та днища.

Результати дослідження впливу кількості утримуваних членів ряду Фур'є M та числа вузлів m на ділянках розрахункової сітки, що безпосередньо примикають до місць закруглень, на величину максимальних значень напружень у вузлах A та B приведені в таблицях 16 та 17 відповідно.

Результати розрахунку, виконаного в пружній постановці при інтенсивності зовнішнього навантаження $q^{1'} = 50 \text{ МПа}$, зображені на рис. 32 у вигляді епюр напружень $\tilde{\sigma}^{22}$, $\tilde{\sigma}^{33}$ і T . Пунктирною лінією позначені графіки, побудовані в перерізі I-I, суцільною – в перерізі II-II. Спостерігається практично повна ідентичність як в характері розподілення, так і в кількісних значеннях розглядуваних параметрів напруженого стану. Приведені на рис. 33 графіки ілюструють отриманий перерозподіл $\tilde{\sigma}^{22}$ по $Z^{3'}$, пов'язаний з розвитком зон пластичних деформацій в центральній частині об'єкту. Як і в пружній постановці, максимальні значення напружень, зафіксовані в різних перерізах, досить близькі.

Таблиця 16

m	M	σ^{22} , (МПа)	%	σ^{33} , (МПа)	%	T , (МПа)	%
25	5	425,0	2,78	147,1	6,05	210,0	4,5
42		416,5	0,79	139,0	0,58	202,3	0,89
63		413,2	-	138,2	-	200,5	-
42	3	409,3	1,88	138,1	1,23	198,7	2,01
	5	416,5	0,12	139,0	0,57	202,3	0,20
	7	417,7	-	139,8	-	202,7	-

Таблиця 17

m	M	σ^{22} , (МПа)	%	σ^{33} , (МПа)	%	T , (МПа)	%
25	5	465,0	7,27	149,0	7,32	216,0	8,24
42		439,9	1,98	139,7	1,15	202,3	2,03
63		431,2	-	138,1	-	198,2	-
42	3	439,8	0,02	139,7	0,00	202,1	0,02
	5	439,9	0,00	139,7	0,00	202,3	0,00
	7	439,9	-	139,7	-	202,3	-

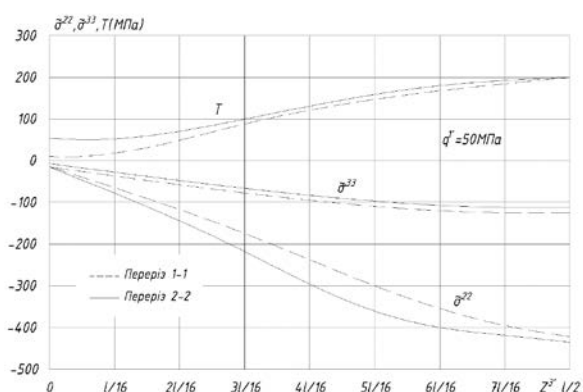
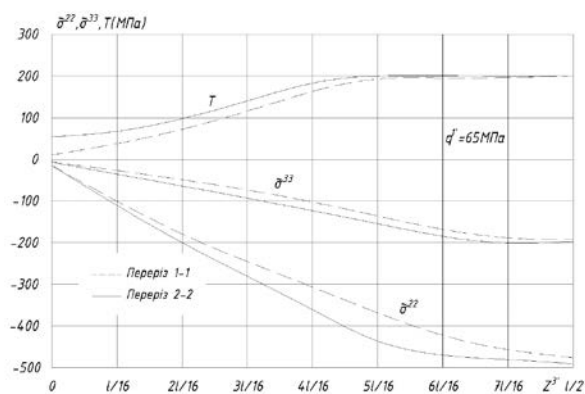


Рис. 32. Результати розрахунку в пружній постановці

Рис. 33. Значення напруження $\tilde{\sigma}^{22}$ по осі $Z^{3'}$

На рис. 34 представлені графіки, що характеризують зростання величини пластичних деформацій центральних точок перерізів 1-1 і 2-2 в процесі навантаження. Відомо, що рівень пластичних деформацій в області галтельних переходів суттєво залежить від радіуса закруглення. В зв'язку з цим були проведені дослідження впливу R_2 на ε_i^p , результати яких зображені на рис. 35. Вони дозволили встановити, що при максимальному навантаженні, СЕ діє на розглядуваний об'єкт, збільшення R_2 призводить до суттєвого зниження пластичних деформацій в області вузла B і не впливає на їхні значення у вузлі A . Зокрема, при $R_2 = 0,32\delta_1$ рівень пластичних деформацій у вузлі B залишається однаковим у порівнянні з вузлом A , а при $R_2 = 0,5\delta_1$ зменшується більше, ніж у 2 рази.

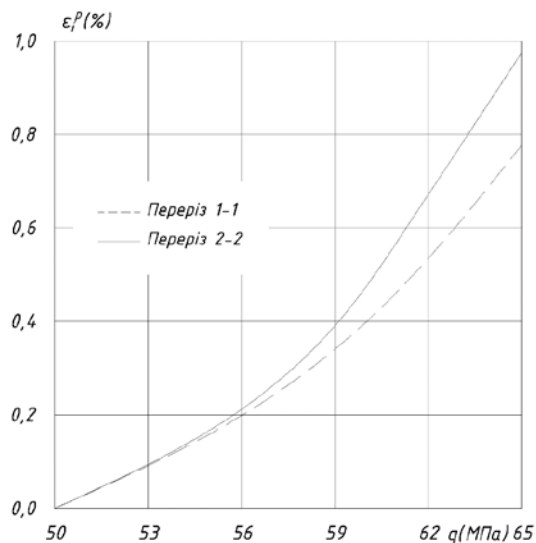


Рис. 34. Зростання величини пластичних деформацій.

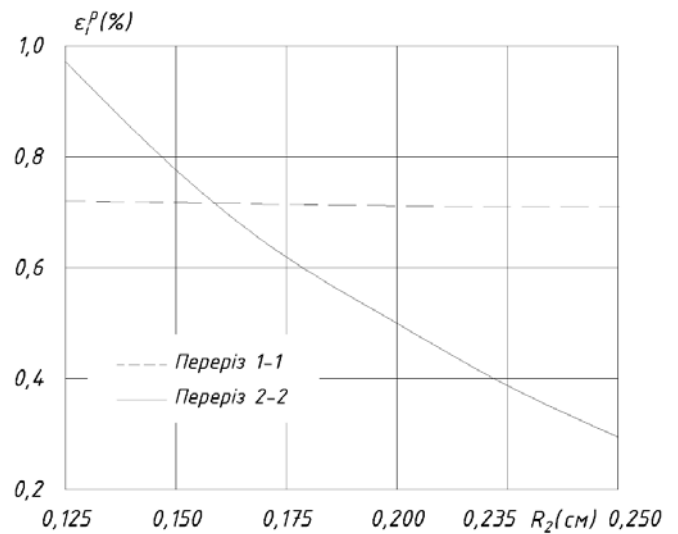


Рис. 35. Залежність ε_i^p від величини радіусів закруглення R_2

Розрахунок деталі кріплення поворотного пристрою. Деталь кріплення представляє собою порожнистий циліндр, з'єднаний перехідною ділянкою з прямокутною пластиною, яка закріплена від зміщень по нижній поверхні (рис. 36).

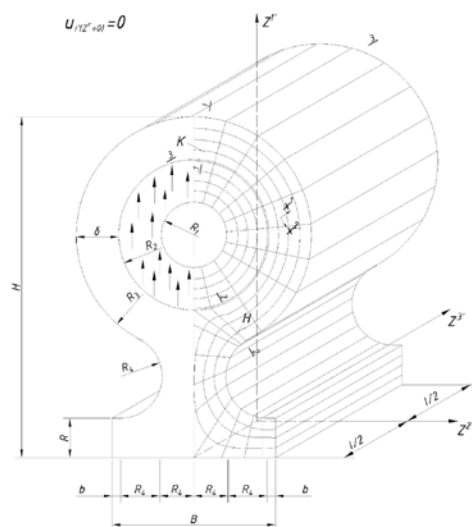


Рис. 36. Скінченноелементна модель деталі кріплення

Дані з дослідження збіжності $\tilde{\sigma}^{22}$ та T в точках K і H в залежності від загального числа вузлів сіткової області m , кількості утримуваних членів розкладу M та точності розв'язання системи рівнянь, визначеної ε , приведені в таблицях 18 і 19 відповідно.

Їхній аналіз дозволяє зробити висновок, що для розрахунку розглядуваної конструкції можна прийняти $m = 260$, $M = 5$ і $\varepsilon = 10^{-3}$. За цих значень параметрів проекції рівнодіючих на вісь Z^1 , обчислених по площі контакту та в перерізах корпусу площинами, що перпендикулярні осі Z^1 та проходять через вісь обертання та центр перехідної ділянки, відрізняються від рівнодіючих зовнішніх навантажень на 2-3%.

Таблиця 18

ε	M	m	σ^{22} (МПа)	%	T (МПа)	%
0,001	5	168	140,8	4,41	121,9	3,40
		260	145,5	1,22	124,2	1,13
		396	147,3	-	126,2	-
0,001	3	260	142,4	3,19	122,0	2,63
	5		145,5	1,09	124,2	0,88
	7		147,1	-	125,3	-
0,01	5	260	142	2,80	119,9	4,08
0,001			145,5	0,41	124,2	0,56
0,0001			146,1	-	124,9	-

Таблиця 19

ε	M	m	σ^{22} (МПа)	%	T (МПа)	%
0,001	5	168	251,3	4,70	155,6	3,95
		260	260,1	1,36	160,3	1,04
		396	263,7	-	162,0	-
0,001	3	260	252,4	4,03	157,1	2,96
	5		260,1	1,10	160,3	0,98
	7		263,0	-	161,9	-
0,01	5	260	249,8	4,58	153,2	5,14
0,001			260,1	0,65	160,3	0,74
0,0001			261,8	-	161,5	-

Результати пружного розрахунку деталі кріплення, виконаного при $q^1 = 60$ МПа, представлені на рис. 37 і 38 у вигляді епюр напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ та T , побудованих в перерізах 1-1 і 2-2 відповідно.

