

АНАТОЦІЯ.

Джанов Л.В. Рациональні сталеві балки зі змінного перерізу. - кваліфікаційна наукова робота на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 192 Будівництво та цивільна інженерія (19 – Архітектура та будівництво)- Київський національний університет будівництва і архітектури, 2025.

Дисертаційна робота присвячена визначенню раціональних конструкцій балкових елементів рам і споруд із зварних двотаврів зі змінною висотою стінки і полиці.

У першому розділі виконано огляд і аналіз наукових даних досліджень висвітлених у літературних джерелах присвячених пошуку оптимальної і раціональної висоти сталевих двотаврів із постійною та змінною площею перерізу.

За оглядом винаходів та нових конструкцій встановлено тенденції розвитку в нашій країні і закордоном сталевих рам будівель різного призначення універсального призначення. Підтверджено, що головними напрямками сталого розвитку метало будівництва у світі є використання раціональних сталевих конструкцій з оптимальними витратами сталі, які мають високу технологічність виготовлення та мінімізованими транспортними витратами. Саме до таких конструкцій відносять каркаси будівель із сталевих рами із зварних та розвинутих двотаврів з постійним і змінним перерізом. На прикладах досягнень провідних фірм з виробництва сталевих каркасів зі двотаврів змінного перерізу, а також результати досліджень наукових шкіл Київського національного університету будівництва і архітектури та інших університетів та науково- дослідних інститутів країни показано, що одним із важливих напрямків зниження витрат сталі є використання зварних двотаврів змінного перерізу при змінності, як висоти стінки так ширини полиці. Але узагальнених таких досліджень в цьому напрямку проведено недостатньо. Показано сучасний

науковий рівень досліджень високоефективних сталевих балкових зварних двотаврів із використанням змінної висоти стінки, розвинutih двотаврів з перфорованою стінкою постійного та із змінного перерізу, балок з гофрованою стінкою, та балок з гнучкою стінкою. Відмічено ефективність використання профілів із змінним перерізом, як елементів сталевих рамних каркасів будівель і споруд. Вказана можливість виготовлення економічних за витратами сталі зварних двотаврів змінного перерізу на автоматизованих виробництвах із використанням зварювальних роботів та роботизованого обладнання.

Також у першому розділі виконано огляд методологічних підходів пошуку раціональних сталевих рамних конструкції балкового типу на всіх етапах проектування та огляд методів пошуку оптимального перерізу зварних двотаврів та елементів рам змінного перерізу. Показано, що важливим етапом проектування є варіантне проектування і пошук оптимальної конструктивної форми балкового елемента саме на першій стадії проектування. В цьому відношенні залишаються актуальними і важливими проведення додаткових дослідження з пошуку закономірностей оптимального проектування зварних двотаврів змінного перерізу. Виконано огляд критеріїв оптимального проектування сталевих балкових елементів, показано, що основним критерієм залишається критерій мінімальних витрат сталі. Виконано загальний огляд підходів моделювання і методів оптимального проектування сталевих зварних двотаврів. Відмічено, що континуальний і дискретних підхід оптимального проектування рівнозначні і можуть доповнювати один одного на різних етапах проектування сталевих конструкцій. Показано, що в силу нескладних крайових умов закріплення в системі просторового каркасу найбільш поширеним і ефективним способом оптимального проектування є континуальний підхід щодо моделювання балкового сталевих елемента двотаврового перерізу. Також висвітлено і відповідно обґрунтовано, що найбільш поширеними методом оптимального проектування сталевих зварних двотаврів є методи нелінійного програмування невизначених множників Лагранжа (МНПНМ Лагранжа), та метод Ейлера – Лагранжа.

Виконаний аналіз досліджень інших авторів дав підставу сформулювати основні завдання досліджень дисертації.