Суцільними лініями позначені дані розв'язання просторової задачі, пунктирною – плоскої. В околі точки K розрахунок в умовах плоскої деформації дає майже в 5 разів занижене значення T . Це пояснюється суттєво нерівномірним розподілом по довжині корпусу нормальних напружень $\tilde{\sigma}^{11}$, епюри яких в перерізі 3-3 показані на рис. 39.

Результати розрахунку, виконаного з урахуванням пластичних властивостей матеріалу при навантаженні об'єкта діями максимальної інтенсивності приведені на рис. 40 у вигляді напружень $\tilde{\sigma}^{11}$, $\tilde{\sigma}^{22}$ і T , побудованих у перерізі 3-3. Спостерігається помітний порівняно з пружним розрахунком перерозподіл напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ поблизу торців корпусу, обумовлений розвитком у цій області пластичних деформацій.

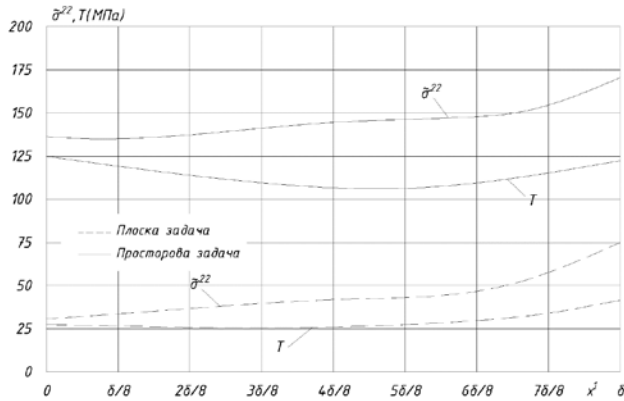


Рис. 37. Епюри напружень $\tilde{\sigma}^{22}$ в перерізах 1-1 і 2-2

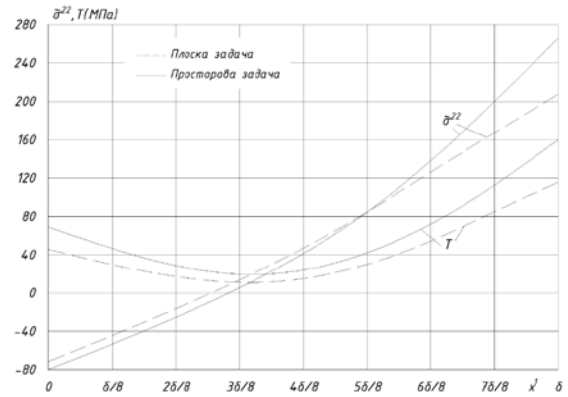


Рис. 38. Епюри напружень T в перерізах 1-1 і 2-2

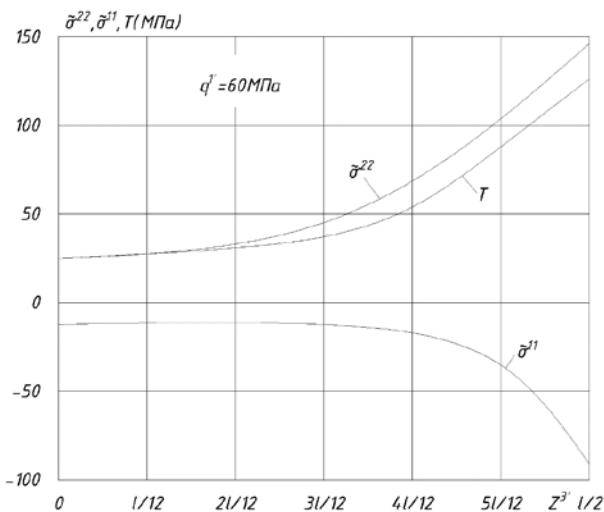


Рис. 39. Розподіл нормальних напружень по довжині корпусу

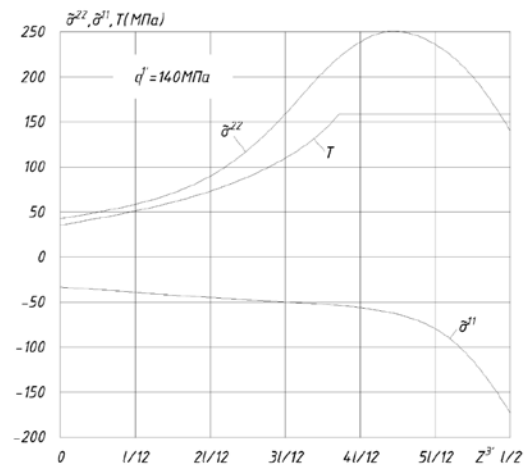
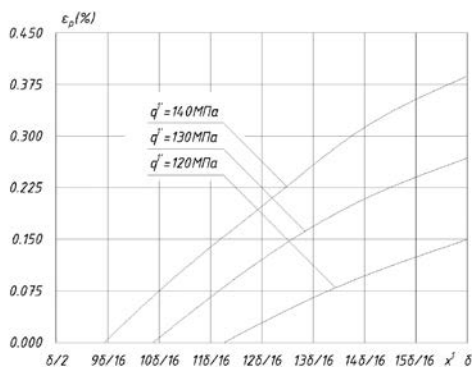
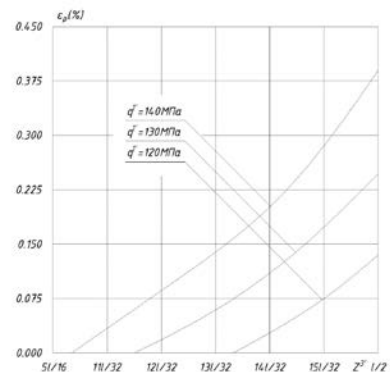


Рис. 40. Напруження при пружнопластичному деформуванні при максимальній інтенсивності навантаження



Перерізі 2-2



Переріз 3-3

Рис. 41 Розподіл деформацій пластичності ϵ_i^p при різних рівнях навантаження

На рис. 41 представлені епюри ε_i^p , побудовані в перерізах 2-2 і 3-3 при різних значеннях зовнішнього навантаження.

Таким чином, дані розрахунку, виконаного в пружно-пластичній постановці, дозволили уточнити уявлення про умови роботи окремих ділянок об'єкта і зробити висновок про рівномірність корпусу.

Аналіз напружено-деформованого стану корпусної деталі потребує розгляду впливу товщини фланця на характеристики деформації, які виникають у відповідних сегментах конструкції. На рис. 42 наведено типове представлення одного з таких сегментів, на рис. 43 - поперечний переріз фланця з усіма відповідними розмірами. На рис. 44 зображено конструктивну схему об'єкта, тоді як рис. 45,а демонструє апроксимуючу сітку у поперечному перерізі фланця біля галтелі. Уздовж довжини і товщини об'єкта використовується нерівномірна сітка скінченних елементів для відображення геометрії корпусу.

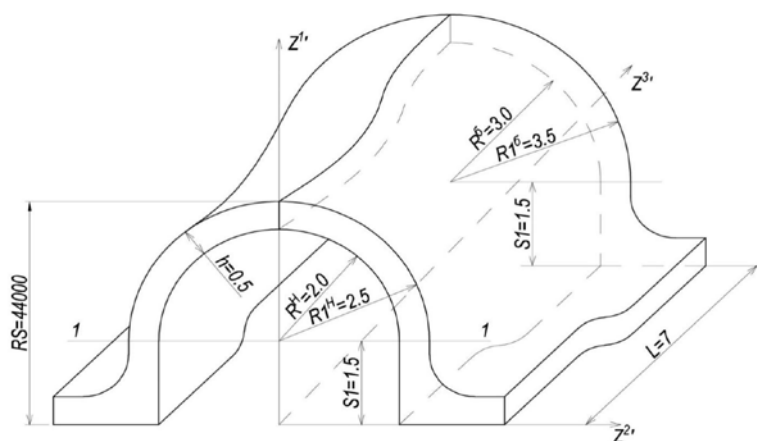


Рис. 42. Частина деталі

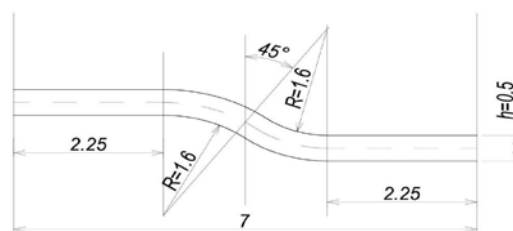


Рис. 43. Перехідна область між розтруб та перешийок частини деталі

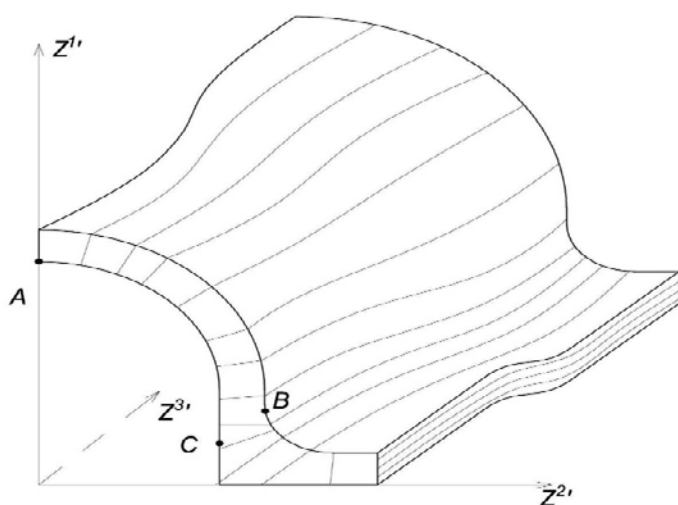


Рис. 44. Розрахункова схема об'єкта

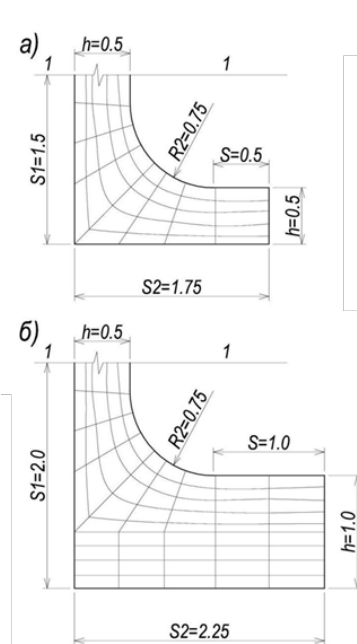


Рис. 45. СЕ сітка на галтелі

На першому етапі розрахунок проведений в припущенні пружного деформування. Результати аналізу демонструють, що максимальні рівні напружень на внутрішній поверхні досягаються в точках A і C , а також у точці на зовнішній поверхні (як показано на рис. 44). Крім того, на рис. 46 для вищезгаданих точок побудовано криві, що відображають інтенсивність дотичних напружень по довжині об'єкта. Очевидно, що максимальний рівень інтенсивності напружень у всіх досліджуваних точках має місце в перерізі, розташованому в площині симетрії, збоку від куполу. Оскільки максимальна інтенсивність дотичних напружень виникає вздовж внутрішнього контуру об'єкта (в точках A і C), на рис. 46 показано розподіл інтенсивності дотичних напружень по колу для виявлення небезпечних зон.

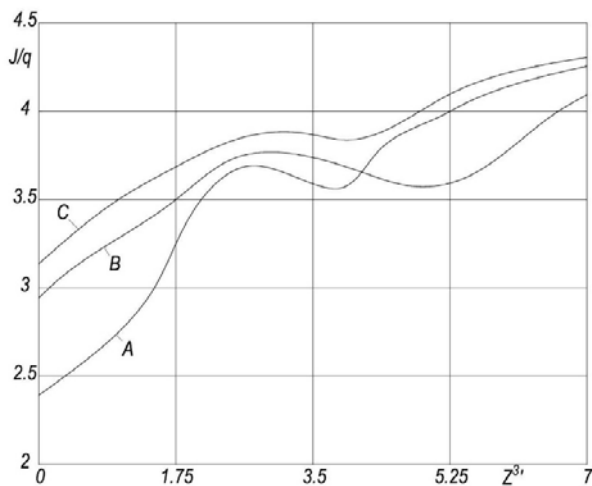


Рис. 46. Інтенсивність дотичних напружень по довжині об'єкта

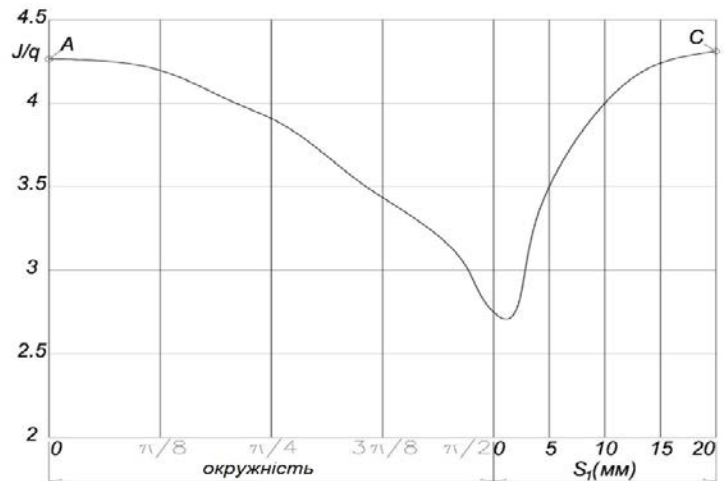


Рис. 47. Розподіл інтенсивності дотичних напружень у колі

Результати розв'язання задачі в рамках пружно-пластичного аналізу зображено за допомогою ізоліній пластичної деформації на рис. 48,а,б. Як і передбачалося, в процесі деформування утворилися три пластичні зони. Дві з них розташовані на внутрішній поверхні: одна - у жорстко закріпленій області (поблизу точки C), а інша - в центрі циліндричної області (поблизу точки A). Третя зона знаходиться на зовнішній поверхні, на стику між прямою ділянкою і заокругленням (точка B).

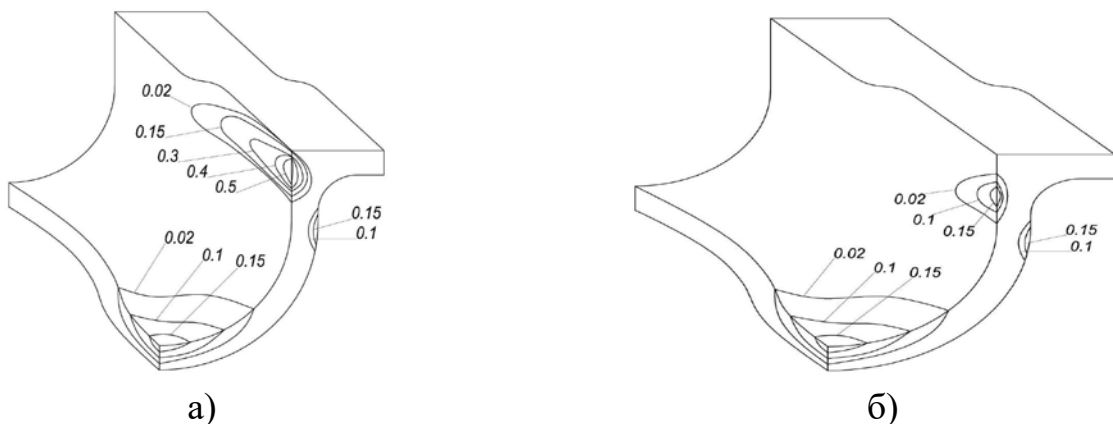


Рис. 48. Ізолінії пластичних деформацій

Довжина вздовж осі $Z^{3'}$ та максимальна інтенсивність пластичної деформації в зонах А і В для потовщеного фланця (рис. 48,б) демонструють лише незначні відмінності порівняно з раніше отриманими результатами для фланця товщиною h . Отже, збільшення товщини фланця суттєво знизило інтенсивність пластичної деформації в небезпечній зоні.

Також необхідно порівняти розподіл напружень уздовж контурів (внутрішнього та зовнішнього) області в площині симетрії, де спостерігається найвищий рівень пластичної деформації. Розподіл окружних напружень уздовж внутрішнього та зовнішнього контурів конструкції зображено на рис. 49,а,б відповідно.

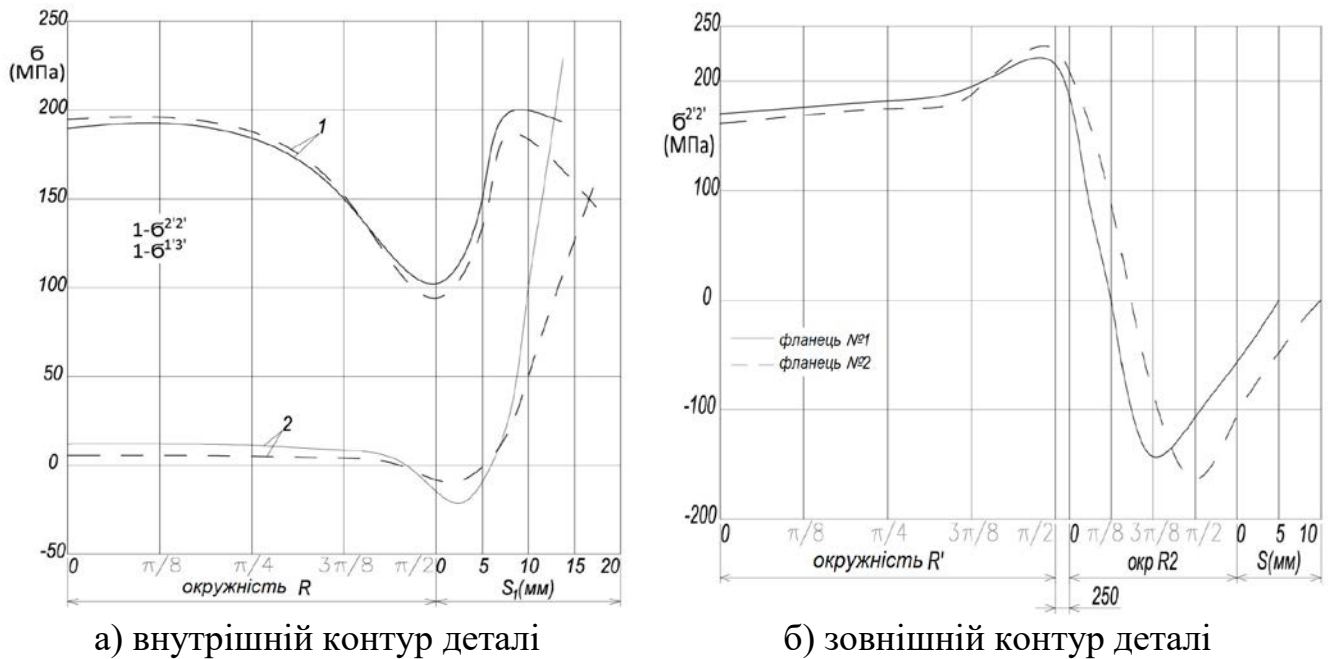


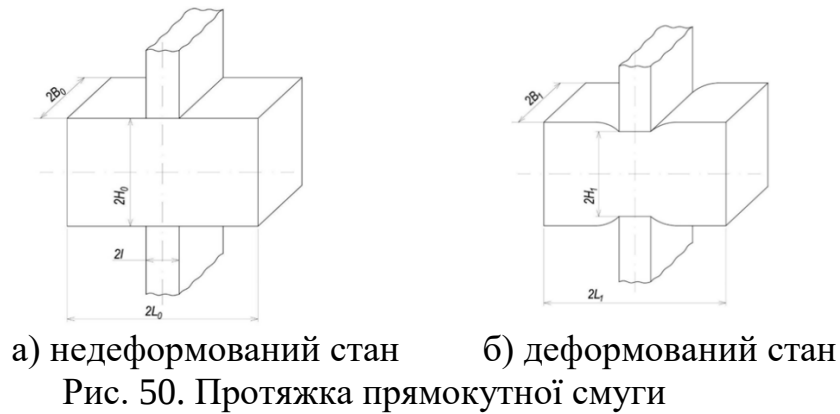
Рис. 49. Ізолінії пластичних деформацій

На рис. 48,б діаграми для нормальних напружень $\sigma^{2'2'}$ позначені цифрою 1, а цифрою 2 - епюри дотичних напружень, що досягають значних значень в зоні жорсткого заземлення. На стику циліндричної та прямолінійної ділянок відбувається помітне зменшення величини $\sigma^{2'2'}$, що супроводжується зростанням напружень на зовнішній поверхні.