В другому розділі Розглянуто новий клас сталевих балок із змінною шириною полиць та змінною висотою та товщиною стінки. Розділ присвячений вибору оптимальної та раціональної конструктивної форми сталевих балкових елементів змінного перерізу, як елементів рамних конструкцій каркасних будівель і споруд. Прийняті крайові умов закріплення балки із площини дії навантаження: балка розкріплена системою горизонтальних і вертикальних в'язей, що запобігає втраті стійкості плоскої форми згину і відповідно мінімізує виникнення бімоментних напружень від стиснутого кручення, які виникають внаслідок випадкових ексцентриситетів при прикладанні зовнішнього статичного навантаження між горизонтальними в'язями. Ці додаткові напруження від стиснутого кручення в такому випадку враховуються при розробці робочого проєкту металевих конструкції, або враховуються додатковими коефіцієнтами. Також вважається, що не відбувається втрата стійкості від повздовжніх сил, які можуть виникати в силу нахилу осі елемента змінного перерізу або рамності конструкції. Прийнято, що місцева стійкість стінки і полиці забезпечена перерізом елементів. Місцева стійкість стінки також забезпечена, а у випадку необхідності, підвищується вертикальними ребрами жорсткості.

Для оптимального проєктування змодельована зварна сталева балка двотаврового симетричного перерізу складена з верхньої та нижньої полиці змінного перерізу, які між собою з'єднані стінкою змінної товщини та висоти. Двотаврова балка змінного перерізу розкріплена на опорах та по довжині конструкції. Розроблена континуальна модель оптимального проєктування сталеві балки із зварного двотавра змінного перерізу (змінними приймаються висота стінки, товщина стінки і ширина полиці). Задача визначення оптимальної конструктивної форми двотаврової сталеві балки із змінним перерізом вирішена за допомогою метода невизначених множників Лагранжа за критерієм мінімальних витрат сталі, як задача нелінійного програмування. Градієнт

змінності перерізу балки визначено за вимогами виконання умов міцності балки в кожному перерізу конструкції.

Задача пошуку оптимальної конструктивної форми балки із зварного двотавра змінного перерізу вирішена за умовами міцності балки при згині для двох випадків. Перша задача вирішується при умові змінності товщини стінки по довжині конструкції: при постійній гнучкості стінки. Друга задача вирішена у постановці визначення оптимальної топології сталеві балки із зварного двотавра зі змінною висотою стінки і полиці, та змінної товщині стінки за степеневим законом. Задача вирішена в узагальненому виді методом нелінійного програмування невизначених множників Лагранжа за критерієм мінімальних витрат сталі при змінній висоті стінки, ширини полиці, товщини стінки. Також використані достатні умови оптимального проектування Каруша-Куна-Такера. Отримані нові аналітичні залежності оптимальної висоти перерізу зварного двотавра із змінною площею перерізу і шириною полиці в залежності від ступеня змінності перерізу зміни висоти перерізу балки в залежності від закономірності зміни згинального моменту. Доказана достовірність отриманих аналітичних залежностей для визначення оптимальної висоти перерізу конструкції ефективної за витратами сталі сталеві балки змінного перерізу при переході від двотавра змінного перерізу до зварного двотавра із постійною висотою і шириною полиці. Виконані числові дослідження чутливості отриманих рішень, щодо схеми навантаження конструкції. Запропонована послідовність визначення градієнта змінності висоти перерізу і ширини полиці при дії рівномірно-розподіленого навантаження і зосередженої сили. На прикладі консольної балки показано, що при дії рівномірно-розподіленого навантаження і зосередженої сили на вільному кінці

балки максимальні напруження виникають не в перерізі, де діє максимальний згинальний момент, а в інших перерізах. Приведені результати числових досліджень визначення градієнта змінності ширини полиці і висоти стінки двотавра при постійній товщині стінки при дії статичного навантаження: рівномірно-розподіленого і зосередженої сили, встановлено мінімальне значення градієнта змінності перерізу, при яких умова міцності виконується в кожному

перерізі. Приведені результат досліджень. Визначення оптимальні значення градієнта змінності висоти стінки і ширини полиці при постійній товщині стінки. **Третій розділ** присвячений дослідженням оптимальної конструктивної форми сталеві зварної балки симетричного перерізу із змінною висотою стінки і змінною шириною полиці за вимогами другого граничного стану - виконанням вимог обмежень за прогинами. Задача сформульована при континуальному моделювання за методом Ейлер -Лагранжа, як задача нелінійного програмування при виконанні вимог міцності для кожного перерізу та за критерієм мінімальних витрат сталі. Отримані нові аналітичні залежності оптимальної висоти зварного сталевих двотавра зі змінною висотою стінки і змінною шириною полиці для перерізу, де дії максимальний згинальний момент при виконанні вимог граничних прогинів.