Очевидно, що додатковий матеріал, необхідний для виготовлення потовщеного фланця, повністю виправдовує себе в цьому сценарії. Ця модифікація ефективно зменшує рівень пластичної деформації та напруження в небезпечних зонах, тим самим подовжуючи термін служби компонента корпусу.

Дослідження процедури протяжки прямокутної смуги. Згідно з даними на рис. 50,а,б, протягування здійснюється для подовження заготовки шляхом зменшення площі її поперечного перерізу.

Для перевірки точності припущень процедури первинної деформації було побудовано траєкторії точок C і D , розташованих на поверхні тіла, що вільно деформується (як показано на рис. 51). Конфігурація цих траєкторій є майже лінійною, що свідчить про точність обраних рівнів стану.



На рис. 52 представлена розрахункова схема. У площині поздовжнього перерізу була реалізована неоднорідна сітка НМСЕ вздовж напрямку $Z^{2'}$ а вздовж осі $Z^{3'}$ вздовж осі. Рух інструмента моделювався шляхом накладання жорстких переміщень $\Delta U^{1'}$ вздовж $Z^{1'}$ віссю. Для розв'язання задачі в плоскому формулюванні були змодельовані плоскі деформаційні обмеження шляхом задання нульового переміщення $U^{3'}$ вздовж бічної поверхні тіла по осі $Z^{3'}$ осі. Процедура пластичної деформації аналізується до рівня стиснення по висоті 18,8%.

На рис. 53 показано одну з конфігурацій апроксимуючої сітки в деформованому стані. Для більш детального пояснення змін форми тіла в процесі малювання розглянуто переміщення ключових частин тіла.

На рис. 54 (а, б, в) наведено діаграми переміщень, наприклад, $U^{3'}$ точки на бічній поверхні тіла в поперечній площині симетрії, $U^{3'c}$ у площині осі симетрії та $U^{2'}$ у напрямку лінії AB у центральній вертикальній площині на різних етапах процесу формування. Криві, позначені як 1, представляють результати при $E_1 = 3.8\%$, крива 2 - при $E_1 = 11.3\%$, а крива 3 - при $E_1 = 18.8\%$. Врахування переміщень $U^{3'}$ призводить до суттєвої кількісної зміни схеми переміщень точок тіла в площині осьової симетрії (див. рис. 54,в). В області найбільших переміщень $U^{2'}$ розв'язок МСЕ дає результат, який приблизно на 60% перевищує просторовий.

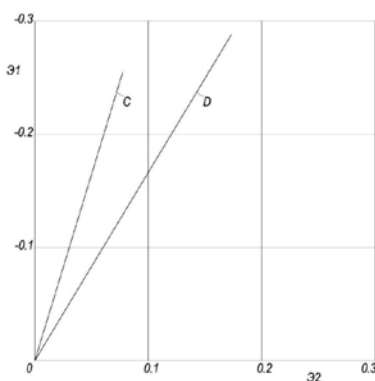


Рис. 51. Траєкторії точок С та D

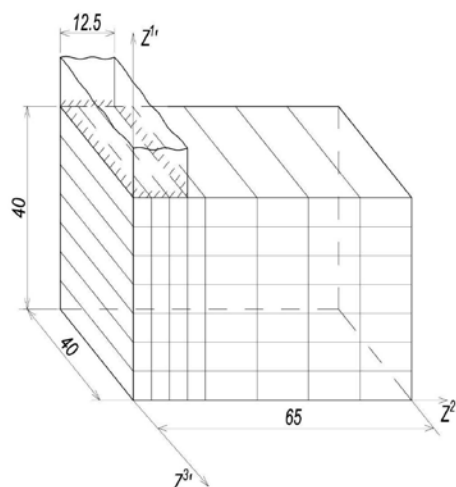


Рис. 52. Розрахункова схема

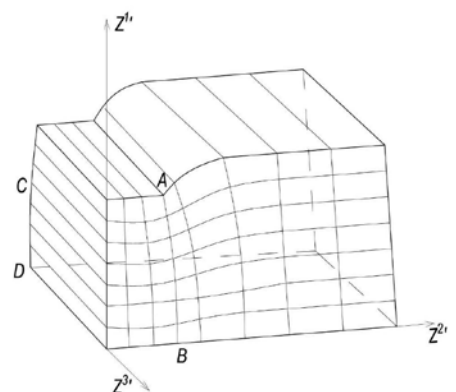


Рис. 53. Апроксимуюча сітка в деформованому стані

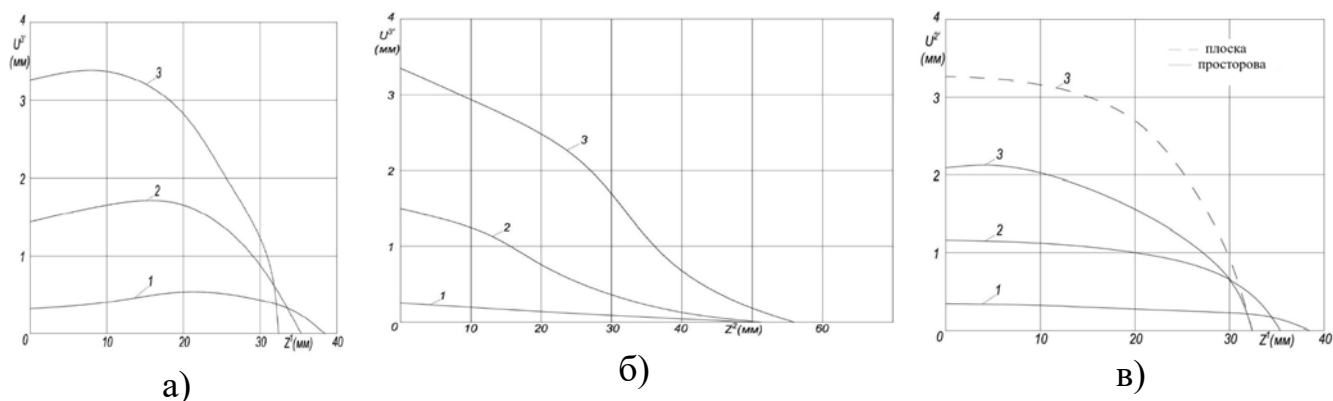


Рис. 54. Графіки переміщень в характерних точках полоси.

На рис. 55 представлені графіки деформацій у напрямку координати $Z^{1'}$ вздовж осі симетрії заготовки при найвищому ступені ущільнення. Крім того, на рис. 56, ідентична відмінність у результатах очевидний при порівнянні графіків ε^{22} побудованих у площині осової симетрії заготовки.

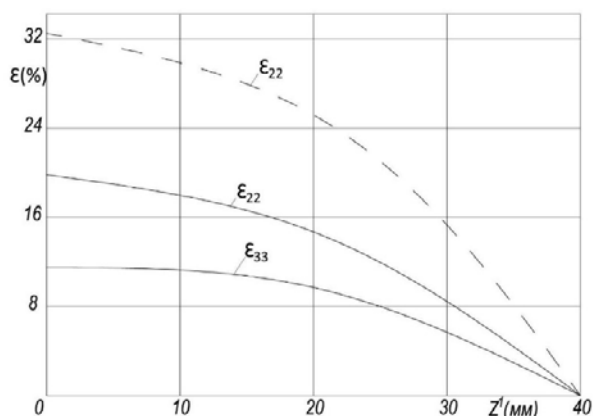


Рис. 55. Графіки деформацій вздовж осі симетрії заготовки

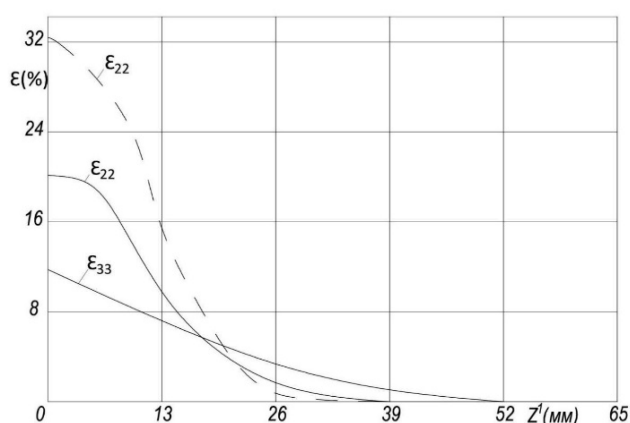
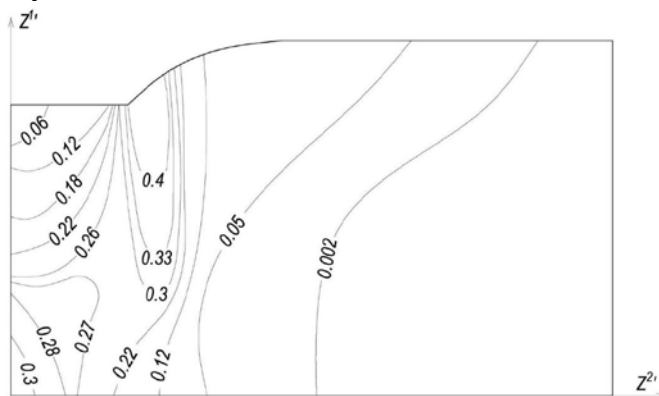


Рис. 56. Графіки деформацій у площині осової симетрії заготовки

На рис. 57 показано ізолінії інтенсивності пластичної деформації в поздовжньому перерізі тіла при $Z^{3'} = 0$, для просторового та плоского розв'язків, відповідно. Крім того, розподіл пластичних деформацій, отриманий за допомогою обох методів розрахунку, є досить подібним у цій області.



а) просторова постановка



б) плоска постановка

Рис. 57. Ізолінії інтенсивності пластичної деформації.

На рис. 58 графіки напружень $\sigma^{1'1'}$ побудовані вздовж перпендикуляра до напрямку симетрії області як для просторового, так і для плоского розв'язків, є якісно подібними. Кількісна різниця між значеннями $\sigma^{1'1'}$ отриманими в тривимірній та плоскій постановці в області максимуму становить приблизно 60%.

Сила протягування є однією з ключових характеристик цієї процедури. На рис. 59 представлено графіки залежності зусилля протягування від ступеня деформації по висоті. Порівняльний аналіз показує, що на найвищому рівні деформації розв'язок МСЕ дає результат, який є більш ніж на 30% відрізняється від результатів просторового розрахунку.

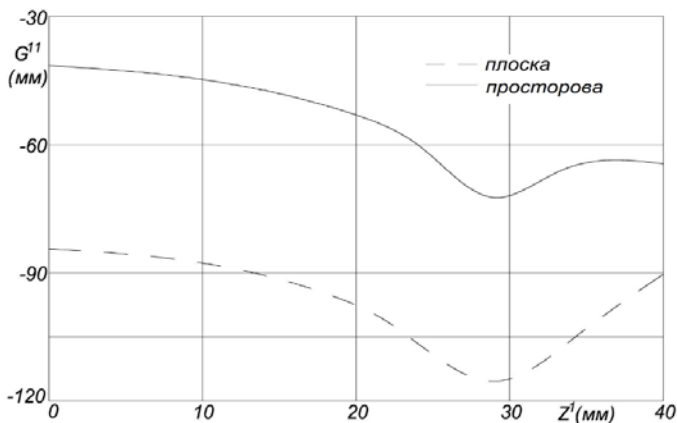


Рис. 58. Графіки значень $\sigma^{1'1'}$

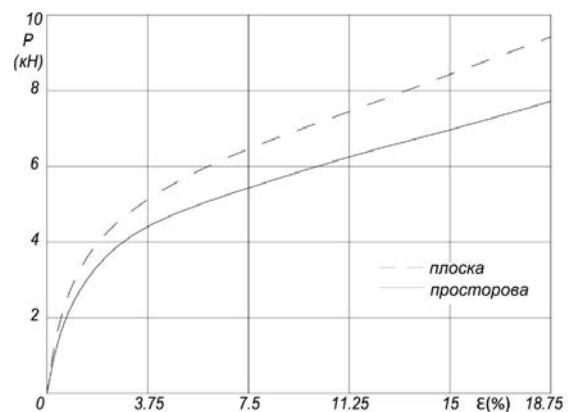


Рис. 59. Графіки залежності зусилля протягування від ступеня деформації по висоті

Моделювання процесу деформування та визначення ресурсу хвостовика лопатки газової турбіни. Хвостовик лопатки (рис. 59) - неоднорідне призматичне тіло, що зазнає термосилового навантаження.

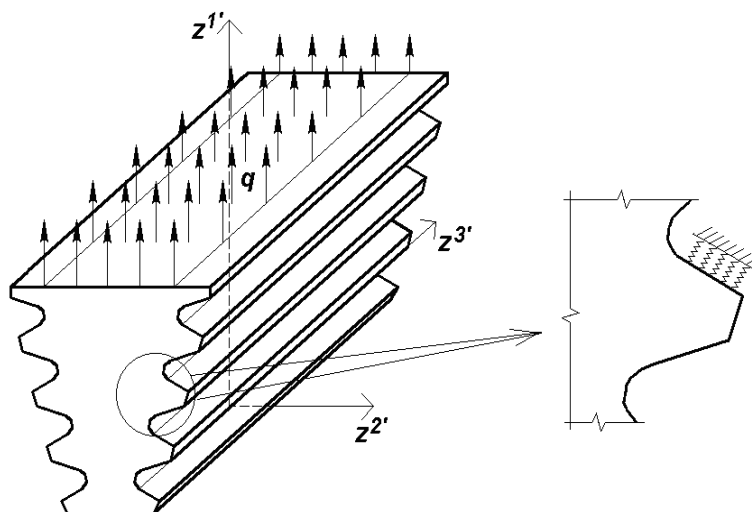


Рис. 60. Хвостовик лопатки газотурбінної установки

Збіжність результатів моделювання пружного деформування залежно від кількості невідомих МСЕ визначена при порівнянні розподілів інтенсивності безрозмірних напружень для сіток з кількістю невідомих 1074, 3344 та 9596 (рис.61).

Отримані розподіли інтенсивності безрозмірних напружень $\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right)$ показано на рис. 62: розбіжність результатів, отриманих з кількістю невідомих 3344 та 9596 становить менше 1%, тоді як на сітці з 1074 невідомими максимальні напруження занижені майже на 10%. Уточнення результатів при згущенні сітки додатково проілюстровано отриманими розподілами напружень вздовж галтелей (рис. 63).

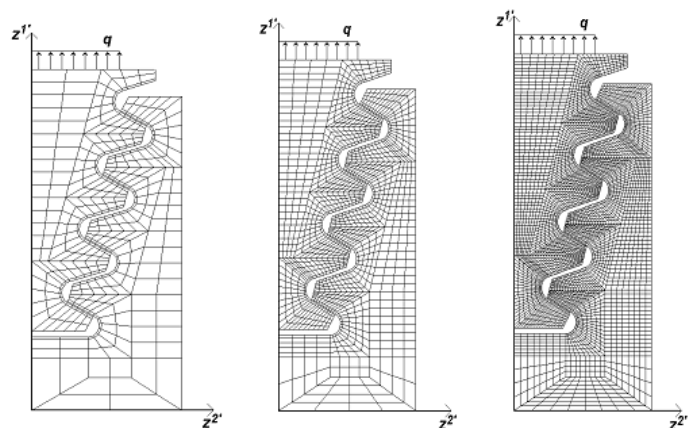


Рис. 61. Загальний вигляд розрахункової моделі з різною кількістю невідомих
 $N_1 = 1074$ $N_2 = 3344$ $N_3 = 9596$

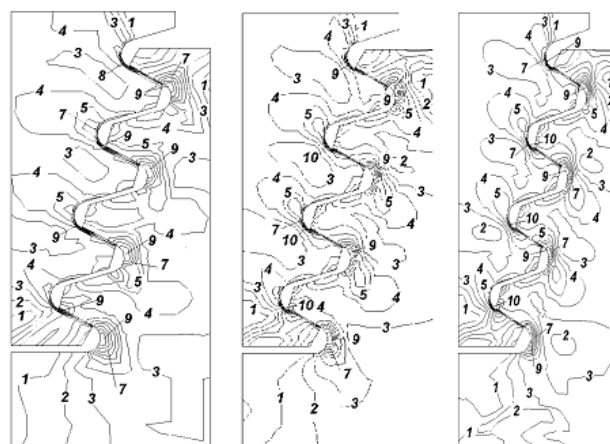
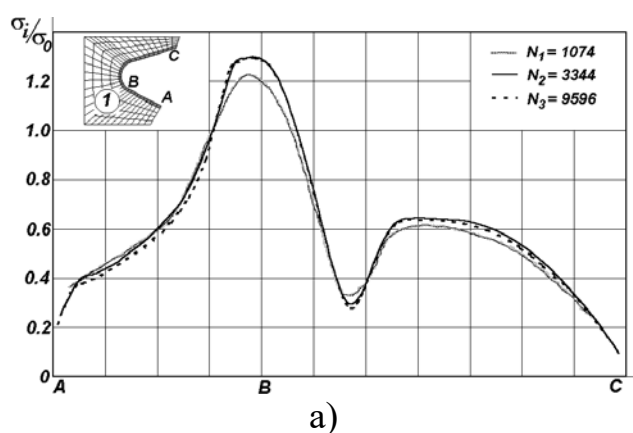
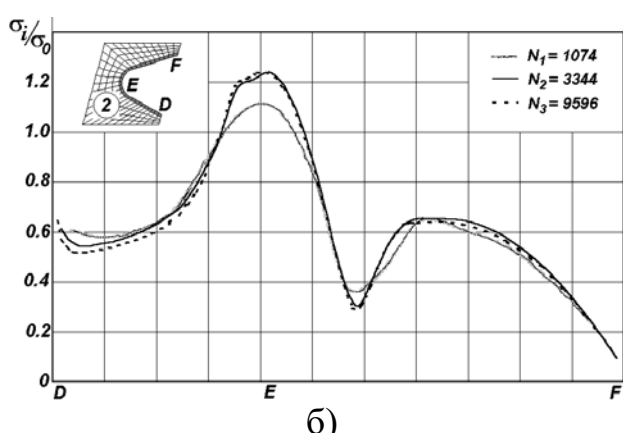