У четвертому розділі проведені дослідження практичного застосування конструкцій сталевих із зварних двотаврів із змінною висотою стінки і змінної ширини полиці. Так розглянута задача раціонального вибору перерізу і оптимальної конструктивної форми елемента порталної рами, який виготовлений із зварного двотавра із змінною висотою стінки, та при змінній ширині полиці з урахуванням дії згинального моменту і повздовжньої сили при відносному ексцентриситеті $m_x > 15$. Стійкість ригеля змінного перерізу в площині рами враховується за методом Тимошенка-Ясинського. Місцева стійкість стінки і полиці теж забезпечена необхідним відношенням товщини полиці до її ширини, а ще стійкість стінки забезпечена ребрами жорсткості. Загальна стійкість елемента рами із площини дії згинального моменту забезпечена конструктивними заходами: розташуванням вертикальних і горизонтальних в'язей.

Сформульована задача нелінійного математичного програмування (4.5) описується в просторі змінних геометричних характеристик перерізу сталевих елемента із двотавра змінного перерізу: h_z , A_z , $t_{w,z}$ та обмежувальними функціями у вигляді умов забезпечення міцності кожного перерізу. Прийнято, що обмеження за міцністю за дією поперечної сили не є активними. Також не активними

вважаються обмеження за умовами стійкості стінки і полиць. За критерій оптимального проектування вибрано критерій мінімальних витрат сталі елемента рами. Задача оптимального проектування вирішується методом невизначених множників Лагранжа, з використанням достатніх умов Каруша-Куна-Такера.

Отримана нова аналітична формула оптимальної висоти перерізу двотавра по довжині елемента рами з урахуванням впливу повздовжньої сили.

Для визначення градієнта змінності перерізу проведені числові дослідження. Для проведення числових досліджень елемента порталльної рами з метою визначення градієнта змінності перерізу стінки і полиці прийнято що зміна згинального моменту відбувається за лінійним законом. Градієнт змінності перерізу визначений із виконання умов міцності для кожного перерізу. Встановлено, що для зварних двотаврів із змінною висотою стінки і шириною полиці при однакових градієнтах змінності існує граничне значення градієнта раціональної конструктивної форми сталевго двотавра змінного перерізу, при якому умови міцності виконуються для кожного перерізу в залежності від співвідношення згинальних моментів, що діють на опорах з обох кінців балки. Встановлена закономірність впливу відношення кінцевих згинальних моментів на вибір раціональної топології сталевго балки змінного перерізу: при зменшенні різниці між значеннями кінцевих згинальних моментів - градієнт змінності перерізу зменшується, а відношення висоти перерізу найменшого перерізу двотавра до висоти перерізу збільшується.

Також важливим результатом, стало підтвердження, що оптимальна висота сталевго двотавра змінного перерізу, яка визначенні з умов міцності за максимальним згинальним моментом забезпечує основну раціональну конструктивну форму кожного балкового двотаврового елемента всієї порталльної рами.

Підтверджена достовірність отриманих результатів визначення оптимальної висоти перерізу та достовірність розробленої фізико-математичної континуальної моделі елемента порталльної рами зварного двотавра змінного перерізу при дії згинальних моментів і повздовжніх сил. Отримані результати

достатньо добре співпадають із значеннями оптимальних конструкцій елементів рам отриманими в роботах інших авторів.

Практичне значення проведених досліджень і отриманих нових наукових результатів полягає у встановленні закономірностей вибору оптимальної конструктивної форми сталевих балок із зварних двотаврів зі змінною висотою стінки і змінною шириною полиці. Отримані нові аналітичні залежності дозволяють на першому етапі проектування визначити оптимальну висоту перерізу за двома граничними станами, де діє максимальний згинальний момент з урахуванням особливостей змінності напружено-деформованого стану по довжині конструкції. А розроблений методологічний підхід та результати числових досліджень дають змогу призначити оптимальне значення градієнтів змінності перерізу стінки і полиці за двома граничними станами по довжині перерізу в залежності від діючих зусиль по довжині елемента. Це дає змогу отримати раціональну конструкцію зварного двотавра змінного перерізу, як елемента порталних рамних конструкцій з урахуванням дії згинальних моментів і повздовжніх сил.