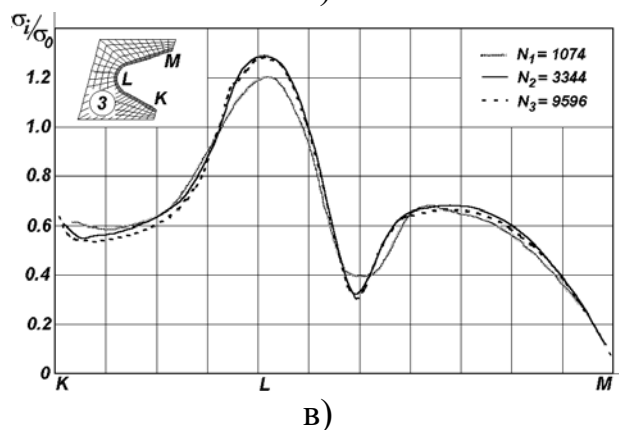
Рис. 62. Ізолінії безрозмірних напружень,
 $N_1 = 1074$ $N_2 = 3344$ $N_3 = 9596$
 (1 - 0.12; 2 - 0.24; 3 - 0.36; 4 - 0.48; 5 - 0.60;
 6 - 0.72; 7 - 0.84; 8 - 0.95; 9 - 1.07; 10 - 1.19)



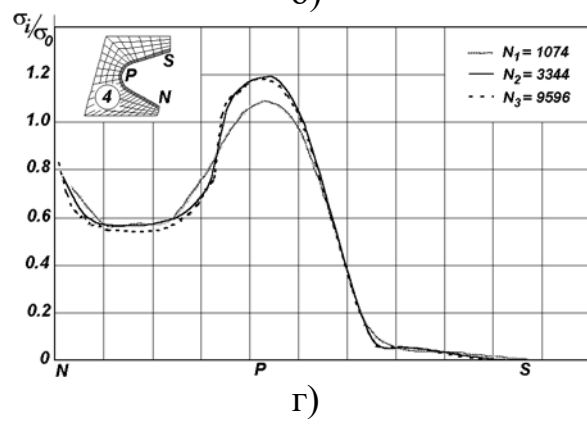
а)



б)



в)



г)

Рис. 63. Розподіл інтенсивності безрозмірних напружень на поверхнях галтелей і зубців при пружному деформуванні

На другому етапі дослідження аналізується вплив неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану та прогнозований термін експлуатації хвостовика лопатки. Графік залежності зміни параметра пошкоджуваності від часу (рис. 64,66) показує, що врахування нерівномірності розподілу температури в хвостовику призводить до зміни розташування точки, в якій виникають максимальні значення пошкоджуваності: а внаслідок більш інтенсивного перерозподілу напружень (рис.65, 67) максимальні значення пошкоджуваності виникають в точці L .

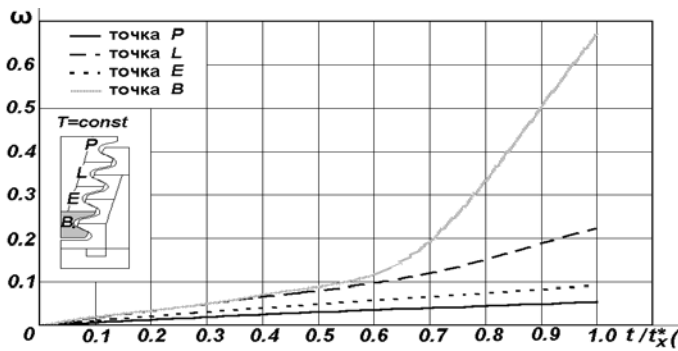


Рис. 64. Залежність зміни параметра пошкоджуваності

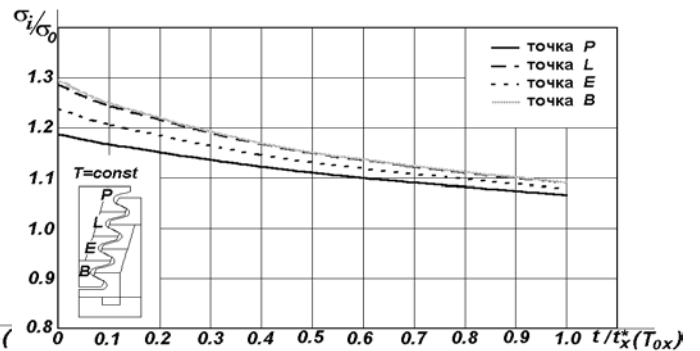


Рис. 65. Зміна інтенсивності безрозмірних напружень

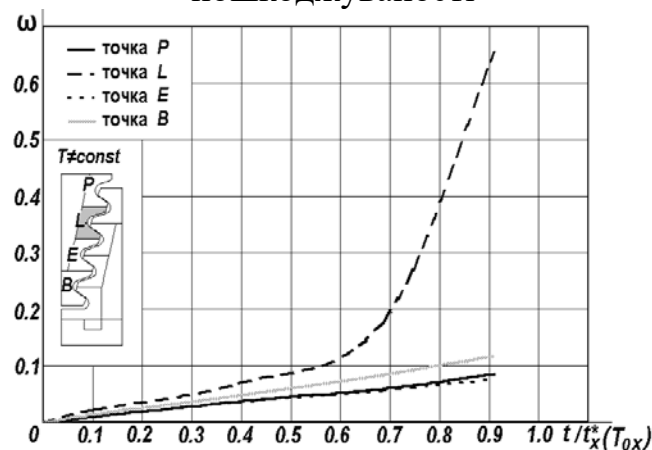


Рис. 66. Графік залежності зміни параметра пошкоджуваності, що враховує нерівномірності розподілу температури

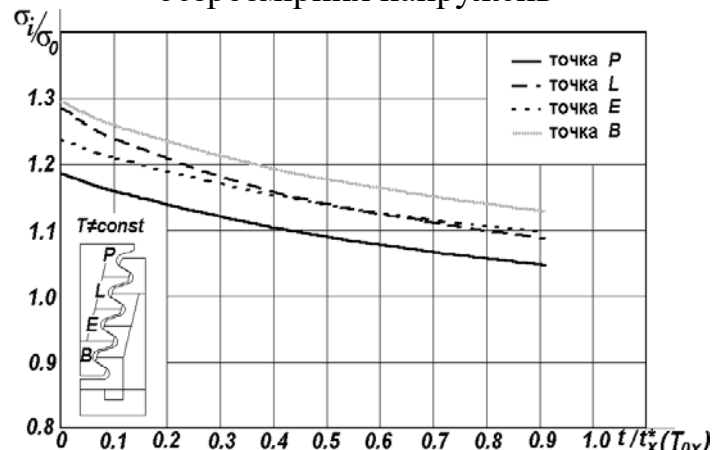


Рис. 67. Зміна інтенсивності безрозмірних напружень, що враховує нерівномірності розподілу температури

Моделювання процесу деформування та визначення ресурсу лопатки газової турбіни. Лопатка експлуатується під впливом центробіжних сил в неоднорідному температурному полі. Для розрахунку розглянуто фрагмент пера лопатки, в межах якого спостерігається найбільш активний перерозподіл напружень і накопичення деформацій повзучості (рис.68). Розподіл температур в поперечних перерізах лопатки показаний на рис. 69. Розрахунок проведений як без урахування, так і з урахуванням нерівномірного розподілу температур, що дозволило оцінити його вплив на величину розрахункового ресурсу.

Розв'язання задачі на основі НМСЕ показало, що врахування нерівномірного розподілення температур в площині поперечного перерізу не спричиняє суттєвого впливу на напружено-деформований стан і величину ресурсу. При нерівномірному

розподіленні температур по висоті пера лопатки максимальна відмінність величин інтенсивності напружень – близько 10% – спостерігається в околі точки 2, де величина пошкодженості є незначною. В той же час, в околі точки перерізу, де розпочинається утворення початкової зони континуального руйнування (точка 1), ця відмінність становить лише біля 2,5%. Але, як свідчать отримані залежності параметра пошкодженості від часу в точці 1 (рис. 70), навіть таке незначне зменшення напружень призводить до уточнення основного розрахункового ресурсу лопатки на 9 % ($t^*(T) = 1,09 t^*$).

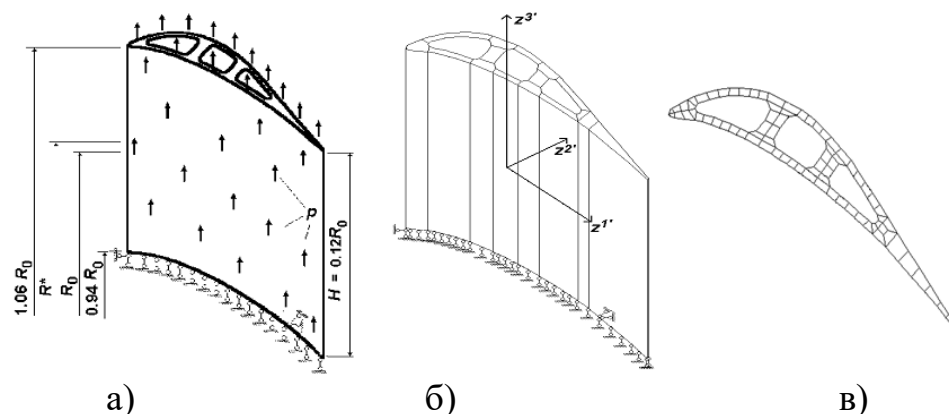


Рис. 68. (а) Фрагмент лопатки поблизу критичного перерізу R^* (б) дискретні моделі МСЕ на основі неоднорідних призматичних СЕ (в)

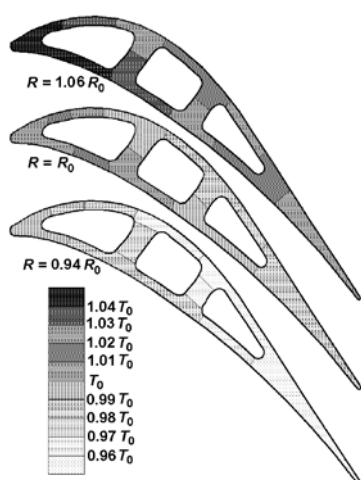


Рис. 69. Розподілення температури в поперечних перерізах пера лопатки

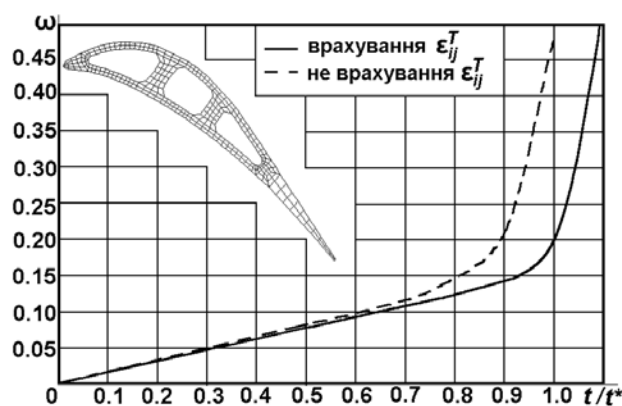


Рис. 70. Зміна розподілення пошкодженості в точці 1 поперечного перерізу лопатки

Таким чином, урахування нерівномірного розподілу температури є необхідним для коректного визначення розрахункового ресурсу.

ВИСНОВКИ

В дані роботі проведено створення на основі напіваналітичного методу скінченних елементів ефективного апарату чисельного аналізу напружено-деформованого стану масивних і тонкостінних довільно навантажених призматичних тіл складної структури з довільними граничними умовами на торцях з урахуванням нелінійного деформування матеріалу, зокрема виникнення малих і великих

деформацій пластичності і повзучості та залежності властивостей матеріалу від температури і на цій основі проведено розв'язання нових складних задач деформування просторових об'єктів

1. Використання НМСЕ з розкладом у ряди Фур'є дозволяє значно зменшити обчислювальні витрати при розрахунках для криволінійних неоднорідних призматичних тіл, забезпечуючи високу точність і збіжність результатів. Це підтверджує доцільність його застосування для аналізу складних об'єктів із варіативними геометричними та фізичними характеристиками.

2. Розроблені алгоритмічні підходи для розв'язання нелінійних геометричних задач демонструють підвищену ефективність і скорочують кількість ітерацій. Метод блочних ітерацій (ВІМ) у поєднанні з екстраполяцією вектора переміщень дозволяє зменшити час розрахунків без втрати точності.

3. Аналіз варіантів локального уточнення сітки показав, що використання призматичних елементів із усередненими механічними та геометричними параметрами дозволяє зберегти точність розрахунків при скороченні обсягу обчислювальних операцій, що є критично важливим для моделювання об'єктів зі складною структурою.

4. Встановлено, що збільшення неоднорідності матеріалу та складності геометрії об'єкта, хоча й уповільнює збіжність традиційних методів, не суттєво впливає на збіжність НМСЕ.

5. Вирішено ряд нових складних задач пружного і пружно-пластичного деформування призматичних тіл, що показало широкі можливості застосування розроблених програмних засобів для визначення напружено-деформованого стану і ресурсу просторових елементів конструкцій складної форми при фізично-нелінійному деформуванні та дозволило виявити якісні особливості процесів деформування і отримати кількісні оцінки напруженого стану, що має самостійне прикладне значення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові публікації, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації

а) монографія

1. Баженов В.А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк – Київ: Вид-во “Каравела”, 2021. – 280с.

б) статті в наукових фахових виданнях України

2. Максим'юк Ю. Алгоритм розв'язання системи лінійних та нелінійних рівнянь напіваналітичним методом скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл / Ю. Максим'юк, М. Гончаренко, І. Мартинюк, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2020. – Вип. 7. – С. 101–108 <https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.101-108>

3. Максим'юк Ю. Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк,

О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.8.2021.97-108>

4. Іванченко Г.М. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62. <http://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.55-62>

5. Максим'юк Ю. Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента на основі представлення переміщень поліномами/ Ю. Максим'юк, О. Шкриль, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 9. – С. 54–162. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.9.2021.54-62>

6. Максим'юк Ю. Системи координатних функцій під час розкладання переміщень по поліномах / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2022. – Вип. 10. – С. 150–157. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.10.2022.150-157>

7. Мартинюк І. Реалізація програмного забезпечення розрахунку міцності на основі напіваналітичного методу скінчених елементів / І. Мартинюк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2022. – Вип. 11. – С. 61–68. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.11.2022.61-68>

8. Мартинюк І. Розв'язання фізично нелінійних задач деформування масивних і тонкостінних призматичних тіл / І. Мартинюк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2022. – Вип. 13. – С. 99–109. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.13.2023.99-109>

9. Кузьмінець М.П. Ефективність скінченних елементів з перемінними та усередненими механічними та геометричними параметрами напіваналітичного методу скінченних елементів / М.П. Кузьмінець, Ю.В.Максим'юк, І.Ю.Мартинюк // Науково-технічний збірник «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2022. – Вип. 112. – С. 78-84. <https://doi.org/10.33744/0365-8171-2022-112-078-084>

10. Кузьмінець М. Структура обчислюваного комплексу розрахунку на міцність призматичних тіл на основі напіваналітичного методу скінченних елементів / М. Кузьмінець, Ю. Максим'юк, І. Мартинюк, Т. Степаненко // «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2023. – Вип. 113. Частина 2 – С. 45-54. <https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-113.2-045-054>

11. Кузьмінець М.П. Розрахункові співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів призматичних тіл для скінченного елемента на основі подання переміщень поліномами / М.П. Кузьмінець, Ю.В.Максим'юк, І.Ю.Мартинюк // Науково-технічний збірник «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2023. – Вип. 114. Частина 1 – С. 65-75. <https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-114.1-065-075>

12. Кузьмінець М.П. Ефективність алгоритму розв'язання системи нелінійних рівнянь на основі екстраполяції переміщень / М.П. Кузьмінець, Ю.В.Максим'юк, І.Ю.Мартинюк // Науково-технічний збірник «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво». – 2024. – Вип. 115. Частина 2 – С. 96-106. <https://doi.org/10.33744/0365-8171-2024-115.2-096-106>

13. Кузьмінець М.П. Дослідження напружено-деформованого стану призматичного демпферуєчого елемента/ М.П. Кузьмінець, Ю.В. Максим'юк, І.Ю.

Мартинюк // Вісник ХНАДУ – 2023. – Вип. 102. – С. 73-77.
<https://doi.org/10.30977/BUL.2219-5548.2023.102.0.73>

14. Андрієвський В.П. Чисельне дослідження збіжності рядів Фур'є, поліномів і напіваналітичного методу скінченних елементів / Андрієвський, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк // Збірник наукових праць Національного гірничого університету – 2023. – № 74. – С. 124-132. <https://doi.org/10.33271/crpnmu/74.124>

15. Максим'юк Ю.В. Дослідження напружено-деформованого стану демпферуєчого елемента / Ю.В. Максим'юк, Андрієвський, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк // Збірник наукових праць Національного гірничого університету – 2023. – № 75. – С. 198-205. <https://doi.org/10.33271/crpnmu/76.198>

16. Андрієвський В.П. Дослідження збіжності поліномів і методу скінчених елементів з урахуванням пластичних властивостей матеріалу / В.П. Андрієвський, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту – 2024. – №207. – С. 24-38. <https://doi.org/10.18664/1994-7852.207.2024.301881>.

в) статті, що включені до наукових періодичних видань інших держав, та у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:

17. Bazhenov V.A. Napivanalitichnyi metod skinchennykh elementiv u pruzhnii ta pruzhno-plastychnii postanovtsi dlia kryvoliniinykh pryzmatychnykh ob'ektiv (Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curviline prismatic objects) / V.A. Bazhenov, A.A. Shkriľ, Yu.V. Maksymyuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymyuk // Opir materialiv i teoriia sporud– 2020. – Vyp. 105. – P. 24–32. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2020.105.24-32>

18. Bazhenov V.A. Convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters/ V.A. Bazhenov, M.V. Horbach, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymyuk // Opir materialiv i teoriia sporud– 2021. – Vyp. 106. – P. 92–104. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.106.92-104>

19. Vorona Y.V. Dostovirnist' rezul'tativ otrymanykh napivanalitichnym metodom skinchennykh elementiv dlia pryzmatychnykh til z pereminnymy fizychnymy i heometrychnymy parametramy (Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters) / Y.V. Vorona, Yu.V. Maksymyuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 107. – P. 184-192 <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.107.184-192>

20. Maksymyuk Yu.V. Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters (Дослідження впливу товщини фланця на характер розвитку зон пластичності в корпусній деталі) /Yu.V. Maksymyuk, Yu. A. Chuprina, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 108. - P. 97-106. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.97-106>

21. Maksymyuk Yu.V. Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters (Дослідження напружено-деформованого стану металевої смуги у процесі

протяжки) /Yu.V. Maksimyyuk, M.P. Kuzminets, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 109.– P. 97-106. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.229-238>

22. Maksimyyuk Yu.V. Numerical analysis of the stressed-deformed state of a tubular element under thermal loading / Yu.V. Maksimyyuk, O.V. Kozak, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 199-206 <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.199-206>

23. Maksimyyuk Yu.V. Analysis of structures with arbitrary kinematic boundary conditions by the semi-analytical finite element method / Yu.V. Maksimyyuk, V.P. Andriievskiy, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyyuk. // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 111. – P. 140-146 <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.111.140-146>

24. Maksimyyuk Yu.V. Analysis of the stress-strain state of the rotary device fastening part by the semi-analytical finite element method / Yu.V. Maksimyyuk, O.O. Shkryl, I.Yu. Martyniuk, A.A. Kozak, O.V. Maksimyyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 67-74. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.67-74>

г) основні публікації по доповідям на міжнародних і вітчизняних конференціях:

25. Максим'юк Ю. Напіваналітичний метод скінчених елементів в лінійних і нелінійних задачах деформування, руйнування та формозмінення просторових тіл з урахуванням неканонічності форми та складної структури / Ю.Максим'юк, І.Мартинюк, О.Максим'юк // III Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 2021. https://www.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2023/09/konCERencziya-knuba-021_prew_all_160421_compressed.pdf

26. Maksimyyuk Yu.V. Solution of Systems of Linear and Nonlinear Equations of Prismatic and Circular Spatial (Розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь призматичних і кругових просторових тіл) /Yu. MaksimyyukI. MartyniukM. MalykhinV. Andreychuk // News of Science and Education: Science and education LTD, Sheffield – GB, 2022. – Issue 9. ISSN: 2312-2773 (online).