Ключові слова: раціональні сталеві конструкції, міцність балок, граничні стани, оптимальне проектування, сталеві зварні двотаврові балки із змінною шириною полиць а змінною висотою та товщиною стінки, математичне моделювання сталевих конструкцій, система диференціальних рівнянь, метод невизначених множників Лагранжа, метод Ейлера-Лагранжа, статичне навантаження, сталеві рами, сталеві каркаси, деформації.

Наукова новизна та нові наукові результати .

1. Розглянуто новий клас сталевих балок змінного перерізу зі зварних двотаврів із змінною висотою стінки і шириною полиці. Отримана вперше узагальнена аналітична залежність закономірності зміни висоти балки і ширини полиці оптимальної конструкції двотаврової сталевої балки по її довжині з урахуванням ступеня змінності перерізу стінки і полиці. Вирішена задача нелінійного оптимального програмування зварних двотаврів із змінним перерізом за методом невизначених множників Лагранжа. За числовими

дослідженнями визначено раціональний градієнт змінності перерізу стінки і ширини полиці сталевій двотавровій балці за вимогами виконання умов міцності в кожному перерізу. Це дало змогу уникнути порушення умов міцності для перерізів, де діє не максимальний згинальний момент. Підтверджена і обґрунтована актуальність наукових досліджень за темою дисертації. Огляд літературних джерел показав, що актуальним є розвиток оптимального проектування сталевих зварних двотаврів змінного перерізу.

2. Отримані нові закономірності чутливості отриманих раціональних конструктивних рішень зварних двотаврів змінного перерізу, щодо схеми навантаження конструкції. Запропонована послідовність та визначено раціональне значення градієнта змінності висоти перерізу і ширини полиць при дії рівномірно-розподіленого навантаження і зосередженої сили. На прикладі консольної балки показано, що при дії рівномірно-розподіленого навантаження і зосередженої сили на вільному кінці балки максимальні напруження виникають не в перерізі, де діє максимальний згинальний момент, а в інших перерізах в залежності від градієнта змінності перерізу стінки і полиці. Таким чином, встановлена ще одна закономірність: при збільшенні впливу дії згинальних моментів від зосереджених сил градієнти змінності ширини полиці і стінки зменшуються і оптимальна конструктивна форма зварного сталевих двотавра стає більш пологою.

3. Отримана аналітична формула для визначення оптимальної висоти кожного перерізу конструкції за одночасним виконанням мінімальних витрат сталі, умов міцності та виконання умов другого граничного стану за прогинами. Отримана аналітична формула описує нові закономірності вибору найкращого конструктивного рішення сталевих двотаврових балок змінного перерізу в залежності від ступеня змінності перерізу. Цей новий науковий результат отриманий за методом Ейлера-Лагранжа під час вирішенням задачі нелінійного програмування з визначення оптимальної конструктивної форми зварного сталевих двотавра із змінною висотою стінки та полиці за умовами мінімальних

витрат сталі і виконання вимог другого граничного стану (обмеження за прогинами) з урахуванням вимог оптимальності кожного перерізу.

Отримані практичні рекомендації для визначення градієнта змінності перерізу зварного двотавра змінного перерізу і при змінній тільки ширині полиці і постійній висоті стінки і товщині в залежності від обмежень за прогинами.

4. Отримана нові аналітичні залежності оптимальної висоти перерізу двотавра по довжині балки з урахуванням впливу повздовжньої сили. Вперше встановлено нову закономірність: для елементів порталних рам з урахуванням дії згинальних моментів і повздовжніх сил із сталевих двотаврів змінного перерізу оптимальним розподілом сталі по висоті перерізу є закономірність оптимального проектування перерізів: площа двох полиць дорівнює половині площі стінки. Розвинуті теоретичні положення оптимального проектування елементів сталевих порталних рам із зварних двотаврів із змінною висотою стінки і змінною шириною полиць при врахуванні дії згинальних моментів на кінцях елемента рами та повздовжніх сил. Вирішена задача оптимального проектування за методом невизначених множників Лагранжа з використанням умов Каруша-Куна-Такера за критерієм мінімальних витрат сталі при дії повздовжньої сили і кінцевих згинальних моментів та постійному значення поперечної сили ($M_{x,n}, M_{x,0}, M_{x,0} > M_{x,n}, m_{xz} > 0,15$). Вплив повздовжньої сили для рам в умовах міцності прийнято за формулою Тимошенко-Ясинського.

5. Встановлена також закономірність впливу відношення кінцевих згинальних моментів на вибір раціональної конструктивної форми сталевої балки змінного перерізу: при зменшенні різниці між значеннями кінцевих згинальних моментів - градієнт змінності перерізу зменшується, а відношення висоти перерізу найменшого перерізу двотавра до висоти перерізу збільшується. Для визначення градієнта змінності перерізу проведені числові дослідження, щоб уникнути умов, при якій найбільші напруження виникають в перерізах, де не діє максимальний згинальний момент.

6. Підтверджена достовірність отриманих результатів та розробленої фізико-математичної континуальної моделі міцності елемента порталної рами

зварного двотавра змінного перерізу при дії згинальних моментів і повздовжніх сил. Отримані результати достатньо добре співпадають із значеннями оптимальних конструкцій елементів рам отриманими в роботах інших відомих авторів.

7. Результати виконаних досліджень показують, що використання сталевих балок із змінним перерізом стінки і полиці дає економію сталі до 12%...19% порівняно з балками постійного перерізу. Економія металу досягається за рахунок додаткової можливості розподілити сталь по довжині балок відповідно до напружено -деформованого стану при оптимальному розподіленні сталі по висоті кожного перерізу.

ABSTRACT.

Dzhanov L.V. *Rational Steel Beams with Variable Web Height and Flange Width* – qualification research work submitted as a manuscript..

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 192 Construction and Civil Engineering (19 – Architecture and Construction) – Kyiv National University of Construction and Architecture, 2025.

The dissertation is devoted to determining rational designs of beam elements of frames and structures made of welded I-beams with variable web height and flange width.

Chapter 1 provides a review and analysis of scientific data presented in the literature regarding the search for optimal and rational web heights of steel I-beams with constant and variable cross-sectional areas..

Based on the review of inventions and new designs of steel frames for buildings of various functions in Ukraine and abroad, the general trends in the development of metal structures for multipurpose buildings are identified. It is confirmed that the main directions of sustainable development in steel construction worldwide are the use of rational steel structures with optimized steel consumption, high manufacturability, and minimized transportation costs. Such structures include building frames made of welded and expanded I-beams with constant or variable cross-sections.

Examples from leading companies producing variable cross-section steel frames, as well as research from scientific schools of Kyiv National University of Construction and Architecture and other universities and research institutes in Ukraine, demonstrate that one of the key approaches to reducing steel consumption in mass-used steel frame structures is the use of welded I-beams with variable cross-sections, where both web height and flange width vary. However, comprehensive studies in this area remain insufficient.

The current scientific state of research is presented for welded steel I-beams with variable web height, expanded I-beams with perforated webs of both constant and variable height, corrugated web beams, and beams with flexible webs. The effectiveness of using variable cross-section profiles as elements of steel frame buildings and structures is highlighted. The feasibility of manufacturing cost-efficient welded I-beams with variable cross-sections using automated production lines and robotic equipment is also noted.

Furthermore, this chapter reviews methodological approaches to the design of rational steel beam-type frame structures at all design stages, and surveys methods for determining the optimal cross-section of welded I-beams and variable-section frame elements. It is shown that the initial design phase, where alternative design options and optimal beam configurations are explored, plays a critical role. In this context, analytical methods for optimal design remain relevant and significant.

A review of the design criteria for optimal steel beam elements is presented, emphasizing that the primary criterion remains the minimization of steel consumption. General approaches to modeling and optimal design methods for welded steel I-beams are reviewed. It is noted that both continuous and discrete design approaches are equivalent and may complement each other at different design stages of steel structures. Due to the relatively simple boundary conditions of support in spatial frame systems, the continuous modeling approach is identified as the most widespread and efficient method for the optimal design of steel I-beam elements.