27. Maksimyyuk Yu.V. Software For the Calculation of the Strength of Prismatic Bodies (Програмне забезпечення розрахунку міцності призматичних тіл) /Yu. MaksimyyukI. MartyniukM. Malykhin // Středoevropský věstník pro vědu a výzkum: Publishing house Education and Science – CZ, 2022. – Issue 9. ISSN:2336-3630 (online).

28. Максим'юк Ю. Моментна схема скінчених елементів в геометрично та фізично нелінійних задачах деформування вісесиметричних тіл обертання з урахуванням континуального руйнування/ Ю.Максим'юк, І.Мартинюк, О.Максим'юк // IV Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 26 квітня 2023. https://www.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2023/05/tezy_konCERencziyi-knub-2023-26-27_04_235.pdf

29. Maksimyyuk Yu.V, MartyniukI.Yu. Analysis of Geometrically Nonlinear Problems of Axisymmetrical Bodies Taking Into Account the Material Deformation / Materials of the XX International scientific and practical Conference Modern scientific

potential - 2023 , CEbruary 28 - March 7 ,2023: Sheffield. Pp. 119-121 Science and education LTD -130 p. / ISSN 2312-2773 (online).

30. Maksimyyuk Yu.V, Martyniuk I.Yu., Maksimyyuk O.V. Research of Convergence, Reliability and Efficiency of the Results Obtained Using the Given Finite Elements // Materiály XX Mezinárodní vědecko - praktická konference «Věda a technologie: krok do budoucnosti», Volume 4 : Praha. 2023. Pp. 91-94. Publishing House «Education and Science» -96 s. ISSN 1561-6940 (online).

31. Maksimyyuk Yu.V, Martyniuk I.Yu., Maksimyyuk O.V. The effectiveness of the algorithm for solving nonlinear equations in isotropic load // URL: Progressive research in the modern world. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. BoScience Publisher. Boston, USA. 2023. Pp. 229-231. <https://sci-conf.com.ua/vi-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-progressive-research-in-the-modern-world-2-4-03-2023-boston-ssha-arhiv/>

32. Maksimyyuk Yu. V., Martyniuk I. Yu., Maksimyyuk O. V. The Effectiveness of the Algorithm For Solving Nonlinear Equations in Isotropic Load // // Scientific progress: innovations, achievements and prospects. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. MDPC Publishing. Munich, Germany. 2023. Pp. 117-120. URL: <https://sci-conf.com.ua/vi-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-scientific-progress-innovations-achievements-and-prospects-6-8-03-2023-myunhen-nimechchina-arhiv/>.

33. Maksimyyuk Yu. V., Martyniuk I. Yu., Maksimyyuk O. V. Study of the Influence of Taking Into Account Geometric Nonlinearity on The Value of the Resource of a Christmas Tree Joint Under Creep Conditions // Modern research in science and education. Proceedings of the 2nd International scientific and practical conference. BoScience Publisher. Chicago, USA. 2023. Pp. 148-150. URL: <https://sci-conf.com.ua/vi-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-modern-research-in-science-and-education-12-14-10-2023-chikago-ssha-arhiv/>.

АНОТАЦІЯ

Мартинюк І.Ю. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах деформування, континуального руйнування та формозмінення просторових тіл неканонічної форми та складної структури.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – Будівельна механіка. Київський національний університет будівництва та архітектури, м.Київ, 2025.

Розрахунок конструкцій із теплообміном, пластичними деформаціями, істотними змінами форми та взаємодією з іншими об'єктами потребує розв'язання складних просторових задач теплопровідності, теорії пружності й пластичності для тіл неканонічної форми. Це також вимагає врахування контактної взаємодії, великих пластичних деформацій. Розробка ефективних методів розрахунку таких конструкцій із використанням методу скінчених елементів є актуальною проблемою будівельної механіки, особливо в контексті сучасних можливостей комп'ютерного моделювання.

Дослідження виділеного класу об'єктів слід проводити у просторовій постановці, враховуючи їх істотно тривимірний напружено-деформований стан. Найуніверсальнішим чисельним методом, що забезпечує розрахунок конструкцій із фізичною та геометричною нелінійністю, а також з позицій континуальної механіки руйнування, є МСЕ. Проте його можливості для розв'язання просторових задач

обмежені, тому зазвичай використовується вісесиметрична або плоска постановка. Підвищення ефективності МСЕ для об'єктів цього класу можливе шляхом поєднання з методом розділення змінних, що відомий як напіваналітичний метод скінченних елементів.

Значна частина об'єктів потребують розв'язання фізично нелінійних задач, пов'язаних із розвитком незворотних деформацій пластичності та повзучості, в тому числі в умовах геометричної нелінійності, враховуючи великі пластичні деформації.. З іншого боку розглядувані об'єкти часто являють собою оболонкові і комбіновані конструкції.

Особливе значення, зокрема для елементів енергетичного обладнання, має питання продовження ресурсу експлуатації, що вимагає розв'язання задач континуального руйнування. В рамках континуального руйнування зазначені проблеми ускладнюються врахуванням таких факторів, як залежність матеріальних констант матеріалу від температури та вплив геометричної нелінійності.

У роботі запропоновано ефективний чисельний підхід до комплексного розв'язання лінійних, фізично та геометрично нелінійних задач деформування та накопичення пошкодженості матеріалу континуального руйнування для тіл складної структури на основі напіваналітичного методу скінченних елементів.

Наукова новизна результатів полягає в розв'язанні актуальної науково-технічної проблеми з розробки на основі моментної схеми скінчених елементів і напіваналітичного методу скінчених елементів ефективної чисельної методики розв'язання задач фізично- і геометрично нелінійного деформування та континуального руйнування тонкостінних, масивних просторових тіл складної структури та визначення на цій основі ресурсу і несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки, які знаходяться під впливом довільно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень.

Наведені результати були використані в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при виконанні держбюджетних науково-дослідних робіт та на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при виконанні кваліфікаційних робіт для здобуття ступенів вищої освіти бакалавр та магістр. Результати дисертаційної роботи можуть застосовуватись у різних галузях техніки для визначення ресурсу і несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки.

Ключові слова: метод скінченних елементів, напіваналітичний метод скінчених елементів, моментна схема скінчених елементів, фізично і геометрично нелінійні задачі деформування, континуальне руйнування, формозмінення, тонкостінні, масивні просторові тіла.

ANNOTATION

Martyniuk I.Yu. Semi-analytical finite element method in problems of deformation, continuous destruction and shape change of spatial bodies of non-canonical shape and complex structure.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 05.23.17 – Structural Mechanics. Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture, Kyiv, 2025.

The calculation of structures with heat transfer, plastic deformations, significant changes in shape and interaction with other objects requires solving complex spatial problems of heat conduction, the theory of elasticity and plasticity for bodies of non-canonical shape. This also requires taking into account contact interaction, large plastic deformations. The development of effective methods for calculating such structures using the finite element method is an urgent problem of structural mechanics, especially in the context of modern computer modeling capabilities.

The study of the selected class of objects should be carried out in a spatial statement, taking into account their essentially three-dimensional stress-strain state. The most universal numerical method that provides the calculation of structures with physical and geometric nonlinearity, as well as from the standpoint of continuum fracture mechanics, is the finite element method (FEM). However, its capabilities for solving spatial problems are limited, so an axisymmetric or flat setting is usually used. Increasing the efficiency of FEM for objects of this class is possible by combining it with the method of separation of variables, which is known as the semi-analytical finite element method. A significant part of the objects require solving physically nonlinear problems associated with the development of irreversible plasticity and creep deformations, including under conditions of geometric nonlinearity, taking into account large plastic deformations. On the other hand, the objects under consideration are often shell and combined structures.

Of particular importance, in particular for elements of power equipment, is the issue of extending the service life, which requires solving problems of continuous fracture. Within the framework of continuous fracture, these problems are complicated by taking into account such factors as the dependence of material constants of the material on temperature and the influence of geometric nonlinearity.

The paper proposes an effective numerical approach to the complex solution of linear, physically and geometrically nonlinear problems of deformation and damage accumulation of a material under continuous fracture for bodies of complex structure based on the semi-analytical finite element method.

The scientific novelty of the results lies in solving the current scientific and technical problem of developing, based on the finite element moment scheme and the semi-analytical finite element method, an effective numerical method for solving problems of physically and geometrically nonlinear deformation and continuous fracture of thin-walled, massive spatial bodies of complex structure and determining on this basis the life-time and bearing capacity of responsible objects of modern technology that are under the influence of force, kinematic and temperature loads arbitrarily distributed in space and time. The results presented were used at the Research Institute of Structural Mechanics of the Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture in performing state-budget scientific and research works and at the Department of Structural Mechanics of the Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture in performing qualification works for obtaining bachelor's and master's degrees of higher education. The results of the dissertation work can be applied in various fields of engineering to determine the resource and load-bearing capacity of responsible objects of modern technology.

Keywords: finite element method, semi-analytical finite element method, finite element moment scheme, physically and geometrically nonlinear deformation problems, continuum fracture, deformation, thin-walled, massive spatial bodies

Підписано до друку 01.04.2025. Зам. №417.
Формат 60x84 1/16. Папір офсетний. Друк – цифровий.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк.1,9.
Друк ЦП «КОМПРИНТ». Свідоцтво ДК №4131 від 04.08.2011 р.
м. Київ, вул. Васильківська, 32
067-209-54-30, 097-533-18-07
email: komprint@ukr.net