It is also stated and substantiated that the most common methods for the optimal design of welded steel I-beams are nonlinear programming methods using Lagrange multipliers and the Euler–Lagrange method.

The analysis of other authors' research has provided the basis for formulating the main research objectives of this dissertation.

Chapter 2 considers a new class of steel beams with variable flange width, web height, and web thickness. The chapter is dedicated to selecting the optimal and rational topology of variable cross-section steel beam elements used in frame structures of building frameworks. The beam is assumed to be laterally restrained out of the loading plane by a system of horizontal and vertical bracings, which prevents the loss of flexural stability and minimizes the emergence of bimoment stresses from restrained torsion due to accidental eccentricities in the application of external static loads between the horizontal bracings. These additional stresses from restrained torsion are considered in the working design either through detailed structural steelwork or by applying additional coefficients. It is also assumed that no loss of stability occurs due to longitudinal forces that may arise from the inclination of the axis of the variable cross-section element. Local stability of the web and flange is considered ensured by the element's cross-section, and, where necessary, vertical stiffeners are used to ensure the web's local stability.

A welded steel I-beam of symmetrical cross-section, composed of variable cross-section upper and lower flanges connected by a web of variable height and thickness, is modeled for optimal design. The variable cross-section I-beam is restrained at the supports and along its length. A continuous model is developed for the optimal design of a welded variable cross-section steel I-beam, where the web height, web thickness, and flange width are considered as design variables. The problem of determining the optimal structural form of the variable cross-section steel I-beam is solved using the method of Lagrange multipliers as a nonlinear programming problem with the criterion of minimizing steel consumption. The gradient of cross-section variation is determined based on the requirement to satisfy strength conditions at each cross-section along the beam.

The problem of optimal beam topology for a welded variable cross-section I-beam is solved under bending strength conditions in two cases. The first case considers variation of web thickness along the beam length while maintaining constant web slenderness. The second case is formulated for determining the optimal topology of a welded I-beam with variable web height and flange width, and variable web thickness. The problem is solved in a generalized form using nonlinear programming with Lagrange multipliers, where the design variables include the web height, flange width, and web thickness, and the objective is to minimize steel consumption. The Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions are also applied. New analytical relationships are obtained for the optimal web height of a welded I-beam with variable cross-sectional area and flange width, as a function of the degree of cross-section variability and the distribution of the bending moment. The validity of these analytical expressions for determining the optimal web height of steel beams with variable cross-sections is confirmed, including transitions to I-beams with constant web height and flange width.. Numerical sensitivity analyses of the obtained solutions were conducted with respect to different loading schemes. A procedure is proposed for determining the gradient of variation in web height and flange width under combined action of uniformly distributed loads and concentrated forces. Using a cantilever beam as an example, it is shown that under combined loading, the maximum stresses do not necessarily occur at the cross-section with the maximum bending moment, but may appear elsewhere. Numerical investigations were performed to determine the gradient of variation in flange width and web height of the I-beam with constant web thickness under static loading from a combination of uniformly distributed and concentrated loads. The minimum gradient values were established at which the strength condition is satisfied for every cross-section. The results of these investigations are presented, and the optimal values of the gradient of variation in web height and flange width under constant web thickness are identified.

Chapter 3 is devoted to the investigation of the optimal structural form of a welded steel beam with a symmetrical cross-section, featuring variable web height and variable flange width, under the constraints of the second limit state—compliance with

deflection limitations. The problem is formulated using a continuous modeling approach based on the Euler–Lagrange method as a nonlinear programming problem, considering strength requirements for each cross-section and aiming to minimize steel consumption. New analytical relationships are obtained for determining the optimal height of a welded steel I-beam with variable web height and flange width at the cross-section where the maximum bending moment occurs, while satisfying the specified deflection limits.

Chapter 4 presents studies on the practical application of welded steel I-beams with variable web height and variable flange width. The focus is on the rational selection of the cross-section and the optimal structural form of a portal frame element made of a welded I-beam with variable web height and flange width, taking into account the effects of bending moment and axial force under a relative eccentricity of $m_x > 15$. The in-plane stability of the variable cross-section girder is considered using the Timoshenko–Yasinsky method. Local stability of the web and flanges is ensured by maintaining the appropriate flange width-to-thickness ratio and by providing stiffeners, while the global out-of-plane stability of the frame element is ensured through constructive measures, including the arrangement of vertical and horizontal bracing elements.

The formulated nonlinear mathematical programming problem (4.5) is described in the space of geometric variables of the cross-section of the variable I-beam element—namely h_z , A_z , $t_{w,z}$ —with constraint functions corresponding to strength conditions for each cross-section. It is assumed that shear force strength constraints are inactive, as are the local stability constraints for the web and flange. The design criterion is the minimization of steel consumption for the frame element. The optimization problem is solved using the method of Lagrange multipliers with the application of the Karush–Kuhn–Tucker (KKT) optimality conditions.

A new analytical formula is derived for the optimal web height of the I-beam along the length of the frame element, accounting for the influence of axial force..

To determine the cross-sectional variation gradient, numerical studies are performed. In these studies of a portal frame element, the bending moment is assumed

to vary linearly. The gradient of cross-section variation is determined based on the satisfaction of strength conditions in every section. It is established that for welded I-beams with variable web height and flange width, there exists a limiting value of the variation gradient beyond which the strength conditions are no longer satisfied, and this limit depends on the ratio of the bending moments applied at the two ends of the beam. A relationship is established between the ratio of end bending moments and the selection of the rational topology of a variable cross-section steel beam: as the difference between the end moments decreases, the variation gradient also decreases, and the height ratio of the smallest section to the maximum section increases.

Another important outcome is the confirmation that the optimal height of a variable cross-section steel I-beam, determined based on strength under maximum bending moment, defines the primary rational structural form of each beam element within the entire portal frame.

The reliability of the obtained results for optimal cross-sectional height is confirmed through the developed physico-mathematical continuous model of a portal frame element made of a welded variable cross-section I-beam under the action of bending moments and axial forces. The results are in good agreement with the optimal designs reported in the works of other authors.

The practical significance of the conducted research and the obtained new scientific results lies in establishing regularities for selecting the optimal structural form of welded steel I-beams with variable web height and flange width. Furthermore, the newly derived analytical expressions allow for the direct determination of the optimal section height at the initial design stage based on the two limit states where the maximum bending moment occurs. The developed methodological approach and the results of numerical studies enable the assignment of the optimal gradient of variation for the web and flange dimensions under the two limit states along the element's length, depending on the applied internal forces. This facilitates the design of a rational welded I-beam configuration as a structural component of a frame system, taking into account the effects of both bending moments and axial forces..

Keywords: steel structures, beam strength, limit states, optimal design, welded steel I-beams with variable flange width and variable web height and thickness, mathematical modeling of steel structures, system of differential equations, Lagrange multiplier method, Euler–Lagrange method, static loading, steel frames, steel frameworks, deformations

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у науковому виданні, включеному до переліку фахових видань України категорії «А», яке цитується у реферативній базі Web of Science

1. Dzhанov, L. V., Bilyk, S. I., & Bilyk, A. S. (2025). Rational topology of steel I-beams with various gradients of changing wall height and shelf width at specified sections along the length of the beam. *Strength of Materials and Theory of Structures. Scientific-and-technical collected articles*, (114), 155–164. Kyiv: KNUBA. (in English) <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2025.114.155-164> Особисто автором запропоновано методикау визначення раціональної конструктивної форми зварної двотаврової балки із змінної висотою стінки і змінною шириною полиці.

Статті у науковому виданні, включеному до переліку фахових видань України категорії «Б»

2. Білик А.С., Джанов Л.В., Терновий М.І. (2025) Визначення оптимальної висоти сталевих двотаврів змінного перерізу за методикою множників Лагранжа. *Просторовий розвиток (11)*, 282-302.
<https://doi.org/10.32347/2786-7269.2025.11.282-302>.
<https://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/29/2025/SD2511.pdf>. Особисто автором запропоновано методикау визначення оптимальної висоти сталеві зварної двотаврової балки із змінної висотою стінки зі змінною шириною полиці за методикою невизначених множників Лагранжа.
3. Джанов, Л. (2025). Раціональна топология сталевих консольних балок зі змінною шириною полиць і висотою стінки при обмеженнях по прогину та міцності. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*, (16), 158–170.
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.16.2025.158-170>. Особисто автором

запропоновано методику визначення оптимальної висоти сталевих двотаврових балок із змінною висотою стінки зі змінною шириною полиці при обмеженнях по прогину та міцності.

4. Dzhanov, L (2025). Rational steel canopy structures over stadium stands using welded i-beams with variable flange width and web height.

Будівельні конструкції. Теорія і практика, (17), 211–220. DOI: [10.32347/2522-4182.17.2025.211-220](https://doi.org/10.32347/2522-4182.17.2025.211-220).

Особисто автором проведено дослідження пошуку раціональної конструктивної форми зварної балки із змінною висотою стінки і полиці зі визначенням градієнта змінності перерізу по довжині конструкції.

5. Білик, А.С., Білик С.І., Глітін О.О., & Джанов Л.В. (2022). Оптимальна висота сталевих двотаврових балок зі змінною шириною полиць. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*, (12), 42–52.

<https://doi.org/10.32347/2522-4182.12.2023.42-52>. Особисто автором проведено дослідження пошуку раціональної конструктивної форми зварної балки із змінною шириною полиці

6. Артем Білик, Валерій Нужний, Любомир Джанов, Вадім Перестюк (2020). Особливості аналітичного розв'язку задачі про переміщення консольних сталевих балок зі змінною шириною полиць. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*, (7), 85–92. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.85-92>. Особисто автором проведено числові аналітичні дослідження визначення прогинів балки із змінною шириною полиці.

Матеріали конференцій

7. Джанов Л.В. Сталеві балки із змінним перерізом, вибір оптимальної топології. // V Міжнародна науково–практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» (14–16 травня 2025 р.). – Київ, 2025. – С. 84–85 <https://doi.org/10.59647/978-617-8633-07-3/1>

8. Білик А.С., Білик С.І., Джанов Л.В. Оптимальна висота сталевих двотаврових балок із змінною шириною полиць // IV Міжнародна наукова практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» (26-27 квітня 2023 р.), - Київ, 2023. с. 46-47

https://www.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2023/05/tezy_konferencziyi-knub-2023-26-27_04_235.pdf

9. Білик С.І., Джанов Л.В. Особливості вибору оптимального перерізу сталевих двотаврових зварних балок зі змінною шириною полиці та змінною висотою стінки // *Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем (КЗЯТПС–2022): матеріали тез доповідей XII Міжнародної науково-практичної конференції (м. Чернігів, 26–27 травня 2022 р.) : у 2 т. / Національний університет «Чернігівська політехніка» – Чернігів: НУ «Чернігівська політехніка», 2022. – Т. 2. – С.97-98. <https://cf.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2025/10/Tezy-2022-Part-2.pdf#page=97>*

10. Білик С.І., Джанов Л.В. Впровадження курс ВІМ-технологій в металевих конструкціях у навчальний процес в умовах дистанційного навчання // *Conference program and proceedings International scientific-practical conference of young scientists Build-Master-Class 2022 (30.11-02.12.2022) // К.: KNUCA, 2022.– с.183-184. https://cf.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2025/10/%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D1%82%D0%B5%D0%B7_BMC-2022_v2_web.pdf#page=184*

11. Білик С.І., Білик А.С., Джанов Л.В. Оптимальна висота сталевої балки зі змінною висотою стінки і полиці // *Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем (КЗЯТПС–2022): матеріали тез доповідей XII Міжнародної науково-практичної конференції (м. Чернігів, 26–27 травня 2021 р.) : у 2 т. / Національний університет «Чернігівська політехніка» [та ін.]. – Чернігів: НУ «Чернігівська політехніка», 2021. – Т. 2. – С.92-93. <https://cf.knuba.edu.ua/wp-content/uploads/2025/10/Tezy-2021-Part-2.pdf#page=92>*

12. S. Bilyk, L. Dzhanov, A. Bilyk .Optimal topology of I-beam steel members with variable web depth, web thickness, and flange width. *VIII International Conference «In-service Damage of Materials, its Diagnostics and Prediction». October 15-17, 2025, Ternopil, Ukraine. <https://dmdp.tntu.edu.ua>*